

Diferents equacions d'una recta

Donats dos plans, es tracta d'escriure les diferents equacions de la recta determinada pels dos plans $\pi_1 : x + 2y - z = 1$ i $\pi_2 : x - y + 2z = -2$, si s'escau

Aquests plans determinen una recta, de **equacions implícites** $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$, si el sistema format per les dues equacions amb tres incògnites és compatible indeterminat i de rang 2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ els dos plans determinen una recta ja que el rang (M) = rang(M') = 2 (M i M' són la matriu del sistema i la matriu ampliada respectivament)

En la matriu esglaonada senyalem el menor d'ordre 2 que dóna el rang $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Per calcular l'equació paramètrica de la recta, n'hi ha prou amb trobar les solucions de la matriu anterior (podem fer Jordan):

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -1 - z \\ y = 1 + z \end{cases}$ (les incògnites principals són x i y i el

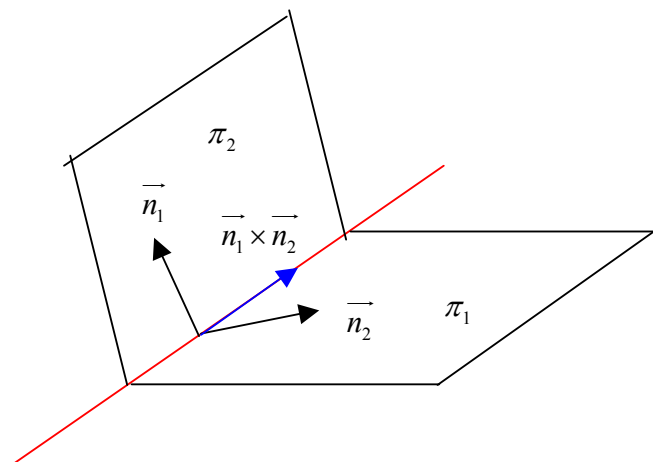
paràmetre és z), i per tant l'**equació paramètrica** és: $\begin{cases} x = -1 - z \\ y = 1 + z \\ z = z \end{cases}$ o sigui, $\begin{cases} x = -1 - k \\ y = 1 + k \\ z = k \end{cases}$

De la equació paramètrica podem treure que la recta passa pel punt (-1,1,0) i té vector director el vector (-1,1,1) i per tant l'**equació vectorial** és:
 $(x, y, z) = (-1, 1, 0) + k \cdot (-1, 1, 1)$.

L'**equació contínua** de la recta serà: $\frac{x+1}{-1} = y-1 = z$

Observació: es pot obtenir un **vector director** de la recta com a producte vectorial dels vectors normals als plans π_1 i π_2 , o sigui (observeu la figura):

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 2, -1) \times (1, -1, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -3, -3) = -3 \cdot (-1, 1, 1)$$



Diferents equacions d'un pla

Donat un pla d'equació general $\pi_1 : x + 2y - z = 1$, es tracta d'escriure les diferents equacions del pla.

L'**equació implícita** d'aquest pla, $\pi_1 : x + 2y - z = 1$, consisteix en un sistema format per una equació amb tres incògnites i és compatible indeterminat i de rang 1

En la matriu esglaonada senyalem el menor d'ordre 1 que dona el rang 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Per calcular l'equació paramètrica del pla, n'hi ha prou amb trobar les solucions de l'equació anterior (la incògnita principal és x i els paràmetres són y i z), o sigui, $x = 1 - 2y + z$

i per tant l'**equació paramètrica** és:

$$\begin{cases} x = 1 - 2y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

De la equació paramètrica podem treure que el pla passa pel punt $(1,0,0)$ i té vectors directores els vectors $(-2,1,0)$ i $(1,0,1)$, i per tant l'**equació vectorial** és:

$$(x, y, z) = (1,0,0) + \alpha \cdot (-2,1,0) + \beta \cdot (1,0,1).$$

De nou obtenim l'**equació general o implícita**:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1) + 2y - z = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z = 1$$

Equació contínua d'una recta amb vector director de components zeros

Exemple 1

Si l'equació paramètrica d'una recta és $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + k \\ z = 2 + 3k \end{cases}$,

podem treure que la recta passa pel punt (-1, 1,2) i té vector director el vector (0,1,3)

Obtindrem l'equació contínua de la recta aïllant k en totes les equacions i igualant els resultats.

De la primera equació no podem aïllar k i en les altres tindrem : $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ k = y - 1 \Rightarrow \\ k = \frac{z - 2}{3} \end{cases}$

L'equació contínua serà: $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 1 = \frac{z - 2}{3} \end{cases}$ que sembla una equació implícita de la recta.

Exemple 2

Si l'equació implícita d'una recta és $\begin{cases} x = -1 \\ z = 2 \end{cases}$, l'equació paramètrica és

$\begin{cases} x = -1 \\ y = k \\ z = 2 \end{cases}$ i podem treure que la recta passa pel punt (-1, 0,2) i té vector director el vector

(0,1,0) (ja que y és el paràmetre).

Obtindrem l'equació contínua de la recta aïllant k en totes les equacions i igualant els resultats.

En la primera i en la tercera equació no podem aïllar k i en la segona tindrem :

$\begin{cases} x = -1 \\ k = y \Rightarrow \\ z = 2 \end{cases}$

L'equació contínua serà $\begin{cases} x = -1 \\ z = 2 \end{cases}$ que coincideix amb la implícita.