1. Classifiqueu, segons les seves solucions, utilitzant el mètode de Gauss, els sistemes següents. Resoleu els casos de compatibilitat.

a) $\begin{cases} 3x+2y+z = 3 \\ x+y+z = 1 \\ 2x-3y+z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-2y+2z = 1 \\ x+y-z = 1 \end{cases}$

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \\ f_2 \leftrightarrow f_1 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 \to f_2 - 3f_1 \\ f_3 \to f_3 - 2f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 \to f_1 + f_2 \\ \\ f_3 \to -f_3 + 5f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 \to -f_2 \\ f_3 \to \frac{-1}{3} f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \to 3f_1 + f_3 \\ f_2 \to 3f_2 - 2f_3 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 \to \frac{1}{3} f_1 \\ f_2 \to \frac{1}{3} f_2 \\ f_3 \to \frac{1}{3} f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Sistema} \\ \text{compatible} \\ \text{determinat} \end{matrix} \to \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 \to f_2 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 \to \frac{1}{3} f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 \to f_1 + 2f_2 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Sistema} \\ \text{Comp. Indet.} \end{matrix} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$$

2. Resolució del sistema $\left.\begin{matrix} 3x & + & 5y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 2 \end{matrix}\right\}$ pel mètode de la matriu inversa

En forma matricial el sistema és A·X = B

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aplicant la regla de Sarrus podem calcular el determinat de la matriu A del sistema:

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 2 + 5\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot(-1)\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot 5\cdot 4 = -23$ i com que és diferent de zero, la matriu és regular i té inversa. Calculem la seva inversa:

La matriu transposada: $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

La matriu d'adjunts: $(A^t)^{adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -14 & -3 \\ -6 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

La inversa és $A^{-1} = \frac{1}{-23}\begin{pmatrix} -1 & -14 & -3 \\ -6 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

La solució del sistema ve donada per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-23}\begin{pmatrix} -1 & -14 & -3 \\ -6 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-23}\begin{pmatrix} -1\cdot1-3\cdot2 \\ -6\cdot1+5\cdot2 \\ 5\cdot1-8\cdot2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-23}\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{23} \\ y = \dfrac{-4}{23} \\ z = \dfrac{11}{23} \end{cases}$$

3. Resolució del sistema $\left.\begin{matrix} 3x & + & 5y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 2 \end{matrix}\right\}$ aplicant la regla de Cramer .

La matriu de coeficients del sistema és A= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Aplicant la regla de Sarrus podem calcular el determinat de A:

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot4 + 1\cdot3\cdot2 + 5\cdot(-1)\cdot2 - 2\cdot(-1)\cdot2 - 3\cdot(-1)\cdot3 - 1\cdot5\cdot4 = -23$ i com que és diferent de zero, el sistema és C. Det. i es pot aplicar la regla de Cramer.

Cada incògnita es calcula com un quocient:

- El denominador, per a totes, és el determinant del sistema
- En el numerador, per a cada incògnita, tenim el determinant que s'obté de substituir, en el determinant del sistema, la columna de coeficients de cada incògnita per la columna de termes independent (observa els termes independents de color vermell)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-4-10+4+3}{-23} = \frac{-7}{-23} = \frac{7}{23}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{4-2+6-4}{-23}=\frac{4}{-23}=-\frac{4}{23}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{-6+3+2-10}{-23}=\frac{-11}{-23}=\frac{11}{23}$$

4. Discutiu, segons els valors de a, el sistema $\begin{cases}6x & +2ay & +3z & =1\\ x & -y & +z & =3\\ 9x & -y & +6az & =10\end{cases}$

En la matriu ampliada reordenem les files i/o les columnes fins aconseguir que el paràmetre a estigui el més allunyat del vèrtex superior esquerra de la matriu.

Una vegada fets els canvis, podem esglaonar la matriu:

$$\begin{pmatrix}6 & 2a & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 9 & -1 & 6a & 10\end{pmatrix}\begin{matrix}f_1\to f_2\\ f_2\to f_3\\ f_3\to f_1\end{matrix}\begin{pmatrix}\boxed{1} & -1 & 1 & 3\\ 9 & -1 & 6a & 10\\ 6 & 2a & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ f_2\to f_2-9f_1\\ f_3\to f_3-6f_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & \boxed{8} & 6a-9 & -17\\ 0 & 2a+6 & -3 & -17\end{pmatrix}$$

$$f_3\to 8f_3-(2a+6)f_2\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 8 & 6a-9 & -17\\ 0 & 0 & -12a^2-18a+30 & 34a-34\end{pmatrix}$$

