Exemple 1

Donada la funció definida a trossos $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+2x} & -3\le x<0\\ \dfrac{2-x}{x^2-4} & 0\le x\le 3\end{cases}$

estudieu el seu domini i la seva continuïtat en els punt x =−2, x = 0 i x = 2

A l'interval [–3,0[: $x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-2\\ x=0\end{cases} \Rightarrow$ Domini [–3, 0 [– { –2 }

A l'interval [0, 3] : $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases}x=-2\\ x=2\end{cases} \Rightarrow$ Domini [0 , 3] – { 2 }

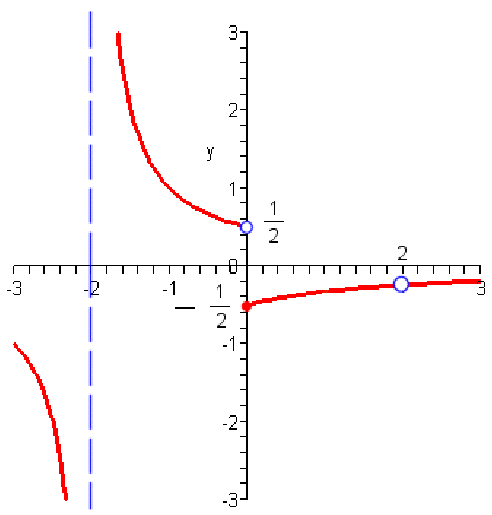
Per tant, el domini de f és [–3 , 3] – {–2 , 2}

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+2)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+2)}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\text{en } x=-2 \text{ discontinuïtat asimpt.}}$$

f presenta una discontinuïtat de salt infinit o asimptòtica en x = - 2 i la recta x = - 2 és asímptota vertical de ***f***

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+2)}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-x}{x^2-4}=\dfrac{2}{-4}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\text{en } x=0 \text{ discontinuïtat de salt finit}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{-1}{4}\Rightarrow \boxed{\text{en } x=2 \text{ discontinuïtat evitable}}$$



Exemple 2

Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x)=\begin{cases}-4x+a & \text{si} \quad x\le -2\\ x^2-5 & \text{si} \quad -2<x<1\\ bx+3 & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}$$

a) Calculeu els valors d'a i de b per tal que $f(x)$ sigui contínua per a tot x
b) Feu un gràfic de la funció obtinguda en l'apartat anterior

a) La funció ***f*** és una funció definida a trossos i en cada tros és contínua, doncs els tres trossos són funcions polinòmiques. Perquè sigui contínua en tot el domini, hem d'imposar la condició de què sigui contínua en els extrems dels intervals de cada tros, o sigui que els límits laterals per l'esquerra i per la dreta en els punts $x=-2$ i $x=1$ han de ser iguals:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}(-4x+a)=\lim\limits_{x\to -2^+}(x^2-5)\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-5)=\lim\limits_{x\to 1^+}(bx+3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8+a=-1\\ -4=b+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-9\\ b=-7\end{cases}$$

i, per tant, la funció: $f(x)=\begin{cases}-4x-9 & \text{si} \quad x\le -2\\ x^2-5 & \text{si} \quad -2<x<1\\ -7x+3 & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}$ és contínua en $\Re$.

b) Per a $x\le -2$ és una recta de pendent -4 i per a $x=-2$ té el valor $f(x)=-1$.
Per a $-2<x<1$ és una paràbola de vèrtex a $x=0$.
Per a $x\ge 1$ és una recta de pendent -7 i per a $x=1$ té el valor $f(x)=-4$.
Per tant, la gràfica és: