

Comencem

- Escriu les equacions que es corresponen amb els enunciat següents:

- El perímetre d'un rectangle mesura 24 cm.
- La suma de tres nombres senars consecutius és 27.
- La diferència entre els quadrats de dos nombres enters consecutius és 9.
- Un nombre supera en 12 unitats la seva arrel quadrada positiva.
- El volum d'un prisma quadrangular regular mesura 80 cm³.

- Dimensions del rectangle: x i $y \rightarrow 2x + 2y = 24$ (x i y s'expressen en centímetres).
- Anomenem x el més petit d'aquests nombres $\rightarrow x + x + 2 + x + 4 = 27$.
- Anomenem x el més petit d'aquests nombres $\rightarrow (x + 1)^2 - x^2 = 9$.
- Representem per x el nombre $\rightarrow x = \sqrt{x} + 12$
- Representem per c la longitud del costat del quadrat de la base i per h l'aresta lateral del prisma $\rightarrow c^2 \cdot h = 80$ (c i h s'expressen en centímetres).

Exercicis

1. Aplica els criteris d'equivalència necessaris per resoldre cadascuna de les equacions següents:

a) $(7x - 2)^2 - 1 = 0$

b) $\frac{x-2}{3} = 5$ c) $(1 - 2x)^3 = 27$

a) $(7x - 2)^2 - 1 = 0 \rightarrow (7x - 2)^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 7x - 2 = \pm 1$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 7x - 2 = 1 & 7x - 2 = -1 \\ 7x = 3 & 7x = 1 \\ x = \frac{3}{7} & x = \frac{1}{7} \\ x_1 = \frac{3}{7}; & x_2 = \frac{1}{7} \end{array}$$

b) $\frac{x-2}{3} = 5 \rightarrow x - 2 = 15 \rightarrow x = 17$

c) $(1 - 2x)^3 = 27 \rightarrow 1 - 2x = \sqrt[3]{27} \rightarrow$
 $\rightarrow 2 - 2x = 3 \rightarrow x = -1$

2. Les equacions $3x(x - 3) = 2(x - 3)$ i $3x = 2$, són equivalents? Justifica'n la resposta.

No, perquè la primera de les equacions té dues solucions: $x_1 = \frac{2}{3}$ i $x_2 = 3$, i, en canvi, la segona només en té una: $x = \frac{2}{3}$.

3. Aïlla la lletra que s'indica en cadascuna d'aquestes igualtats:

a) t en $h = \frac{1}{2}gt^2$

b) r en $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

c) a en $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

d) y en $x^2 + y^2 = 9$

e) x en $y = (x + 4)^2 - 10$

f) t en $i = \frac{Crt}{100}$

a) $t = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$

b) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

c) $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)}$

d) $y = \pm \sqrt{9 - x^2}$

e) $x = -4 \pm \sqrt{y + 10}$

f) $t = \frac{100i}{Cr}$

4. Resol les equacions següents:

a) $(2x - 1)^2 - (2x + 1)^2 = 24$

b) $2 - \frac{3(1-x)}{14} = \frac{x+3}{7}$

c) $\frac{x-5}{2x+1} = \frac{2x+3}{4x+7}$

d) $\sqrt{2}x - 1 = x - \sqrt{2}$

e) $1 - \frac{4+2x}{13} = 0$

a) $(2x - 1)^2 - (2x + 1)^2 = 24 \rightarrow$
 $\rightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 - 4x - 1 = 24 \rightarrow$
 $\rightarrow -8x = 24 \rightarrow x = -3$

$$b) 2 - \frac{3(1-x)}{14} = \frac{x+3}{7} \rightarrow$$

$$\rightarrow 28 - 3 + 3x = 2x + 6 \rightarrow x = -19$$

$$c) \frac{x-5}{2x+1} = \frac{2x+3}{4x+7} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-5)(4x+7) = (2x+1)(2x+3) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^2 + 7x - 20x - 35 =$$

$$= 4x^2 + 6x + 2x + 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow -13x - 35 = 8x + 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow -21x = 38 \rightarrow x = -\frac{38}{21}$$

$$d) \sqrt{2}x - 1 = x - \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}x - x = 1 - \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow (\sqrt{2} - 1)x = 1 - \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{-(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = -1$$

$$e) 1 - \frac{4+2x}{13} = 0 \rightarrow \frac{13-4-2x}{13} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9 - 2x = 0 \rightarrow 2x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{2}$$

5. Soluciona aquestes equacions, escrivint prèviament els seus primers membres en forma de producte de factors:

a) $x^2 - 6x = 0$

b) $x(x-5) - 2(x-5) = 0$

c) $(x+2)^2 - (x+2)(3x-1) = 0$

a) $x^2 - 6x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x-6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$$

b) $x(x-5) - 2(x-5) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow (x-5)(x-2) = 0 \begin{cases} x-5 = 0 \rightarrow x = 5 \\ x-2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

c) $(x+2)^2 - (x+2)(3x-1) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow (x+2)(x+2-3x+1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x+2)(3-2x) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \rightarrow x_1 = -2 \\ 3-2x = 0 \rightarrow x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

6. Sabem que $x = 2$ i $y = -3$ és una de les solucions de l'equació $3x + by = 10$. Calcula b i troba una altra solució de l'equació.

$$3x + by = 10 \xrightarrow{x=2, y=-3} 3 \cdot 2 + b \cdot (-3) = 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6 - 3b = 10 \rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

Resposta oberta. Per exemple: $x = \frac{10}{3}, y = 0$.

7. Determina tres solucions de l'equació: $2x - 3y + z = 15$.

Resposta oberta. Per exemple:

$$x = 0, y = 0, z = 15; x = \frac{15}{2}, y = 0, z = 0;$$

$$x = 0, y = -5, z = 0.$$

8. Resol les equacions següents:

a) $5x^2 - 75 = 0$

b) $7x^2 + 15x = 0$

c) $2x^2 - x - 1 = 0$

d) $\frac{2(x+2)}{3} = x(x-3)$

e) $(3x-5)^2 = 0$

f) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

g) $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$

h) $x^2 + 4x + 5 = 0$

a) $5x^2 - 75 = 0 \rightarrow 5x^2 = 75 \rightarrow$

$$\rightarrow x^2 = 15 \rightarrow x = \pm\sqrt{15}$$

b) $7x^2 + 15x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x(7x+15) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 7x+15 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{15}{7} \end{cases}$$

c) $2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

d) $\frac{2(x+2)}{3} = x(x-3) \rightarrow 2x+4 = 3x^2-9x \rightarrow$

$$\rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121+48}}{6} = \frac{11 \pm 13}{6} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

e) $(3x-5)^2 = 0 \rightarrow 3x-5=0 \rightarrow x = \frac{5}{3}$
(solució doble).

f) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$g) \frac{4}{x} = \frac{x}{9} \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$$

$$h) x^2 + 4x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}. \text{ L'equació no té solucions reals.}$$

9. Si x_1 i x_2 són les solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, demostra que es verifica:

$$a) x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad b) x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ i}$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a) x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} + \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$b) x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

10. Determina el valor o els valors de b per als quals l'equació $x^2 - bx + 9 = 0$ té:

a) Una solució doble.

b) Dues solucions reals diferents.

c) No té solucions reals.

$$x^2 - bx + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 36}}{2}$$

$$a) b^2 - 36 = 0 \rightarrow b = \pm 6$$

$$b) b^2 - 36 > 0 \rightarrow b < -6 \text{ o } b > 6$$

$$c) b^2 - 36 < 0 \rightarrow -6 < b < 6$$

11. L'equació $x + y^2 = 7$ té infinites solucions. En aquestes solucions, la incògnita y pot prendre qualsevol valor real. No succeeix el mateix amb la incògnita x . Justifica aquestes dues afirmacions i indica raonadament per a quins valors reals de x l'equació té solució.

$x = 7 - y^2 \rightarrow$ per a qualsevol valor real de la incògnita y podem trobar un valor també real per a x .

$y = \pm\sqrt{7 - x} \rightarrow$ perquè y sigui un nombre real, cal que es verifiqui que $7 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 7$.

12. Quantes solucions reals té l'equació $x^2 + y^2 = 0$? I l'equació $x + y = 0$? Raona les respostes.

L'equació $x^2 + y^2 = 0$ té una sola solució real: $x = y = 0$.

En canvi, qualsevol parell de nombres reals oposats, $x = -y$, és una solució de l'equació $x + y = 0$.

13. Resol aquestes equacions:

$$a) x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$b) (3x + 1)(x^4 - 16) = 0$$

$$c) 6x^4 + 7x^2 + 2 = 0$$

$$d) (x^2 - 4)^2 = 1 \rightarrow x^2 - 4 = \pm 1$$

$$a) x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

$$x = \pm\sqrt{t} \rightarrow x = \pm 3; x = \pm 2$$

$$b) (3x + 1)(x^4 - 16) = 0$$

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ x^4 - 16 = 0 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2 \end{cases}$$

$$c) 6x^4 + 7x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} 6t^2 + 7t + 2 = 0$$

$$t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \frac{-7 \pm 1}{12} \begin{cases} t_1 = -\frac{1}{2} \\ t_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x = \pm\sqrt{t} \rightarrow \text{l'equació no té solucions reals.}$$

$$d) (x^2 - 4)^2 = 1 \rightarrow x^2 - 4 = \pm 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 1 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ x^2 - 4 = -1 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

14. Quan realitzem el canvi $x^2 = t$ a l'equació $ax^4 + bx^2 + c = 0$ s'obtenen dues solucions t_1 i t_2 de manera que $t_1 + t_2 < 0$ i $t_1 t_2 > 0$. Indica raonadament quantes solucions reals té l'equació biquadrada.

Si $t_1 \cdot t_2 > 0$ i $t_1 + t_2 < 0$, podem assegurar que t_1 i t_2 tenen signe negatiu. Per tant, com que $x = \pm\sqrt{t}$, l'equació biquadrada no té solucions reals.

15. Els coeficients a , b i c d'una equació biquadrada verifiquen que $b^2 - 4ac = 0$. Quantes solucions reals pot tenir?

Si $b^2 - 4ac = 0$, això vol dir que l'equació associada $at^2 + bt + c = 0$ té solució doble $t = -\frac{b}{2a}$.

Aleshores:

- Si $-\frac{b}{2a} > 0$, l'equació biquadrada té dues solucions reals oposades.
- Si $-\frac{b}{2a} < 0$, l'equació biquadrada no té solucions reals.
- Si $-\frac{b}{2a} = 0$ ($b = c = 0$), l'equació biquadrada té una solució única: $x = 0$.

16. Troba la solució d'aquestes equacions:

- a) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$
b) $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}$
c) $\sqrt{2x - 1} + 2 = x$
d) $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{3x - 12} = \sqrt{5x - 16}$

a) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1 \rightarrow x - 1 = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow$
 $\rightarrow (x - 1)^2 = 25 - x^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 =$
 $= 25 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow$
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

La solució de l'equació és $x = 4$ ($x = -3$ és solució fictícia).

b) $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x} \rightarrow 36 + x = (2 + \sqrt{x})^2 \rightarrow$
 $\rightarrow 36 + x = 4 + 4\sqrt{x} + x \rightarrow$
 $\rightarrow 32 = 4\sqrt{x} \rightarrow 8 = \sqrt{x} \rightarrow x = 64$

c) $\sqrt{2x - 1} + 2 = x \rightarrow \sqrt{2x - 1} = x - 2 \rightarrow$
 $\rightarrow 2x - 1 = (x - 2)^2 \rightarrow 2x - 1 =$
 $= x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$
 $x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

La solució és $x = 5$.

d) $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{3x - 12} = \sqrt{5x - 16} \rightarrow$
 $\rightarrow (\sqrt{2x - 4} - \sqrt{3x - 12})^2 = 5x - 16 \rightarrow$
 $\rightarrow 2x - 4 - 2\sqrt{(2x - 4)(3x - 12)} + 3x - 12 =$
 $= 5x - 16 \rightarrow -2\sqrt{(2x - 4)(3x - 12)} = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow (2x - 4)(3x - 12) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \\ 3x - 12 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$

La solució és $x = 4$.

