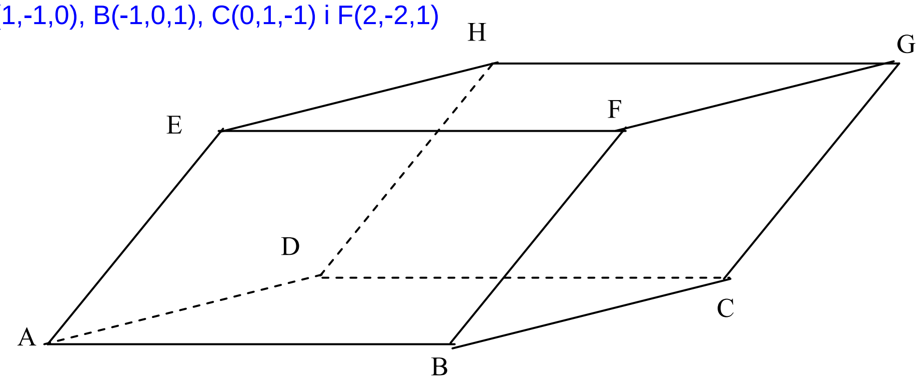
Exercici 1: Sigui el paral·lelepípede ABCDEFGFG de la figura, on coneixem els vèrtex A (1,-1,0), B(-1,0,1), C(0,1,-1) i F(2,-2,1)



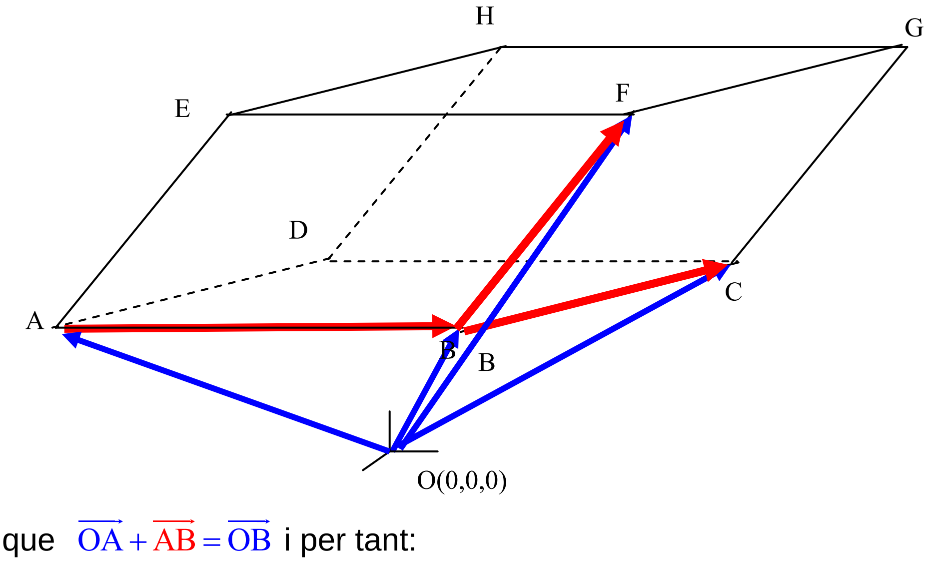

Es demana:

1. Calcular els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BF}$
2. Calcular els punts D i H
3. Calcular els vectors $\overrightarrow{BH}$ i $\overrightarrow{CE}$
4. Calcula i representa $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$

Solució:

1. Calcular els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BF}$

Situem l'origen de coordenades O(0,0,0):
Llavors el vectors amb origen en l'origen de coordenades té les mateixes components que el punt extrem del vector




Tenim que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ i per tant:

