ANNEX 1:

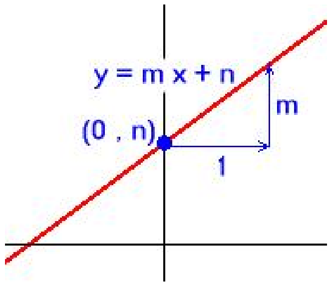
Interpretació geomètrica d'un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites

Orientacions per a l'estudi de la unitat

Es tracta d'estudiar les rectes en el pla, de resoldre equacions lineals amb dues incògnites i d'interpretar geomètricament la resolució d'un sistema de n equacions amb dues incògnites sense o amb un paràmetre.

La recta com a funció afí

Una funció polinòmica de primer grau (funció afí), d'equació **y = mx + n**, té per gràfica una recta.

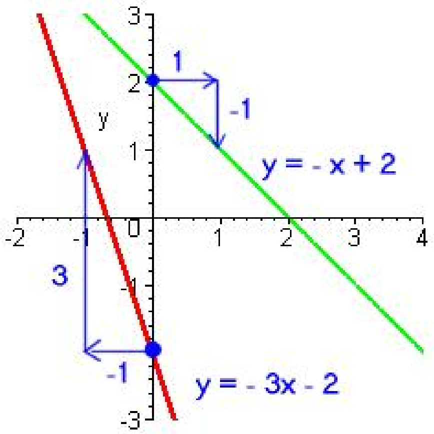


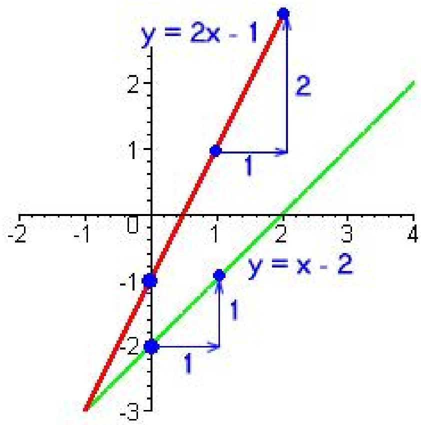
El paràmetre **m** es diu **pendent** i ens dóna la inclinació de la recta.

m>0	la recta és creixent
m<0	la recta és decreixent

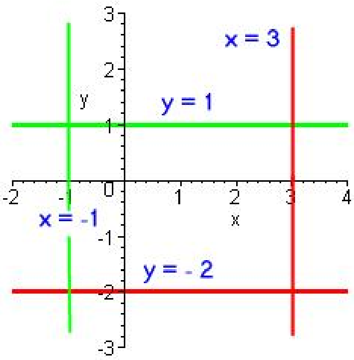
El paràmetre **n** es diu **ordenada en l'origen** i ens dóna el punt de tall de la recta amb l'eix OY.

Exemple 1. Representació de les rectes y= – 3x – 2; y = – x+2; y = 2x – 1; y = x – 2





Totes les funcions polinòmiques de primer grau tenen per representació gràfica una recta. En canvi no totes les rectes són funcions polinòmiques de primer grau.



- Les rectes horitzontals tenen equació y = k (constant) i són funcions polinòmiques de grau zero. Aquestes rectes es caracteritzen perquè per a qualsevol valor d' x , l'ordenada y sempre té el mateix valor. Per exemple: y = - 2, y = 1
- Les rectes verticals no són funcions i tenen equació x = k (constant). Aquestes rectes es caracteritzen perquè per a qualsevol valor d' y, l'abscissa x sempre té el mateix valor. Per exemple x = -1, x = 3

Representació d'una recta

Una recta queda determinada per dos punts i, per tant, si volem representar-la, n'hi ha prou amb calcular-ne dos punts diferents.

Exemple 2. Representeu gràficament les rectes $r: y = 3x - 2;\quad s: y = -1 \quad \text{i} \quad t: x = 2$

r

x	y
0	-2
1	1

s

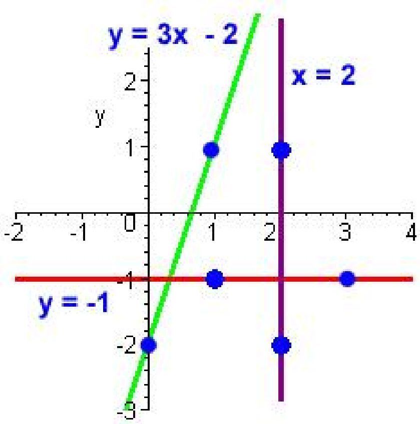
x	y
1	-1
3	-1

t

x	y
2	-2
2	1

Per qualsevol valor d'x, y sempre val -1

Per qualsevol valor d'y, x sempre val 2



Equació d'una recta que passa per dos punts A(a_1, a_2) i B(b_1, b_2)

Si cap de les abscisses o ordenades, respectivament, de A i B no es repeteixen (x constant o, y constant), aplicarem que els punts A i B compleixen l'equació de la recta **y = mx + n** .