La 3a fila d'aquesta matriu és $\left(-12a^2-18a+30\right)z=34a-34$ i podríem aïllar la incògnita z si el seu coeficient fossi diferent de zero (i el sistema seria compatible determinat)

Esbrinem quan el coeficient és zero:

$$-12a^2-18a+30=0\Rightarrow 2a^2+3a-5=0\Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\begin{cases}1\\ \dfrac{-5}{2}\end{cases}$$

O sigui:

Si $a\neq 1$ i $a\neq$ -5/2 el sistema és COMPATIBLE DETERMINAT

Si $a = 1$ tenim $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & -3 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ COMPATIBLE INDETERMINAT

Si $a = -5/2$ tenim $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & -24 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -119 \end{pmatrix} \to$ INCOMPATIBLE

5. L'Anna es compra 3 pantalons, 2 bruses i un barret per 135 euros; la Roser, uns pantalons, 3 bruses y un barret per 100 euros, i la Susanna, 2 pantalons, 3 bruses i 2 barrets per 155 euros. Quin és el preu de cada peça?

Sigui x el preu d'uns pantalons, y el d'una brusa i z el d'un barret.

L'Anna paga 135 euros per 3 pantalons, 2 bruses i 1 barret: $3x + 2y + z = 135$

La Roser paga 100 euros per uns pantalons, 3 bruses i 1 barret: $x + 3y + z = 100$

La Susanna paga 155 euros per 2 pantalons, 3 bruses i 2 barret: $2x + 3y + 2z = 155$

Hem de resoldre el sistema anterior.

La matriu de coeficients és quadrada el seu determinant val $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema compatible determinat i es pot resoldre aplicant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 135 & 2 & 1 \\ 100 & 3 & 1 \\ 155 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{150}{6} = 25 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 135 & 1 \\ 1 & 100 & 1 \\ 2 & 155 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{90}{6} = 15 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 135 \\ 1 & 3 & 100 \\ 2 & 3 & 155 \end{vmatrix}}{6} = \frac{180}{6} = 30$$

Per tant el preu d'uns pantalons és de 25 euros; el d'una brusa 15 euros; el d'un barret 30 euros.

Comprovem els resultats: $\begin{cases} 3 \cdot 25 + 2 \cdot 15 + 30 = 75 + 30 + 30 = 135 \\ 25 + 3 \cdot 15 + 30 = 25 + 45 + 30 = 100 \\ 2 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 30 = 50 + 45 + 60 = 155 \end{cases}$

6. Quina de les següents afirmacions és certa (justifiqueu la resposta amb un exemple):

a) Un sistema de tres equacions amb dues incògnites pot ser compatible determinat.

CERTA: El rang de la matriu de coeficients pot ser 2, coincidir amb el rang de la matriu ampliada i amb el nombre d'incògnites i per tant pot ser compatible determinat. Exemple:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} f_3 \to f_3 - f_1 - f_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Comp. determinat

b) Un sistema homogeni pot ser incompatible

FALSA: Un sistema homogeni sempre té la solució $x_1=0$, $x_2=0$,..., $x_n=0$ i per tant sempre és compatible. Exemple: els valors de x=0, y=0, i z=0 és una solució del sistema $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$ Sistema comp. Indeterminat

c) Existeixin sistemes d'equacions lineals en què el rang de la matriu del sistema superi el nombre d'incògnites

FALSA: El nombre de columnes de la matriu de coeficients del sistema coincideix amb el nombre d'incògnites i per tant el seu rang (nombre de files o columnes linealment independents) no pot superar el nombre d'incògnites.

La matriu del sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ és $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; solament té dues columnes i, per tant, el seu rang no pot ser major que 2

d) Considereu un sistema de tres equacions amb tres incògnites i dependent d'un paràmetre k. Pels valors del paràmetre k que fan igual a zero el determinant de la matriu de coeficients del sistema, el sistema pot ser compatible determinat.

FALSA: Un sistema és compatible determinat (d'acord amb el teorema de Rouché-Frobenius) si ran(A) = rang(A') = nombre d'incògnites i, per tant, en aquest cas, s'ha de complir que rang(A)= rang(A') = nombre d'incògnites=3. Ara bé, com que la matriu A és d'ordre 3 (quadrada), la condició anterior es compleix si det(A) $\neq$ 0. Aleshores, un sistema de tres equacions amb tres incògnites és compatible determinat si i solament si det(A) $\neq$ 0.