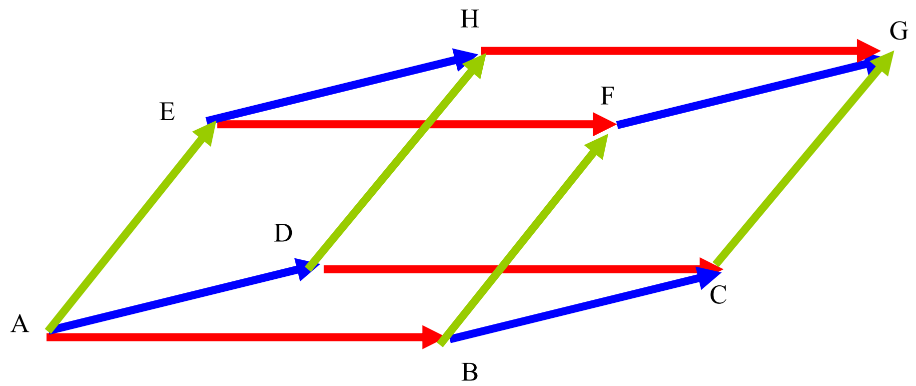
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\text{extrem}-\text{origen}=(-1,0,1)-(1,-1,0)=(-2,1,1)$$

De la mateixa manera:

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(0,1,-1)-(-1,0,1)=(1,1,-2)$$

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}=(2,-2,1)-(-1,0,1)=(3,-2,0)$$

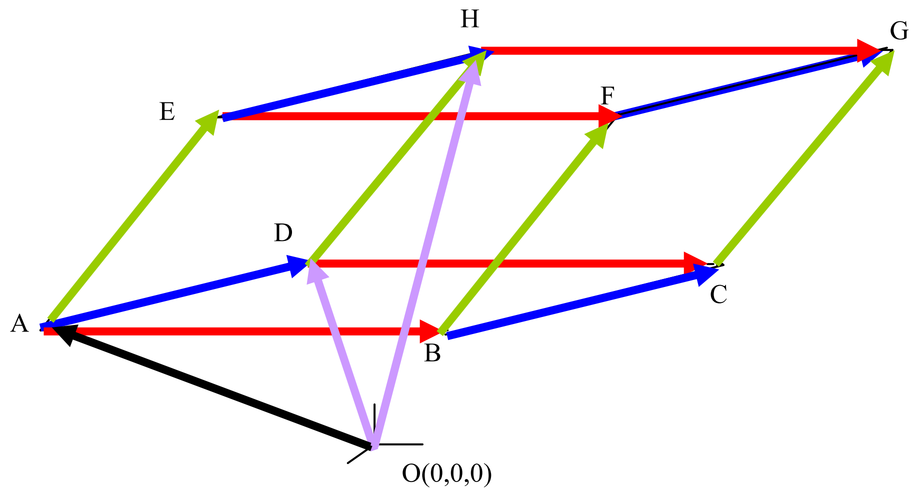
2. Calcular els punts D i H




Per fer aquest apartat hem de tenir en compte que treballem amb vectors lliures i que el paral·lepípede està format per arestes paral·leles.

Per tant:

$$\begin{cases} \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1,0,1) - (1,-1,0) = (-2,1,1) \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (0,1,-1) - (-1,0,1) = (1,1,-2) \\ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = (2,-2,1) - (-1,0,1) = (3,-2,0) \end{cases}$$



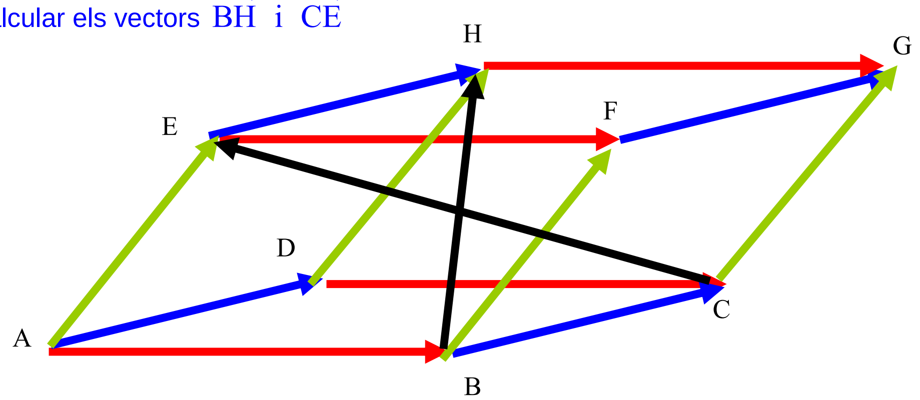

El punt D té les mateixes coordenades que el vector $\overrightarrow{OD}$ i per tant:

$$D \equiv \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = (1,-1,0) + (1,1,-2) = (2,0,-2)$$