17. Resol l'equació $\sqrt[4]{x} - x = 0$.

$$\sqrt[4]{x} - x = 0 \rightarrow \sqrt[4]{x} = x \rightarrow x = x^4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - x^4 = 0 \rightarrow x(1 - x^3) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^3 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

L'equació té dues solucions: $x = 0$ i $x = 1$.

18. Resol els sistemes:

a) $\begin{cases} 4x - 5y = 8 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} = 2 \\ x - \frac{y + 1}{4} = 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 3(1 - x) = 2(y + 3) \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{4} = \frac{2}{3} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x - 2y + 5}{13} = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - 5y = 8 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x - 10y = 16 \\ 15x + 10y = -15 \end{cases}$
 $23x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{23}$

$$3 \cdot \frac{1}{23} + 2y = -3 \rightarrow 3 + 46y = -69 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -\frac{72}{46} = -\frac{36}{23}$$

$$x = \frac{1}{23}; y = -\frac{36}{23}$$

b) $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} = 2 \\ x - \frac{y + 1}{4} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 4x - y - 1 = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 4x - y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = 4x - 5 \end{cases}$$

$$2x - 6 = 4x - 5$$

$$-1 = 2x$$

$$x = -\frac{1}{2}; y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 = -7$$

$$x = -\frac{1}{2}; y = -7$$

c) $\begin{cases} 3(1 - x) = 2(y + 3) \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{4} = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 - 3x = 2y + 6 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$x = \frac{8 + 3y}{2} \rightarrow 3\left(\frac{8 + 3y}{2}\right) + 2y = -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 24 + 9y + 4y = -6 \rightarrow$$

$$\rightarrow 13y = -30 \rightarrow y = -\frac{30}{13}$$

$$x = \frac{8 + 3 \cdot \left(-\frac{30}{13}\right)}{2} = \frac{8 - \frac{90}{13}}{2} = \frac{\frac{14}{13}}{2} = \frac{7}{13}$$

$$x = \frac{7}{13}; y = -\frac{30}{13}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x-2y+5}{13} = 0 \\ 2x-y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+5 = 0 \\ 2x-y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y = -5 \\ 2x-y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x+2y &= 5 \\ 4x-2y &= -6 \\ \hline 3x &= 9 \rightarrow x = 3 \\ 2 \cdot 3 - y &= -3 \rightarrow 6 - y = -3 \rightarrow y = 9 \\ x &= 3; y = 9 \end{aligned}$$

19. Donat el sistema: $\begin{cases} 3x + 5y = -4 \\ 6x + ky + 8 = 0 \end{cases}$ determina per a quin valor de k és compatible indeterminat.

$$\begin{cases} 3x + 5y = -4 \\ 6x + ky = -8 \end{cases}$$

Perquè sigui compatible indeterminat, s'ha de verificar:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{k} = \frac{-4}{-8} \rightarrow k = 10$$

20. El sistema $\begin{cases} 2x + 7y = -3 \\ 4x + ky = -6 \end{cases}$ és compatible determinat. Quins valors pot tenir k ?

Si és compatible determinat, $\frac{2}{4} \neq \frac{7}{k}$.

Per tant, $k \neq 14$.

21. Els sistemes lineals de tres equacions amb tres incògnites es resolten de manera molt semblant als de dues equacions amb dues incògnites. Aplicant els criteris d'equivalència i els mètodes algebriks que ja coneixes, es tracta d'obtenir un sistema equivalent al que ens donen, de manera que una de les equacions segueixi tenint tres incògnites; l'altra, dues incògnites i l'altra, només una incògnita. Resol els sistemes:

$$a) \begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ 4x + 5y - 2z = 6 \\ -x + 2y + z = -2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 6 \\ 4x + 3y - z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ 4x + 5y - 2z = 6 \\ -x + 2y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ 4x + 5y - 2z = 6 \\ 5x + 2y = 5 \end{cases} \\ &\quad \begin{aligned} 4x + 5y - 2z &= 6 \\ -2x + 4y + 2z &= -4 \\ \hline 2x + 9y &= 2 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 5x + 2y = 5 \\ 2x + 9y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x - 4y = -10 \\ 10x + 45y = 10 \end{cases} \\ &\quad \begin{aligned} -10x - 4y &= -10 \\ 10x + 45y &= 10 \\ \hline 41y &= 0 \rightarrow y = 0; \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &5x + 2 \cdot 0 = 5 \rightarrow x = 1 \\ &1 - 3 \cdot 0 + 2z = -1 \rightarrow 2z = -2 \rightarrow z = -1 \\ &x = 1; y = 0; z = -1 \end{aligned}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 6 \\ 4x + 3y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 6 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 4x + 3y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x - y + z &= 6 \\ 4x + 3y - z &= -2 \\ \hline 5x + 2y &= 4 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 5x + 2y &= 4 \\ 4x + y &= 5 \\ \hline y &= 5 - 4x \end{aligned} \\ &5x + 2(5 - 4x) = 4 \Rightarrow 5x + 10 - 8x = 4 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2 \\ &y = 5 - 4 \cdot 2 = 5 - 8 = -3 \\ &2 - (-3) + z = 6 \Rightarrow 5 + z = 6 \Rightarrow z = -1 \\ &x = 2; y = -3; z = -1. \end{aligned}$$

22. El sistema $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$ es transforma

en un sistema lineal mitjançant els canvis $\frac{1}{x} = r$ i $\frac{1}{y} = t$. Una vegada resolt el sistema lineal, només cal desfer els canvis realitzats per trobar la solució del sistema original. Aplica aquest procediment per resoldre el sistema proposat.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} r + t = \frac{5}{6} \\ r - 2t = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2r - 2t &= \frac{5}{3} \\ r - 2t &= -\frac{1}{6} \\ \hline r &= \frac{3}{2} \rightarrow r = \frac{1}{2} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} + t = \frac{5}{6} \rightarrow t = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2; \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \rightarrow y = 3 \\ &x = 2; y = 3 \end{aligned}$$