Obtindrem dues equacions amb dues incògnites (**m** i **n**) $\begin{cases} a_1 m + n = a_2 \\ b_1 m + n = b_2 \end{cases}$ que podrem calcular,

També es podria calcular el pendent $m = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ i aplicar la fòrmula $y - a_2 = m(x - a_1)$

Exemple 3. Calculeu l'equació de la recta que passa pels punts A(1,5) i B(-1,-1)

Passa pel punt A(1,5): 1·m + n = 5 ; passa pel punt B(-1,-1): -1·m + n =-1

$$\left.\begin{array}{r} m+n=5 \\ -m+n=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow m=2 \quad i \quad n=2 \qquad \Rightarrow \text{ y = 3x +2}$$

O bé: $m = \dfrac{-1-5}{-1-1} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \Rightarrow \boxed{y - 5 = 3(x-1)} \Rightarrow$ y = 3x +2

Exemple 4. Calculeu l'equació de la recta que passa pels punts A(1,-2) i B(-2,-2)

$m = \dfrac{-2+2}{-2-1} = \dfrac{0}{-2} = 0 \Rightarrow \boxed{y + 2 = 0} \Rightarrow y = -2$. També es podria raonar que per qualsevol valor de x, la ordenada y sempre val -2 i, per tant, l'equació és y = - 2

Exemple 5. Calculeu l'equació de la recta que passa pels punts A(1,0) i B(1,-1)

Per qualsevol valor de y, l'abscissa x sempre val 1 i, per tant, l'equació és x = 1

En aquest cas no podríem calcular l'equació d'aquesta recta buscant una equació del tipus y = mx+n, ja que les rectes verticals no són funcions.

Equació general d'una recta

Si en l'equació **y = mx + n** es passen tots els sumands al primer terme, obtindrem l'expressió **-mx +y – n = 0**, o sigui, una equació del tipus **ax+by+c=0** que es diu equació implícita o general de la recta.

Aquesta equació pot representar qualsevol recta (vertical, horitzontal o inclinada).

Per representar una recta donada d'aquesta forma, és suficient calcular-ne dos punts de la mateixa

Exemple 6. Representeu gràficament les rectes
$r: 3x - y + 2 = 0; \quad s: y + 2 = 0 \quad \text{i} \quad t: x - 1 = 0$

r

x	y
0	2
-2/3	0

s

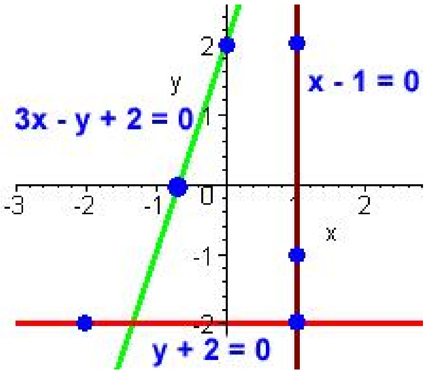
x	y
1	-2
-2	-2

t

x	y
1	-1
1	2

Per qualsevol valor d'x, y sempre val -2

Per qualsevol valor d'y, x sempre val 1



Posició relativa de dues rectes

Sigui r la recta d'equació $ax + by = c$ i s la recta d'equació $mx + ny = p$

Per estudiar la posició relativa d'aquestes dues rectes hem de resoldre el sistema format per totes dues, o sigui, el sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$

Sigui $A = \begin{pmatrix} a & b \\ m & n \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{pmatrix}$ les matrius de coeficients i ampliada del sistema, respectivament.

- Si rang(A) = rang (B) =2, el sistema és compatible determinat, amb una única solució: les rectes es tallen en un punt
- Si rang(A) = rang (B) =1, el sistema és compatible indeterminat, amb infinites solucions: les rectes són coincidents
- Si rang(A) =1 i rang (B) =2, el sistema és incompatible (no te cap solució): les rectes no es tallen i per tant vol dir que són paral·leles

Així doncs, si volem estudiar la posició relativa de dues rectes, hem de comparar els rangs de les matrius A i B i amb el número d'incògnites (dues). El procediment, doncs, és el mateix que hem practicat en les quinzenes anteriors.

Exemple 7. Estudieu la posició relativa de les rectes $\begin{cases} r: 2x - 3y = -4 \\ s: \quad x + y = 3 \end{cases}$

Hem de discutir el sistema d'equacions. $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + y = 3 \end{cases}$ Apliquem la regla de Cramer:

El determinant del sistema $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3=5 \neq 0 \Rightarrow$ sistema compatible determinat

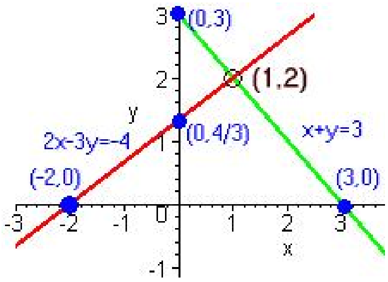
$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{5} = 1 \quad i \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10}{5} = 2 \;\Rightarrow$$ les rectes es tallen en (1, 2)

r

x	y
0	3
3	0

s

x	y
-2	0
0	4/3



Exemple 8. **Estudieu la posició relativa de les rectes** $\begin{cases} r: \quad x-2y=2 \\ s: \; -2x+4y=-4 \end{cases}$