De la mateixa manera:

$$H \equiv \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} = (1,-1,0) + (1,1,-2) + (3,-2,0) = (5,-2,-2)$$

3. Calcular els vectors $\overrightarrow{BH}$ i $\overrightarrow{CE}$

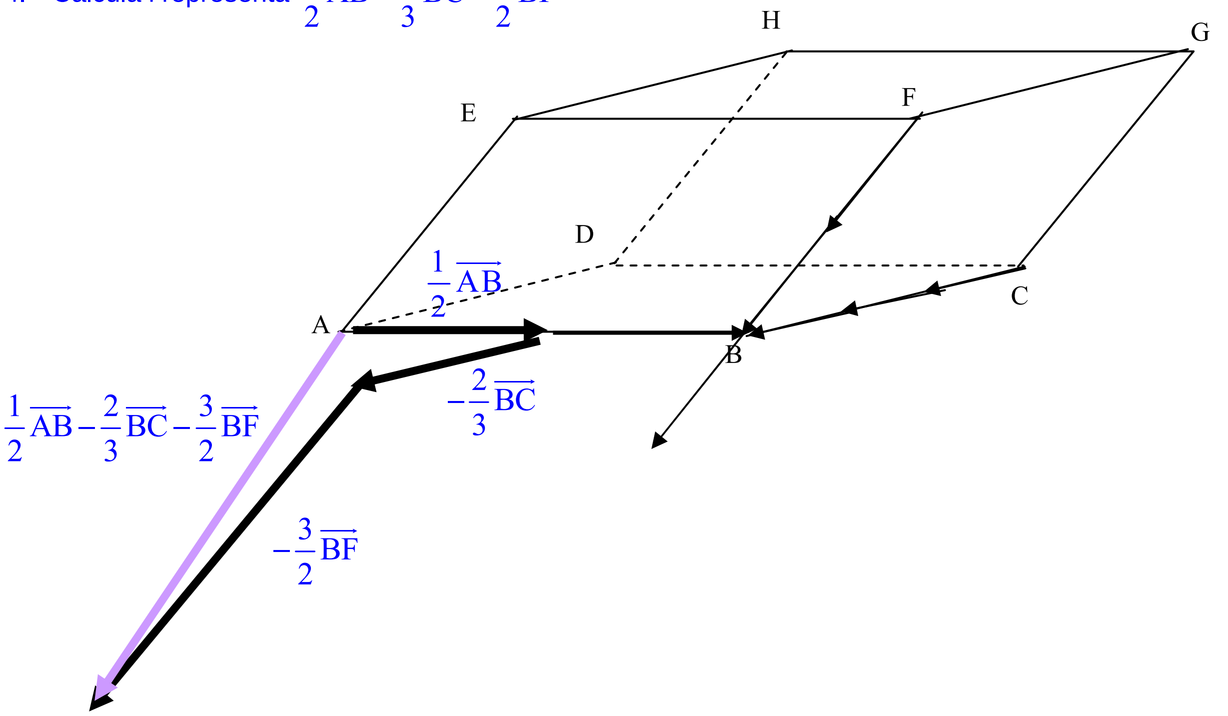



Com que coneixem tots els vectors arestes del paral·lelepípede, es tracta de explicitar el vector, que volem calcular, com a combinació lineal dels coneguts

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = (3,-2,0) + (1,1,-2) - (-2,1,1) = (6,-2,-3)$$

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} = -(-2,1,1) - (1,1,-2) + (3,-2,0) = (4,-4,1)$$