23. Troba la solució dels sistemes següents:

$$a) \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x^2 - xy = -6 \\ y - x = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y^2 - x^2 = -\frac{3}{4} \\ 2xy = 1 \end{cases} \quad d) \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

$$y = 8 - x$$

$$x \cdot (8 - x) = 15 \rightarrow 8x - x^2 = 15 \rightarrow \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = 5 \rightarrow y = 3, \text{ i si } x = 3 \rightarrow y = 5$$

$$x = 5, y = 3; x = 3, y = 5.$$

$$b) \begin{cases} x^2 - xy = -6 \\ y - x = 2 \end{cases}$$

$$y = 2 + x$$

$$x^2 - x(2 + x) = -6 \rightarrow x^2 - 2x - x^2 = -6 \rightarrow$$

$$\rightarrow -2x = -6 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 5$$

$$x = 3, y = 5$$

$$c) \begin{cases} y^2 - x^2 = -\frac{3}{4} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2x}$$

$$\left(\frac{1}{2x}\right)^2 - x^2 = -\frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{4x^2} - x^2 = -\frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - 4x^4 = -3x^2 \rightarrow 4x^4 - 3x^2 - 1 = 0 \xrightarrow{x^2=t}$$

$$\xrightarrow{x^2=t} 4t^2 - 3t - 1 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8} \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Per a $t = 1 \rightarrow x = \pm 1$; per a $t = -\frac{1}{4}$, no hi ha solucions reals per a x .

$$\text{Si } x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}; \text{ si } x = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1, y = \frac{1}{2}, x = -1, y = -\frac{1}{2}$$

$$d) \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$y = 3\sqrt{3} - x$$

$$x(3\sqrt{3} - x) = 6 \rightarrow 3\sqrt{3}x - x^2 = 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$$

$$x = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 24}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2} \begin{cases} 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Si } x = 2\sqrt{3} \rightarrow y = \sqrt{3}; \text{ si } x = \sqrt{3} \rightarrow y = 2\sqrt{3}$$

$$x = 2\sqrt{3}, y = \sqrt{3}; x = \sqrt{3}, y = 2\sqrt{3}.$$

24. Comprova que el sistema següent té infinites solucions.

$$\begin{cases} (x + y)^2 - (x - y)^2 = 8 \\ 2 - xy = 0 \end{cases}$$

Determina cinc d'aquestes solucions.

Les dues equacions són equivalents, i la seva expressió més senzilla és $xy = 2$.

El que això vol dir és que qualsevol parell de nombres reals el producte dels quals sigui igual a 2 és una solució del sistema.

Resposta oberta. Per exemple:

$$x = 1, y = 2; x = 2, y = 1; x = -1, y = -2;$$

$$x = 4, y = \frac{1}{2}; x = y = \sqrt{2}$$

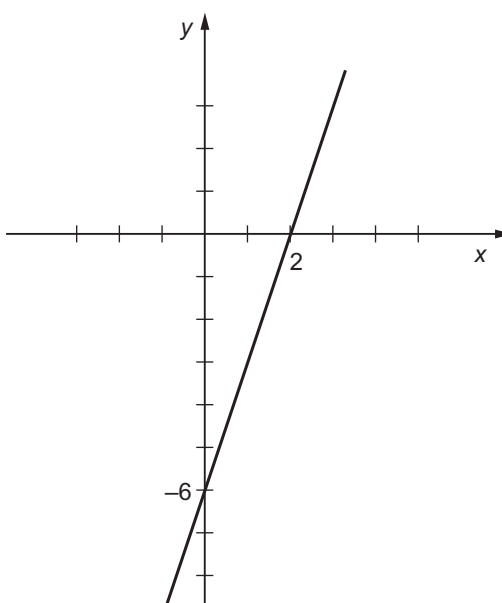
25. Representa gràficament les solucions de cadascuna de les equacions següents:

$$a) 3x - y = 6$$

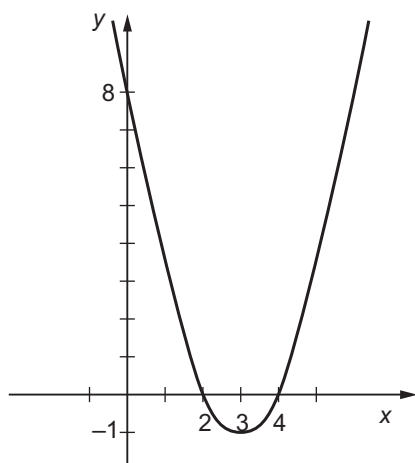
$$b) x^2 - 6x - y = -8$$

$$c) x \frac{y}{2} = 3$$

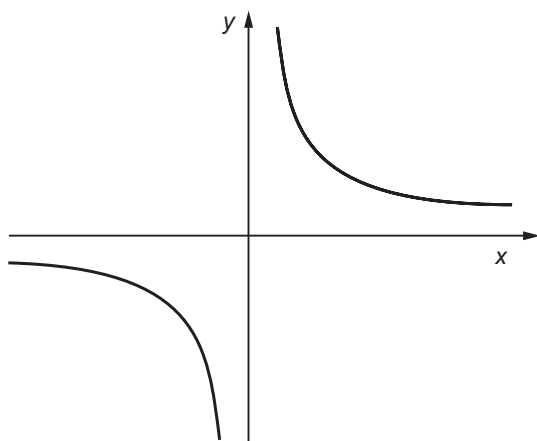
$$a) y = 3x - 6$$



b) $y = x^2 - 6x + 8$

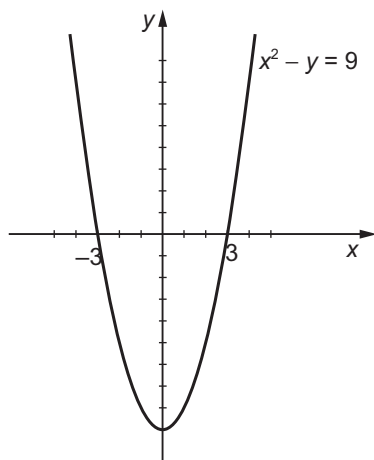


c) $xy = 6$



26. Determina gràficament les solucions de l'equació $x^2 - y = 9$. A partir de la gràfica obtinguda, indica raonadament:

- a) Els valors que pot prendre la incògnita y .
b) Les solucions de l'equació $x^2 - 9 = 0$.



