PRÀCTICA EN EL CÀLCUL DE DOMINIS DE FUNCIONS

• Si f(x) és una funció polinòmica → dom(f(x)) = $\mathbb{R}$

Exemples :

- $f(x) = 2x^3 - 5x + 1 \quad \rightarrow \quad dom(f(x)) = \mathbb{R}$
- $g(x) = 20 \quad \rightarrow \quad dom(g(x)) = \mathbb{R}$
- $y = \dfrac{2}{3}x + 1 \quad \rightarrow \quad dom(y) = \mathbb{R}$
- $h(x) = \dfrac{3}{4}x^3 - \sqrt{5}x + x^4 \quad \rightarrow \quad dom(h(x)) = \mathbb{R}$
- $j(x) = (x-2)(x^2 - 3x) \quad \rightarrow \quad dom(j(x)) = \mathbb{R}$

ja que $(x-2)(x^2-3x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ que és un polinomi

$k(t) = -3 - 3t + \dfrac{5}{2}t^4 \quad \rightarrow \quad dom(k(t)) = \mathbb{R}$

• Si f(x) és una funció racional → dom(f(x)) = $\mathbb{R}$ - { els valors de la variable que anul·len el denominador}

Exemples :

- $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x+10}$

  $2x + 10 = 0 \rightarrow 2x = -10 \rightarrow x = -5$

  $\rightarrow dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-5\}$

- $g(x) = \dfrac{3x+4}{2x^2 - 200}$

  $2x^2 - 200 = 0 \rightarrow 2x^2 = 200 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$

  $\rightarrow dom(g(x)) = \mathbb{R} - \{-10, 10\}$

- $h(x) = \dfrac{3x+4}{x^2 - 5x}$

  $x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x-5) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \;\; i \;\; x_2 = 5$

  $\rightarrow dom(h(x)) = \mathbb{R} - \{0, 5\}$

- $j(x)=\dfrac{4}{x^2-5x+6}$

  $x^2-5x+6=0 \to x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2}= \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \end{cases}$

  $\to dom(j(x))=\mathbb{R}-\{2,3\}$

- $k(x)=\dfrac{-3x+4}{2x^2-3x-5}$

  $2x^2-3x-5=0 \to x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\dfrac{3\pm7}{4}= \begin{cases} x_1=5/2 \\ x_2=-1 \end{cases}$

  $\to dom(k(x))=\mathbb{R}-\left\{-1,\dfrac{5}{2}\right\}$

- $l(x)=\dfrac{x^2+7}{x^3+x^2-4x-4}$

  $x^3+x^2-4x-4=0 \to$ busquem les arrels del polinomi x^3+x^2-4x-4

  la primera per Ruffini

  $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array} \to x=-1 \text{ és la primera arrel}$$

  $x^2-4=0 \quad \to x^2=4 \to x=\pm\sqrt{4}=\pm2$ són les altres arrels

  per tant les solucions de l'equació $x^3+x^2-4x-4=0$ són $x=-2,\ -1\ i\ 2$

  $\to dom(l(x))=\mathbb{R}-\{-2,-1,2\}$

- $m(x)=\dfrac{x^2+7}{x^3-7x}$

  $x^3-7x=0 \to x(x^2-7)=0 \to x_1=0$

  $\to x^2-7=0 \to x^2=7 \to x=\pm\sqrt{7}$

  $\to dom(m(x))=\mathbb{R}-\{-\sqrt{7},0,\sqrt{7}\}$

- $n(x)=\dfrac{x^2+7}{x-4}-\dfrac{3x}{x^2-3x}$

  Aquí hem de mirar els dos denominadors

  $x-4=0 \to x=4$

  $x^2-3x=0 \to x(x-3)=0 \to x_1=0$

  $\to x-3=0 \to x_2=3$

  $\to dom(n(x))=\mathbb{R}-\{0,3,4\}$

- $r(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+8}$

  $x^2+8=0 \rightarrow x^2=-8 \rightarrow x=\pm\sqrt{-8}$ que no existeix en els reals

  per tant l'equació $x^2+8=0$ no té solució en els reals

  $\rightarrow dom(r(x)) = \mathbb{R}$

- **Si f(x) és una funció irracional $\rightarrow$ dom(f(x)) depèn de l'índex del radical**

  si l'índex és senar dom(f(x)) $= \mathbb{R}$

  si l'índex és parell dom(f(x)) = els nombres reals que fan que radicand ≥ 0

Si f(x) = $\sqrt[N]{g(x)}$ $\Rightarrow$ **si N és senar dom(f(x))** $= \mathbb{R}$