4. Calcula i representa $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$




$$\text{Resultat} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(-2,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,-2) - \frac{3}{2}(3,-2,0) =$$

$$(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + (-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}) + (-\frac{9}{2},3,0) = (-1-\frac{2}{3}-\frac{9}{2},\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+3,\frac{1}{2}+\frac{4}{3}) = (-\frac{37}{6},\frac{17}{6},\frac{11}{6})$$

## Rang d'un conjunt de vectors i independència lineal de vectors

Exercici 2: Trobeu el rang $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{s}\}$ i indiqueu un subconjunt de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{s}\}$ format pel màxim nombre de vectors linealment independents essent:
$\vec{u}$ = (2, -5, 3), $\vec{v}$ = (3, 2, 2), $\vec{w}$ = (4, 1, 4) i $\vec{s}$ = (-1, 6, 2)

En la matriu, A, formada pels components dels vectors u, v, w i s col·locats horitzontalment fem operacions de files (esglaonem la matriu):

$$\begin{array}{r} u\rightarrow \\ v\rightarrow \\ w\rightarrow \\ s\rightarrow \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{r} u\rightarrow \\ 2v-3u\rightarrow \\ w-2u\rightarrow \\ 2s+u\rightarrow \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 19 & -5 \\ 0 & 11 & -2 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{r} u\rightarrow \\ 2v-3u\rightarrow \\ 19(w-2u)-11(2v-3u)\rightarrow \\ 19(2s+u)-7(2v-3u)\rightarrow \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 19 & -5 \\ 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 168 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} u\rightarrow \\ 2v-3u\rightarrow \\ 19w-5u-22v\rightarrow \\ 17(38s+40u-14v)-168(19w-5u-22v)\rightarrow \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 19 & -5 \\ 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aleshores el màxim nombre de vectors linealment independents són tres i per tant rang(A) = rang$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{s}\}$ = 3

Un subconjunt de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{s}\}$ que tingui el màxim nombre de vectors linealment independents és $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, ja que, quan esglaonem la matriu, són les files que resten diferents de zero.

Nota: de la expressió de la última fila podem extreure la relació de dependència lineal del vector $\vec{s}$ de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$:

$$\cancel{2}\cdot 17(19s+20u-7v)-\cancel{2}\cdot 84(19w-5u-22v)=\vec{0} \quad\Rightarrow$$

$$323s+340u-119v-1596w+420u+1848v=\vec{0} \quad\Rightarrow$$

$$323s+760u+1729v-1596w=\vec{0} \quad\Rightarrow$$

$$s=-\frac{760}{323}u-\frac{1729}{323}v+\frac{1596}{323}w=-\frac{40}{17}u-\frac{91}{17}v+\frac{84}{17}w$$

Exercici 3: Donats els vectors $\vec{u}$ = (1, 2 ) i $\vec{v}$ = (–3, 1):
Comproveu que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ formen una base de l'espai vectorial dels vectors del pla i trobeu els components del vector $\vec{w}$ = (–1, 5) en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Un conjunt de vectors de $R^2$ són base quan
- són linealment independents, i
- formen un sistema de generadors.

Si el nombre de vectors coincideix amb la dimensió de l'espai, com en aquest cas, només cal comprovar una d'aquestes condicions.
Aquí, $\vec{u}$ =(1,2) i $\vec{v}$ =(-3,1) són linealment independents perquè la matriu té rang 2 que es pot veure o bé reduint-la per Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$ : el rang és 2

o bé perquè el determinant format per tots dos vectors és diferent de zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7:$$ el rang és 2

Per trobar les components del vector $\vec{w} = (-1, 5)$ , hem de trobar x i y tal

$$\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} \Rightarrow (-1,5) = x(1,2) + y(-3,1) \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Com que el sistema és compatible determinat (el determinant del sistema és 7, podem aplicar la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{14}{7} = 2 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

Per tant (2, 1) són les components del vector $\vec{w}$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$

Exercici 4: Raoneu per què els vectors u=(2,k,3), v =(3,-2,k) i w=(1,1,-1) són linealment independents per a qualsevol valor de k