a) $y \geq -9$

b) $x_1 = -3, x_2 = 3$

27. Resol gràficament els sistemes:

a) $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^2 - y = 3 \end{cases}$

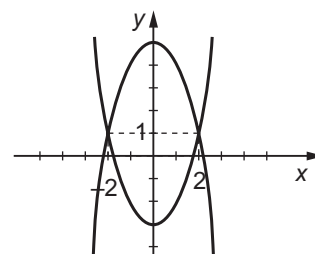
b) $\begin{cases} xy = -3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 - y = 7 \end{cases}$

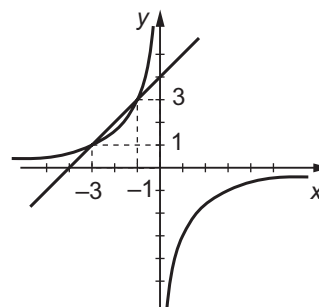
a) $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^2 - y = 3 \end{cases}$

$x_1 = 2, y_1 = 1; x_2 = -2, y_2 = 1$



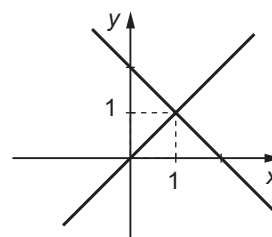
b) $\begin{cases} xy = -3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

$x_1 = -3, y_1 = 1; x_2 = -1, y_2 = 3$



c) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$

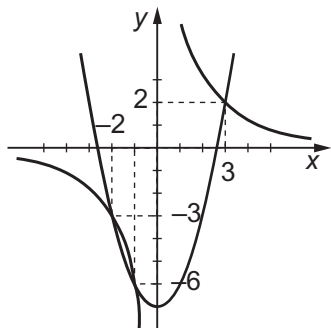
$x = y = 1$



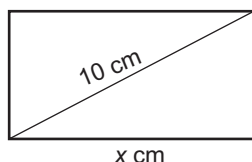
$$d) \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 - y = 7 \end{cases}$$

$$x_1 = 3, y_1 = 2; x_2 = -2, y_2 = -3;$$

$$x_3 = -1, y_3 = -6$$



28. L'àrea d'un rectangle és 48 cm^2 i la seva diagonal mesura 10 cm . Calcula la mesura del perímetre del rectangle.



$$\begin{cases} xy = 48 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

$$x = \frac{48}{y}$$

$$\left(\frac{48}{y}\right)^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{2304}{y^2} + y^2 = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2304 + y^2 = 100y^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y^4 - 100y^2 + 2304 = 0 \rightarrow \underline{y^2 = t}$$

$$\underline{y^2 = t} \rightarrow t^2 - 100t + 2304 = 0$$

$$t = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 9216}}{2} =$$

$$= \frac{100 \pm 28}{2} \begin{cases} 64 \\ 36 \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 64 \rightarrow y = \pm 8 \text{ i si } t = 36 \rightarrow y = \pm 6.$$

Com que y representa una longitud, només tenen sentit les solucions que tenen signe positiu.

$$\text{Per a } y = 8 \rightarrow x = 6, \text{ i per a } y = 6 \rightarrow x = 8$$

En qualsevol cas, les dimensions del rectangle són 8 cm i 6 cm i el seu perímetre p mesura:

$$p = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 28 \text{ cm}$$

29. En una entitat bancària s'obren dues llibretes d'estalvi els saldos de les quals sumen $8113,66 \text{ €}$. Es pacten les condicions següents: el saldo de la primera llibreta produirà un 5% d'interès simple durant 7 anys, i el de la segona, un $8,75\%$ d'interès simple durant 5 anys. Troba el valor del capital dipositat a cada llibreta sabent que totes dues produeixen els mateixos interessos.

Representem per C_1 i C_2 els saldos en euros de cada llibreta:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8113,66 \\ \frac{C_1 \cdot 5 \cdot 7}{100} = \frac{C_2 \cdot 5 \cdot 8,75}{100} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8113,66 \\ 35C_1 = 43,75C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 8113,66 \\ 7C_1 = 8,75C_2 \end{cases}$$

$$C_1 = 8113,66 - C_2$$

$$7(8113,66 - C_2) = 8,75C_2 \rightarrow 56795,62 = 15,75C_2 \rightarrow C_2 = 3606,07 \rightarrow C_1 = 4507,59$$

A la primera llibreta, $4507,59 \text{ €}$ i a la segona, $3606,07 \text{ €}$.

30. Un nombre consta de dues xifres que sumen 9 . Quan el dividim pel nombre que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 2 de quocient i 18 de residu. De quin nombre estem parlant?

Anomenem x la xifra de les desenes i y la de les unitats.

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10x + y = 2(10y + x) + 18 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 9 \\ 8x - 19y = 18 \end{cases}$$

$$x = 9 - y$$

$$8(9 - y) - 19y = 18 \rightarrow 72 - 8y - 19y = 18 \rightarrow$$

$$\rightarrow 54 = 27y \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 7$$

El nombre és 72 .

31. Un pare té 37 anys i les edats dels seus tres fills sumen 25 anys. Quants anys han de transcórrer perquè les edats dels fills sumin l'edat del pare?

Representem per x el nombre d'anys que han de transcórrer perquè es compleixin les condicions de l'enunciat:

$$37 + x = 25 + 3x \rightarrow 12 = 2x \rightarrow x = 6$$

Han de transcórrer 6 anys.

32. Dues aixetes, obertes alhora, omplen un dipòsit en 2 hores. La que raja més l'omple tota sola en 3 hores menys que l'altra. Quantes hores triga cadascuna de les aixetes a omplir el dipòsit per separat?

Suposem que l'aixeta més cabalosa omple el dipòsit en x hores; llavors, la menys cabalosa l'omple en $x + 3$ hores.

En 1 hora, la primera omple $\frac{1}{x}$ del dipòsit, i l'altra, $\frac{1}{x+3}$ del dipòsit.

Rajant totes dues, en 1 hora omplen $\frac{1}{2}$ dipòsit.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{2} \rightarrow 2(x+3) + 2x = \\ &= x(x+3) \rightarrow 2x+6+2x = x^2+3x \rightarrow \\ &\rightarrow x^2-x-6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \\ &= \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}\end{aligned}$$

Com que només té sentit la solució positiva, la primera aixeta omple el dipòsit en 3 h i l'altra ho fa en 6 h.