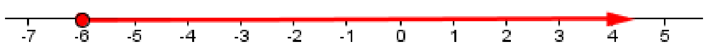
$\Rightarrow$ **si N és parell dom(f(x)) =** $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\}$

Exemples :

- $f(x) = \sqrt{2x+12}$

  $2x+12 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -12 \rightarrow x \geq -6$

  $\rightarrow dom(f(x)) = [-6, +\infty)$



- $g(x) = \sqrt[3]{2x^2-200} \rightarrow dom(g(x)) = \mathbb{R}$

- $h(x) = \sqrt{-3x+6}$

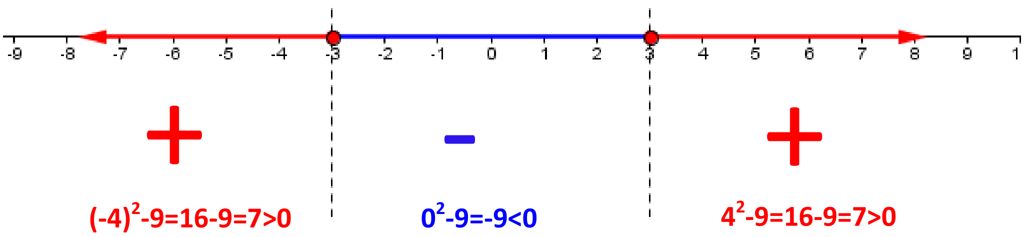
  $-3x+6 \geq 0 \rightarrow -3x \geq -6 \rightarrow x \leq \dfrac{-6}{-3} \rightarrow x \leq 2$

  $\rightarrow dom(h(x)) = (-\infty, 2]$

- $j(x) = \sqrt{x^2-9}$

  $x^2-9 \geq 0 \rightarrow x^2-9=0 \rightarrow x = \pm 3$

  Ara situem aquests valors de x damunt de la recta i ens quedarà dividida en tres trossos. Sols cal comprovar agafant un nombre de cada tros si x^2-9 dóna positiu o negatiu. En tot el tros el comportament serà igual.

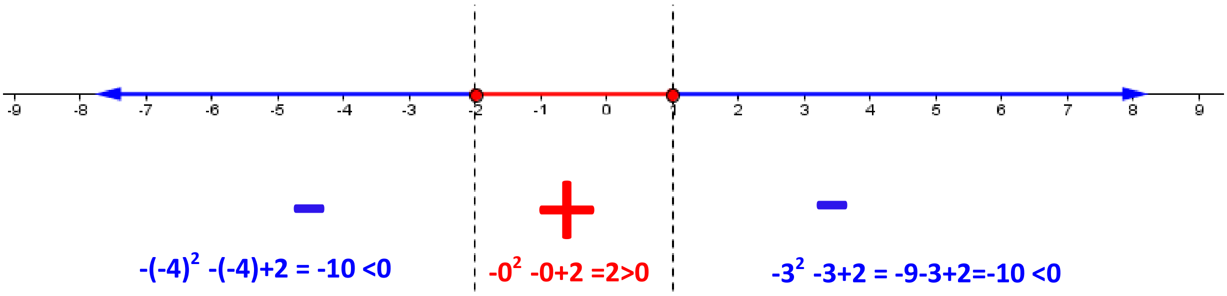


Així doncs tenim $\boxed{\textbf{Dom j(x)}=(-\infty,-3\,]\cup[3,+\infty)}$

- $k(x)=\sqrt{-x^2-x+2}$

$$-x^2-x+2\geq 0\rightarrow -x^2-x+2=0\rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=1 \end{cases}$$

Ara situem aquests valors de x damunt de la recta i ens quedarà dividida en tres trossos. Sols cal comprovar agafant un nombre de cada tros si $-x^2-x+2$ dóna positiu o negatiu. En tot el tros el comportament serà igual.