Hem de discutir el sistema d'equacions. $\begin{cases} x-2y=2 \\ -2x+4y=-4 \end{cases}$ Fem Gauss:

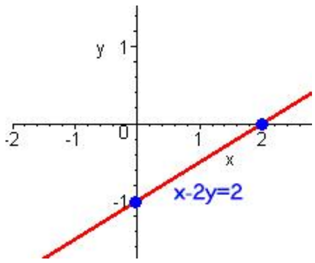
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \; f_2 \to f_2 + 2f_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

el rang(A) = 1 = rang(B) i per tant el sistema és compatible indeterminat:

totes dues rectes són la mateixa.

r

x	y
0	-1
2	0



Exemple 9. **Estudieu la posició relativa de les rectes** $\begin{cases} r: \quad 2x-y=2 \\ s: \; -4x+2y=-8 \end{cases}$

Hem de discutir el sistema d'equacions. $\begin{cases} 2x-y=2 \\ -4x+2y=-8 \end{cases}$

Fem Gauss: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \; f_2 \to f_2 + 2f_1 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

el rang(A) = 1 i rang(B)=2

i per tant el sistema és incompatible:

les rectes no es tallen en cap punt,

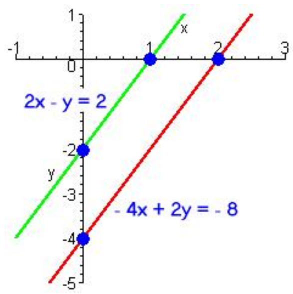
són paral·leles.

r

x	y
0	-2
1	0

s

x	y
2	0
0	-4



Interpretació geomètrica d'un sistema de n equacions amb 2 incògnites

Sigui A X = B un sistema lineal de n equacions amb dues incògnites, on A és la matriu de coeficients, B els termes independents i, denotem A/B a la matriu ampliada.

- Si rang A = rang (A/B) = 2 el sistema és compatible determinat.
  Les rectes es tallen en un punt
- Si rang A = rang (A/B) = 1 el sistema és compatible indeterminat.
  Les rectes són coincidents
- Si rang A $\neq$ rang (A/B) el sistema és incompatible.
  Les rectes no tenen cap punt en comú
  Si es tracta d'un sistema amb dues equacions, les rectes són paral·leles

Exemple 10. Estudieu la posició relativa, segons el paràmetre a, de les rectes $\begin{cases} r: x + ay = a \\ s: ax + y = a \end{cases}$ Feu en cada cas la representació gràfica.

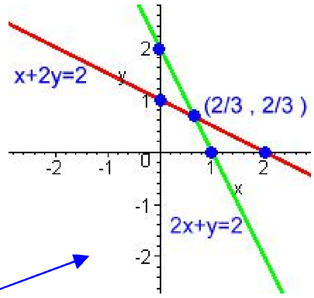
Hem de discutir el sistema d'equacions $\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y = a \end{cases}$. Fem Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \end{pmatrix} f_2 \to f_2 - af_1 \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1-a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \\ a-a^2 = 0 \Rightarrow a = 0,1 \end{cases}$$

Tenim tres casos:

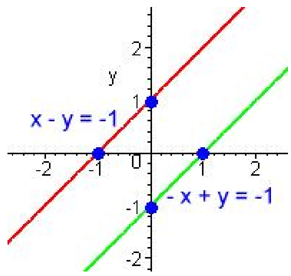
a. Si a $\neq$ -1 o a $\neq$ 1 el rang(A) =2 = rang (A/B) i per tant el sistema és compatible determinat: les rectes es tallen en un punt.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \end{pmatrix} f_2 \to \frac{1}{1\text{-a}} f_2 \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{1+a} \\ y = \dfrac{a}{1+a} \end{cases}$$



Pel valor a=2 tenim el sistema $\begin{cases} \text{r}: x + 2y = 2 \\ \text{s}: 2x + y = 2 \end{cases}$, el punt de tall és $x = \dfrac{2}{3}$ i $y = \dfrac{2}{3}$ i la representació gràfica

b. Si a = -1: A/B $\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ i el rang(A) =1 $\neq$ rang (A/B) =2 i per tant el sistema és incompatible: Les rectes $\begin{cases} \text{r}: \quad x - y = -1 \\ \text{s}: -x + y = -1 \end{cases}$ són paral·leles



c. Si a = 1: A/B $\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i el rang(A) =1 = rang (A/B) i per tant el sistema és compatible indeterminat: Les rectes $\begin{cases} \text{r}: x + y = 1 \\ \text{s}: x + y = 1 \end{cases}$ són coincidents