- 33. Un comerciant vol vendre una partida de peces de porcellana per 631,06 €. Se li trenquen 5 peces i, per compensar la pèrdua, ha de vendre cadascuna de les peces que li resten 0,6 € més cara. Quantes peces de porcellana tenia inicialment?**

Peces de porcellana que tenia inicialment: x

Preu de cadascuna d'aquestes peces: y (en €)

$$\begin{cases} x \cdot y = 631,06 \\ (x-5)(y+0,6) = 631,06 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 631,06 \\ xy + 0,6x - 5y - 3 = 631,06 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 631,06 \\ 0,6x - 5y = 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{0,6x-3}{5};$$

$$x \cdot \left(\frac{0,6x-3}{5}\right) = 631,06 \rightarrow 0,6x^2 - 3x =$$

$$= 3155,3 \rightarrow 0,6x^2 - 3x - 3155,3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+7572,72}}{1,2} \begin{cases} 75 \\ -70 \end{cases} \text{ (no té sentit)}$$

$$x = 75 \rightarrow y = 8,41$$

Inicialment tenia 75 peces de porcellana que volia vendre a 8,41 € cadascuna.

- 34. Una fracció és equivalent a $\frac{2}{3}$. Si restem 2 unitats al numerador i sumem 6 unitats al denominador, la nova fracció que obtenim és equivalent a $\frac{1}{3}$. Determina la fracció original.**

Representem per $\frac{x}{y}$ la fracció original.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{2}{3} \\ \frac{x-2}{y+6} &= \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \begin{cases} 3x = 2y \\ 3x-6 = y+6 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} 3x &= 2y \\ 3x &= y+12 \end{aligned} \right\} 2y = y+12 \rightarrow y = 12 \rightarrow x = 8$$

La funció original és $\frac{8}{12}$.

- 35. Un grup d'amics es reparteixen a parts iguals els 720 € que els han tocat a la loteria de Nadal. Esbrina quants amics componen el grup sabent que, si 3 d'ells haguessin renunciat al premi, cadascun dels restants hauria rebut 20 € més.**

Suposem que són x els amics i que a cadascun d'ells li pertocuen y €.

$$\begin{cases} xy = 720 \\ (x-3) \cdot (y+20) = 720 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 720 \\ xy + 20x - 3y - 60 = 720 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 720 \\ 20x - 3y = 60 \end{cases}$$

$$y = \frac{20x-60}{3};$$

$$x \left(\frac{20x-60}{3} \right) = 720 \rightarrow 20x^2 - 60x = 2160 \rightarrow$$

$$\rightarrow 20x^2 - 60x - 2160 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 3x - 108 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+432}}{2} = \frac{3 \pm 21}{2} \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = -9 \end{cases} \text{ (no té sentit)}$$

$$x = 12 \rightarrow y = 60$$

El grup està compost per 12 amics.

- 36. Els perímetres de dos quadrats es diferencien en 8 cm i les seves àrees, en 20 cm². Calcula la longitud del costats de cada quadrat.**

Representen per x el costat del quadrat més petit i per y el del quadrat més gran:

$$\left. \begin{array}{l} 4y - 4x = 8 \\ y^2 - x^2 = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y - x = 2 \\ y^2 - x^2 = 20 \end{array} \Rightarrow y = 2 + x$$

$$(2 + x)^2 - x^2 = 20 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 + 4x + x^2 - x^2 = 20 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x = 16 \rightarrow x = 4$$

$$x = 4, y = 6$$

El costat del quadrat petit mesura 4 cm i el del quadrat gran mesura 6 cm.

Acabem

1. Resol les equacions següents:

a) $(3x + 5)^2 - (3x - 5)^2 = \frac{5(x - 2)}{12}$

b) $9(4x + 3)(1 - x)(7x + 15) = 0$

c) $(7x + 6)^2 = 121$

d) $\frac{2x + 3}{x + 4} = x - 1$

e) $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x + 7} = 4$

f) $x^3 - 13x^2 + 42x = 0$

a) $(3x + 5)^2 - (3x - 5)^2 = \frac{5(x - 2)}{12} \rightarrow$
 $\rightarrow 9x^2 + 30x + 25 - 9x^2 + 30x - 25 = \frac{5x - 10}{12} \rightarrow$

$$\rightarrow 60x = \frac{5x - 10}{12} \rightarrow 720x = 5x - 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow 715x = -10 \rightarrow x = -\frac{2}{143}$$

b) $9(4x + 3)(1 - x)(7x + 15) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{4} \\ 1 - x = 0 \rightarrow x = 1 \\ 7x + 15 = 0 \rightarrow x = -\frac{15}{7} \end{cases}$$

c) $(7x + 6)^2 = 121 \rightarrow 7x + 6 = 0 = \pm\sqrt{121} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 7x + 6 = 11 \rightarrow x = \frac{5}{7} \\ 7x + 6 = -11 \rightarrow x = -\frac{17}{7} \end{cases}$$

d) $\frac{2x + 3}{x + 4} = x - 1 \rightarrow 2x + 3 = x^2 + 3x - 4 \rightarrow$

$$\rightarrow x^2 + x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 28}}{2} \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} \\ \frac{-1 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

e) $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x + 7} = 4 \rightarrow \sqrt{2x - 3} =$

$$= 4 - \sqrt{x + 7} \rightarrow 2x - 3 = (4 - \sqrt{x + 7})^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - 3 = 16 - 8\sqrt{x + 7} + x + 7 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 26 = -8\sqrt{x + 7} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x - 26)^2 = 64(x + 7) \rightarrow x^2 - 52x + 676 =$$

$$= 64x + 448 \rightarrow x^2 - 116x + 228 = 0$$

$$x = \frac{116 \pm \sqrt{13456 - 912}}{2} =$$

$$= \frac{116 \pm 112}{2} \begin{cases} x_1 = 114 \text{ (fictícia)} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$x = 2$$

f)

$$x^3 - 13x^2 + 42x = 0 \rightarrow x(x^2 - 13x + 42) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 - 13x + 42 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 168}}{2} = \frac{13 \pm 1}{2} \begin{cases} x_2 = 7 \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

2. Escriu:

a) Una equació de segon grau que tingui per solucions 2 i -5.

b) Una equació de tercer grau que tingui per solucions 0, -3 i 7.

a) Qualsevol equació del tipus $k(x - 2)(x + 5) = 0$, amb $k \in \mathbb{R}$ i $k \neq 0$.