Així doncs tenim $\boxed{\textbf{Dom k(x)}=\left[-2,1\right]}$

- $l(x)=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x^2-5x}$

Veiem que hi ha imatge per a tots els reals que facin que el radicand sigui major o igual que zero i que no anul·lin el denominador (ja que l'arrel quadrada d'un nombre negatiu no existeix i dividir per zero tampoc). Esbrinem doncs quins són aquests nombres que fan que el radicand sigui major o igual que zero i que no anul·len el denominador.

Cal imposar que passin les dues condicions següents:

1. $2x-4 \geq 0$
2. $x^2-5x \neq 0$

Resolem la primera condició $2x-4 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 4 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow x \in [2,+\infty)$
Resolem la segona condició mirant quan
$x^2-5x=0 \rightarrow x(x-5)=0 \rightarrow x=0 \;\text{ i }\; x=5$
Per tant tenim que per poder fer l'arrel quadrada han de ser nombres majors o iguals que 2 , però no poden ser ni 0 ni 5

Així doncs tenim $\boxed{\textbf{Dom } \mathbf{l(x)}\mathbf{=}[2,+\infty)-\{5\}=[2,5) \cup (5,+\infty)}$

- $m(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}$

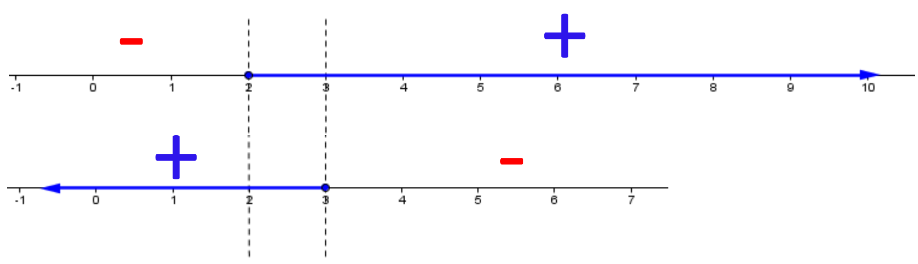
Veiem que hi ha imatge per a tots els reals que facin que el radicand sigui major o igual que zero i que no anul·lin el denominador (ja que l'arrel quadrada d'un nombre negatiu no existeix i dividir per zero tampoc). Esbrinem doncs quins són aquests nombres que fan que el radicand sigui major o igual que zero i que no anul·len el denominador. Cal imposar que passin les dues condicions següents

1. $\dfrac{x-2}{3-x} \geq 0$
2. $3-x \neq 0$

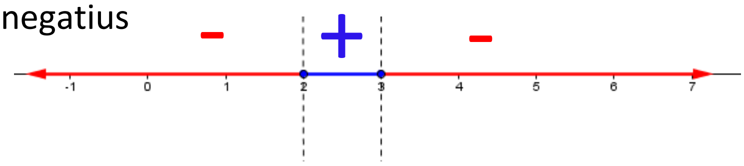
Per esbrinar els nombres que compleixen la primera condició fem un estudi del signe de les expressions x-2 i 3-x . Després haurem d'agafar els valor de x que facin que el resultat de la fracció sigui positiva

$x-2=0 \rightarrow x=2$

$3-x=0 \rightarrow x=3$



La fracció serà positiva quan el numerador i el denominador siguin positius alhora o quan tots dos siguin negatius



Tenim doncs que els nombres que fan complir la condició 1 són [2,3] ara sols cal veure si hi ha algun d'aquests nombres que no compleixin la condició 2. I veiem que quan x=3 tenim 3-x=0 , per tant x=3 no és del domini.

Així doncs tenim $\boxed{\textbf{Dom m(x)}=[2,3)}$