Els vectors **u**=(2,k,3), **v**=(3,-2,k) i **w**=(1,1,-1) són linealment independents si i només si el rang d'aquests tres vectors és 3.
Podem veure que el seu rang és tres:

- Mitjançant Gauss

$$\begin{pmatrix} 2 & k & 3 \\ 3 & -2 & k \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2f_2 - 3f_1 \\ 2f_3 - f_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 2 & k & 3 \\ 0 & -4-3k & 2k-9 \\ 0 & 2-k & -5 \end{pmatrix} (-4-3k)f_3 - (2-k)f_2 \begin{pmatrix} 2 & k & 3 \\ 0 & -4-3k & 2k-9 \\ 0 & 0 & k^2+k+19 \end{pmatrix}$$

Com que $k^2 + k + 19 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-76}}{2} \notin R$ , el rang sempre serà tres per a qualsevol valor de k

- Calculant el determinat d'ordre tres format pels tres vectors

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & k & 3 \\ 3 & -2 & k \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 9 + k^2 + 6 - 2k + 3k \Rightarrow k^2 + k + 19 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1-76}}{2} \notin R$$

Aquest determinant mai s'anul·la i, per tant, **u**, **v** i **w** són linealment independents per a qualsevol valor de k.

Exercici 5: Donats els vectors $\vec{u_1}$ = (1, 2, 0) , $\vec{u_2}$ = (–3, 1, 0) i $\vec{u_3}$ = (0, 1, –1):

Comproveu que { $\vec{u_1}$ , $\vec{u_2}$ , $\vec{u_3}$ } formen una base de l'espai vectorial dels vectors de l'espai

Un conjunt de vectors { $\vec{u_1}$ , $\vec{u_2}$ , $\vec{u_3}$ }de $R^3$ són base quan

- són linealment independents, i
- formen un sistema de generadors.

Si el nombre de vectors coincideix amb la dimensió de l'espai, com en aquest cas, només cal comprovar una d'aquestes condicions.

Per comprovar que $\vec{u_1}$ = (1, 2, 0) , $\vec{u_2}$ = (–3, 1, 0) i $\vec{u_3}$ = (0, 1, –1) són linealment independents:

- reduïm la matriu formada pels tres vectors aplicant Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} f_2 \to f_2 + 3f_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} f_1 \to 7f_3 - f_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

: el rang és 3 i per tant són linealment independents

- o bé, comprovem si el determinant format pels tres vectors és diferent de zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

: el rang és 3 ja que és diferent de zero

i trobeu els components del vector $\vec{w}$ = (–1, 6 ,–1) en la base { $\vec{u_1}$ , $\vec{u_2}$ , $\vec{u_3}$ }

Per trobar les components del vector $\vec{w}$ = (–1, 6,–1) en la base { $\vec{u_1}$ , $\vec{u_2}$ , $\vec{u_3}$ }.
hem de trobar x , y *i z* tals que

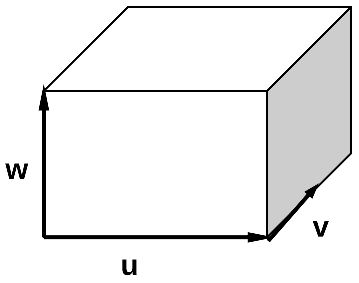
$$\vec{w} = x \cdot \vec{u_1} + y \cdot \vec{u_2} + z \cdot \vec{u_3} \Rightarrow x(1,2,0) + y(-3,1,0) + z(0,1,-1) = (-1,6,-1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ -z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \to f_2 - 2f_1 \\ f_3 \to -f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \to f_2 - f_3 \\ f_3 \to -f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} f_1 \to f_1 + 3f_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

: les components són $(2,1,1)$, o sigui: $(-1,6,-1) = 2 \cdot (1,2,0) + 1 \cdot (-3,1,0) + 1 \cdot (0,1,-1)$