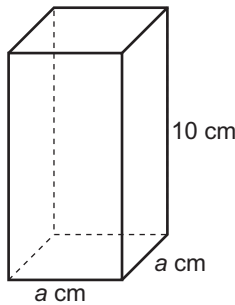
b) Qualsevol equació del tipus $kx(x + 3)(x - 7) = 0$, amb $k \in \mathbb{R}$ i $k \neq 0$.

- 3. Resol l'equació $ax + b^2 = cx$, en què x és la incògnita i a , b i c són nombres reals. En quins casos no té solució l'equació? Per què?**

$$ax + b^2 = cx \rightarrow (a - c)x = -b^2 \rightarrow x = \frac{-b^2}{a - c}$$

L'equació no té solució si $a = c$ i $b \neq 0$. Si $a = c$ i $b = 0$, qualsevol valor real de x és solució (es tractaria, en realitat, d'una identitat). Sempre que $a \neq c$ la solució és única.

4. Calcula el volum d'un prisma quadrangular regular de 10 cm d'altura i 250 cm² d'àrea total.



$$A_{\text{total}} = 2a^2 + 40a = 250$$

$$2a^2 + 40a - 250 = 0 \rightarrow a^2 + 20a - 125 = 0$$

$$a = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 500}}{2} =$$

$$= \frac{-20 \pm 30}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -25 \text{ (no té sentit)} \end{cases}$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$V = 5^2 \cdot 10 = 250 \text{ cm}^3$$

5. Per a quins valors de c no té solucions reals l'equació $x^2 - 8x + c = 0$?

$$x^2 - 8x + c = 0 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4c}}{2}$$

L'equació no té solució si:

$$64 - 4c < 0 \rightarrow 64 < 4c \rightarrow c > 16$$

6. La recta que resulta de representar gràficament la funció $y = mx + n$ passa pels punts $(2, 1)$ i $(-3, -14)$. Determina m i n .

$$y = mx + n \begin{cases} \begin{matrix} (2, 1) \\ (-3, -14) \end{matrix} \end{cases} \begin{cases} 1 = 2m + n \\ -14 = -3m + n \end{cases}$$

$$1 = 2m + n$$

$$14 = 3m - n$$

$$15 = 5m \rightarrow m = 3 \rightarrow n = -5$$

L'equació de la recta és $y = 3x - 5$.

7. Resol al·gèbricament els sistemes:

$$a) \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = 2(11 - y) \\ y = 5(x - 5) + 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} xy = 15 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x-y}{7} = 0 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$y = (y^2)^2 \rightarrow y = y^4 \rightarrow y - y^4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y(1 - y^3) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ 1 - y^3 = 0 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } y = 0 \rightarrow x = 0; \text{ si } y = 1 \rightarrow x = 1$$

$$x = 0, y = 0; x = 1, y = 1$$

$$b) \begin{cases} x = 2(11 - y) \\ y = 5(x - 5) + 3 \end{cases} \begin{cases} x = 22 - 2y \\ y = 5x - 22 \end{cases}$$

$$x = 22 - 2(5x - 22) \rightarrow x = 22 - 10x + 44 \rightarrow$$

$$\rightarrow 11x = 66 \rightarrow x = 6 \rightarrow y = 8$$

$$x = 6, y = 8$$

$$c) \begin{cases} xy = 15 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 2 \end{cases} \begin{cases} xy = 15 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases}$$

$$x = \frac{15}{y}$$

$$\frac{45}{y} + 5y = 30 \rightarrow 45 + 5y^2 = 30y \rightarrow$$

$$\rightarrow 5y^2 - 30y + 45 = 0 \rightarrow y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

$$y = 3 \rightarrow x = 5$$

$$x = 5, y = 3$$

$$d) \begin{cases} \frac{x-y}{7} = 0 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases} \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$$

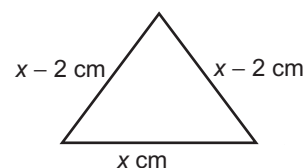
$$x = y$$

$$x^2 + x^2 = 32 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

$$\text{Per a } x = 4 \rightarrow y = 4 \text{ i per } x = -4, y = -4$$

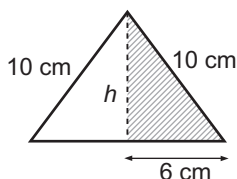
$$x = y = 4, x = y = -4$$

8. El perímetre d'un triangle isòsceles mesura 32 cm i cadascun dels costats iguals mesura 2 cm menys que el costat desigual. Calcula l'àrea d'aquest triangle.



$$x + 2(x - 2) = 32 \rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = 12$$

El costat desigual del triangle isòsceles mesura 12 cm, i cadascun dels costats iguals, 10 cm.



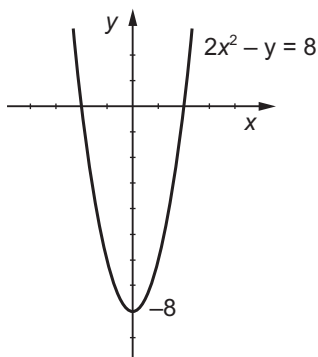
Calculem l'altura h del triangle:

$$h^2 + 6^2 = 10^2$$

$$h = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

$$A = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

9. Representa gràficament les solucions de l'equació $2x^2 - y = 8$.



10. L'equació $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ és de sisè grau. No obstant això, la podem transformar en una equació de segon grau mitjançant el canvi $x^3 = t$. Resol-la.

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \xrightarrow{x^3 = t} t^2 - 9t + 8 = 0$$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} \begin{cases} t_1 = 8 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 8, x = \sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{8} = 2, \text{ i si } t = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$x = 2, x = 1$$

11. Un comerciant compra dos rellotges per 81,14 € i els ven per 83,84 €. Calcula quant va pagar per cada rellotge si en la venda del primer hi va guanyar el 10% i en la del segon hi va perdre el 5%.

