1. Calculeu les asímptotes verticals i horitzontals de la funció següent: $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+x-2}$

Asímptotes verticals:

Com que es tracta d'una funció racional, les asímptotes verticals es troben entre els zeros del denominador: $x^2+x-2=0$, les solucions d'aquesta equació són -2 i 1

(Recordeu que x=a és asímptota vertical de la funció f(x) si $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$)

Per comprovar que x=-2 és asímptota vertical hem de veure que

Calculem els límits laterals en x = -2 i x = 1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2-1}{x^2+x-2}=\dfrac{7}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x^2-1}{x^2+x-2}=\dfrac{7}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}=\infty\Rightarrow$$ **x= -2 és asímptota vertical per tots dos costats.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-1}{x^2+x-2}=\dfrac{7}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-1}{x^2+x-2}=\dfrac{7}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}=\infty\Rightarrow$$ **x=1 és asímptota vertical per tots dos costats.**

Asímptotes horitzontals:

Hem de calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+x-2}$

(Recordeu que hi ha asímptota horitzontal si el valor d'aquest límit és un nombre real).

Veiem $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+x-2}=2$

ja que, com que el numerador i el denominador tenen el mateix grau, es poden dividir els coeficients dels termes de major grau del numerador i del denominador.

Per tant,

y=2 és asímptota horitzontal per l'esquerra i per la dreta.

2. Trobeu l'expressió analítica i dibuixeu una funció racional tal que:

- **Té l'asímptota horitzontal y = 3.**
- **El denominador és de grau 1.**
- **x = 2 és una asímptota vertical.**
- **Passa pel punt (1 , 0).**
-

Hem de buscar una funció racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

El denominador és de grau 1 i x = 2 és una asímptota vertical, per tant:
$q(x) \ = \ b{\cdot}(x - 2)$

Si té una asímptota horitzontal ⇒ el numerador ha de tenir el mateix grau que el denominador, o sigui, 1.

Si passa pel punt (1,0), el numerador és de la forma: $p(x) \ = \ a{\cdot}(x - 1)$

O sigui, $f(x) = \dfrac{a{\cdot}(x-1)}{b{\cdot}(x-2)}$

Si y = 3 és una asímptota horitzontal, es compleix que:

$3 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a{\cdot}(x-1)}{b{\cdot}(x-2)} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow a = 3b$ i per b=1 i a=3, ens dóna la fracció més simple, i, per tant, la funció és: $f(x) = \dfrac{3(x-1)}{(x-2)}$

A partir de les propietats demanades a la funció i una petita taula de valors, a l'esquerra i a la dreta de l'asímptota vertical, podem dibuixar-la gràficament.

x	y
-4	-2,5
-1	2
0	1,5
1	0
3	6
5	4
6	3,5