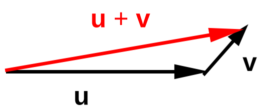
Exercici 6: Siguin $\vec{u}=(0,4,0)$, $\vec{v}=(-2,0,0)$ $i$ $\vec{w}=(0,0,3)$ els vectors representats en la figura.
Calculeu i representeu gràficament




a) $\vec{u}+\vec{v}$

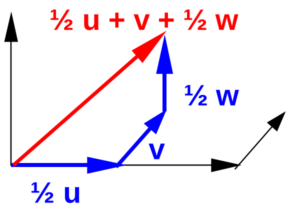
b) $\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

**a)** $\vec{u}+\vec{v}$



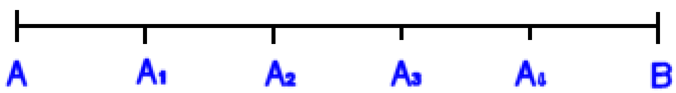

$$\vec{u}+\vec{v}=(0,4,0)+(-2,0,0)=(-2,4,0)$$

**b)** $\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

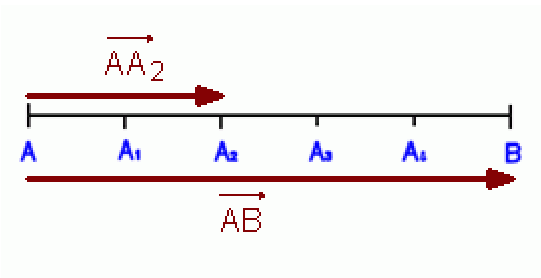



$$\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}=$$
$$\frac{1}{2}(0,4,0)+(-2,0,0)+\frac{1}{2}(0,0,3)=$$
$$\left(-2\,,2\,,\frac{3}{2}\right)$$

Exercici 7: a) Un segment d'origen en el punt A(-1,4, -2) i extrem en el punt B està dividit en cinc parts iguals mitjançant els punts de divisió $A_1$, $A_2$, $A_3$, i $A_4$ (vegeu la figura). Si les coordenades de $A_2$ són (1,0,2), quines són les coordenades de B?




Cal observar que el vector $\overrightarrow{AA_2}=(1,0,2)-(-1,4,-2)=(2,-4,4)$ "ha de ser les dues cinquenes parts" del vector $\overrightarrow{AB}=(b_1,b_2,b_3)-(-1,4,-2)=(b_1+1,\ b_2-4,\ b_3+2)$.



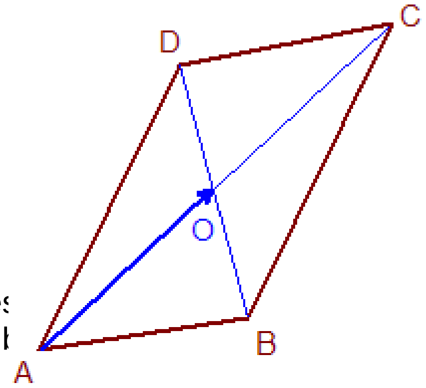
Dit amb més precisió, s'ha de complir

$$\overrightarrow{AA_2} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \;\Rightarrow\; (2,-4,4) = \frac{2}{5}(b_1+1,\, b_2-4,\, b_3+2) \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2 = \frac{2}{5}b_1 + \frac{2}{5} \;\Rightarrow\; b_1 = 4 \\ -4 = \frac{2}{5}b_2 - \frac{8}{5} \;\Rightarrow\; b_2 = -6 \\ 4 = \frac{2}{5}b_3 + \frac{4}{5} \;\Rightarrow\; b_1 = 8 \end{cases}$$

i B = (4,-6,8) (**Nota:** També es pot plantejar i resoldre a partir de $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AA_2}$ ).

Exercici 7: b) Els punts A( 2, 3, 4), B(-2, 1, 5) i C( 4, 1, -2) són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram ABCD. Trobeu les coordenades del centre O del paral·lelogram, el simètric d' A respecte de B i el simètric d' E(6,8,0), respecte del punt O.

Nota: Donats tres punts M, N i P, es diu que M i P són simètrics respecte de N si i només si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$ .




Convé dibuixar el paral·lelogram i allò que es demana (per exemple, el centre), fixant-s'hi especialment en quins vèrtexs han de ser consecutius. En no fer-lo així, quan es plantegen equipol·lències de vectors o altres qüestions sobre la seva posició, es corre el perill de prendre els extrems dels vectors en l'ordre incorrecte. Dit això,

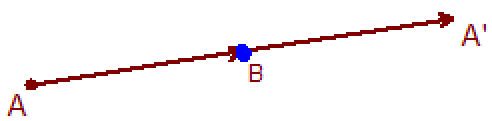
- El centre O = ($m_1$ , $m_2$ , $m_3$) és el punt mig de les paral·lelogram. Amb les dades que tenim és preferible l diagonal AC. Podem trobar-lo plantejant

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \;\Rightarrow\; (m_1-2,\, m_2-3,\, m_3-4) = \frac{1}{2}(4-2,\, 1-3,\, -2-4) \;\Rightarrow\; \begin{cases} m_1 = 2+1 = 3 \\ m_2 = 3-1 = 2 \\ m_3 = 4-3 = 1 \end{cases}$$

o bé plantejant que $O = \frac{1}{2}(A+C) = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (3,2,1)$

- El simètric de A respecte de B pot ser considerat com
  el punt A' = ($x$, $y$, $z$) tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'}$
  o també com un punt A' tal que B és el punt mig del segment AA'

  i de qualsevol de les dues maneres es pot plantejar la forma de trobar-lo.




Fet de la primera manera,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'} \;\Rightarrow\; (-2-2,\, 1-3,\, 5-4) = (x+2,\, y-1,\, z-5) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -4-2 = -6 \\ y = -2+1 = -1 \\ z = \;\; 1+5 = \;\; 6 \end{cases}$$

(Ara, si voleu, comproveu que $B = \frac{1}{2}(A+A') = \left(\frac{2-6}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (-2,1,5)$)

- Trobar el simètric de E respecte del centre O també es pot plantejar de qualsevol de les dues maneres dites abans. Plantejat de la segona manera és

$$O=\frac{1}{2}(E+E') \Rightarrow (3,2,1)=\left(\frac{6+x}{2},\frac{8+y}{2},\frac{0+z}{2}\right) \Rightarrow E'=(x,y,z)=(2\cdot 3-6,\ 2\cdot 2-8,\ 2\cdot 1)=(0,-4,2)$$

Exercici 8: a) Determineu un vector unitari que sigui paral·lel a $\vec{v}$ = (2,6,-3) i un vector unitari que sigui perpendicular a $\vec{u}$ = (3,2,-1)

Un vector unitari amb la mateixa direcció i sentit que $\vec{v}$ és $\vec{v}'=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Calculem:

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+6^2+(-3)^2}=\sqrt{4+36+9}=\sqrt{49}=7 \Rightarrow \vec{v}'=\frac{1}{7}(2,6,-3)=\left(\frac{2}{7},\frac{6}{7},\frac{-3}{7}\right)$$

D'altra banda, si $\vec{u}$ = (3,2, -l), un vector perpendicular a $\vec{u}$ es $\vec{u}'$ = (-2, 3, 0),ja que $\vec{u}\cdot\vec{u}'=0$. Perquè sigui unitari, n'hi ha prou de dividir $\vec{u}'$ pel seu mòdul:

Calculem: $\|\vec{u}'\|=\|(-2,3,0)\|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

Un vector unitari perpendicular a $\vec{u}$ és: $\frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3,0)=\left(\frac{-2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}},0\right)$.