Anomenem x el preu en euros del primer rellotge i y el del segon.

$$\begin{cases} x + y = 81,14 \\ 1,1x + 0,95y = 83,84 \end{cases}$$

$$x = 81,14 - y$$

$$1,1(81,14 - y) + 0,95y = 83,84 \rightarrow$$

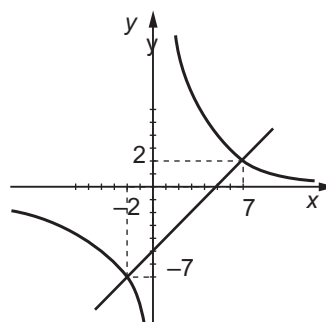
$$\rightarrow y = 36,09 \rightarrow x = 45,05$$

Pel primer rellotge va pagar 45,05 € i pel segon, 36,09 €.

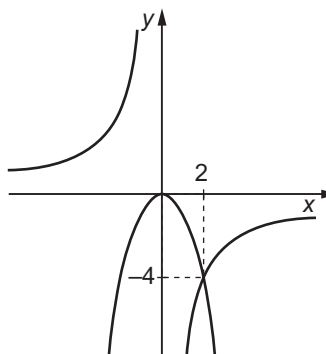
12. Determina gràficament la solució dels sistemes:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} xy = 14 \\ x - y = 5 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} xy = -8 \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

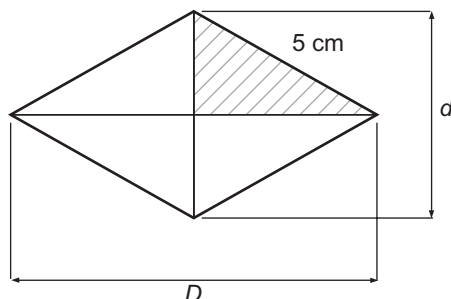
$$\text{a) } x = -7; y = 2; x = -2, y = -7$$



$$\text{b) } x = 2; y = -4$$



13. Calcula les longituds de les diagonals d'un rombe sabent que el seu costat mesura 5 cm i la seva àrea, 24 cm².



$$\begin{cases} \frac{D \cdot d}{2} = 24 \\ \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 5^2 \end{cases} \begin{cases} D \cdot d = 48 \\ D^2 + d^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow D = \frac{48}{d}$$

$$\left(\frac{48}{d}\right)^2 + d^2 = 100 \rightarrow 2304 + d^4 = 100d^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow d^4 - 100d^2 + 2304 = 0 \xrightarrow{d^2=t}$$

$$\xrightarrow{d^2=t} t^2 - 100t + 2304 = 0$$

$$t = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 9216}}{2} = \frac{100 \pm 28}{2} \begin{cases} t_1 = 64 \\ t_2 = 36 \end{cases}$$

Si $t = 64 \rightarrow d = \pm 8$ (només té sentit la solució positiva).

Si $t = 36 \rightarrow d = \pm 6$ (només té sentit la solució positiva).

$$d = 8 \rightarrow D = 6 \quad i \quad d = 6 \rightarrow D = 8$$

Les diagonals del rombe mesuren 8 cm i 6 cm.

- 14. Un amic li diu a un altre: «Jo tinc el doble de l'edat que tu tenies quan jo tenia l'edat que tu tens. A més, quan tu tinguis l'edat que jo tinc, les nostres edats sumaran 63 anys.» Calcula l'edat de cadascun dels amics.**

Edat de l'amic que parla: x anys.

Edat de l'amic que escolta: y anys

$$\begin{cases} x = 2[y - (x - y)] \\ x + x + x - y = 63 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 4y \\ 3x - y = 63 \end{cases} \rightarrow 4y - y = 63 \rightarrow$$

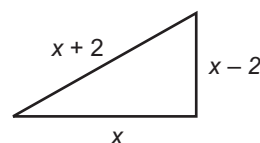
$$\rightarrow y = 21 \rightarrow x = 28$$

L'amic que parla té 28 anys, i el que escolta en té 21.

- 15. Explica per què aquesta afirmació és certa: «Resoldre l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ és equivalent a trobar les antiimatges de zero per la funció $y = ax^2 + bx + c$. En conseqüència, si l'equació no té solució, la gràfica de la funció no talla l'eix de les abscisses.»**

Per trobar les antiimatges de 0 per a la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$ hem de determinar els valors de x que fan que $y = 0$, és a dir, s'ha de verificar la igualtat $ax^2 + bx + c = 0$. Naturalment, si l'equació no té solució real, no hi ha cap valor de x per al qual $f(x) = 0$, o el que és el mateix, la gràfica de la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$ no talla l'eix de les abscisses.

- 16. Les longituds dels costats d'un triangle rectangle s'expressen en la mateixa unitat mitjançant tres nombres parells consecutius. Calcula el perímetre i l'àrea d'aquest triangle.**



$$(x+2)^2 = x^2 + (x-2)^2 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 - 4x + 4 \rightarrow$$

$$= x^2 + x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - 8x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (no té sentit)} \\ x = 8 \end{cases}$$

$$p = 24 \text{ m}; A = 24 \text{ m}^2$$

- 17. Determina en quina proporció hem de mesclar cafè de 4,51 €/kg amb cafè de 3,61 €/kg per tal que quan venguem la mescla a 4,71 €/kg obtinguem uns beneficis del 12 % en relació amb el preu de cost.**

x : nombre de quilograms del cafè més car (A)

y : nombre de quilograms del cafè més barat (B)

$$1,12(4,51x + 3,61y) = 4,71(x + y) \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,34x = 0,68y \rightarrow x = 2y$$

Per cada quilogram de cafè del tipus B cal posar-n'hi dos del tipus A .

$$\text{Proporció: } \frac{x}{y} = 2$$

- 18. Calcula la longitud de l'aresta d'un cub sabent que, si s'augmenta 2 cm, el volum del cub augmenta 98 cm³.**

Aresta del petit: x cm

Aresta del cub gran: $x + 2$ cm

$$(x+2)^3 - x^3 = 98 \rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 =$$

$$= 98 \rightarrow 6x^2 + 12x - 90 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{cases} 3 \\ -5 \text{ (no té sentit)} \end{cases}$$

L'aresta del cub mesura 3 cm.