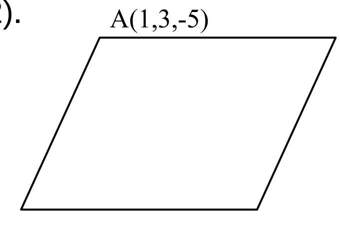
Exercici 8: b) Trobeu el valor de k perquè $\vec{u}$ = (1, k, 2k) tingui mòdul 9

Podem expressar el mòdul d' $\vec{u}$ en funció de k:

$$\|\vec{u}'\|=\sqrt{1+k^2+4k^2}=\sqrt{1+5k^2}=9 \Rightarrow 1+5k^2=81 \Rightarrow 5k^2=80 \Rightarrow k^2=16 \Rightarrow k=\pm\ 4$$

Exercici 9:Sabent que A(1,3,-5), B(7,2,-1) i C(3,-3,1) són els vèrtex consecutius d'un paral·lelogram, trobeu l'àrea del paral·lelogram ABCD, l'àrea del triangle ABC i la mínima distància del punt A al segment BC (altura del paral·lelogram ABCD, considerant el segment BC com a base)

$\overrightarrow{BA}$ = (1-7,3-2,-5+1)=(-6,1,-4) i $\overrightarrow{BC}$ = (3-7,-3-2,1+1) = (-4,-5,2).




L'àrea del paral·lelogram ABCD és el mòdul del producte vectorial dels vectors $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & 1 & -4 \\ -4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = (-18,28,34)$ i l'àrea val:

$$\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-18)^2+28^2+34^2}=\sqrt{324+784+1156}=\sqrt{2264}=47{,}58\ \text{u}^2$$

D'altra banda, com que la diagonal AC divideix el paral·lelogram en dues meitats iguals, l'àrea del triangle ABC és la meitat de la del paral·lelogram: 23,79 u$^2$.

Calculem l'altura com a relació entre l'àrea del paral·lelogram i la base

$$\text{altura}=\frac{\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}=\frac{47{,}58}{\sqrt{16+25+4}}=\frac{47{,}58}{6{,}70}=7{,}10\ \text{u}$$

Exercici 10: Calcula el vector projecció del vector $u=(1,-1,1)$ sobre el pla que conté els vectors $v_1=(1,0,1)$ i $v2=(0,1,-1)$ de $R^3$ .

**1a forma:**

Calculem el vector w perpendicular a $v_1$ i $v_2$: $w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,1)$ (figura 1)

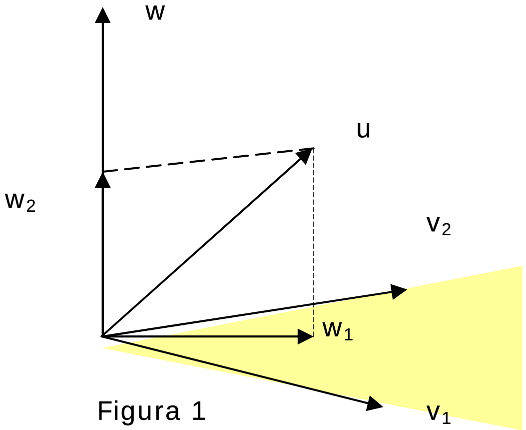



Figura 1

Si $w_1$ és la projecció a calcular:

$u = w_1 + w_2 \Rightarrow w_1 = u - w_2$

Calculem $w_2$=

$$\left[(1,-1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\right]\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) = \left(\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}\right)$$

$$w_1 = u - w_2 = (1,-1,1) - \left(\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

**2a forma:**

$w_1$ és combinació lineal de $\{ v_1 , v_2 \} \Rightarrow$

$w_1 = x\, v_1 + y\, v_2 = x(1,0,1) + y(0,1,-1) = (x,y,x-y) \Rightarrow$

$w_2 = u - w_1 = (1,-1,1) - (x,y,x-y) = (1-x,-1-y,1-x+y)$ és perpendicular a $v_1$ i $v_2$

$$\left.\begin{array}{ll} v_1\cdot w_2 = 0 \rightarrow (1,0,1)\cdot(1-x,-1-y,1-x+y)=0 \rightarrow & 2x - y = 2 \\ v_2\cdot w_2 = 0 \rightarrow (0,1,-1)\cdot(1-x,-1-y,1-x+y)=0 \rightarrow & x - 2y = 2 \end{array}\left\{\begin{array}{l} x = 2/3 \\ y = -2/3 \end{array}\right.\right\}$$

Solució $w_1 = (x,y,x-y) = \left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{4}{3},\right)$