1.EL CONCEPTE DE FUNCIÓ.

1.1 DEFINICIÓ

Una **funció** és una **relació** entre dues variables numèriques, de manera que a cada valor de l'una li correspon un **únic** valor de l'altra.

Aquestes variables responen a una relació de dependència, és a dir que la segona variable depèn del valor de la primera. És per això que una de les variables es diu **variable independent** i l'altra **variable dependent**

Variable independent		**Variable dependent**
x	$\longrightarrow$	$Y=f(x)$

1.2 EXEMPLES

a) Per elaborar un pastís de xocolata calen 200 grams de farina, per fer-ne dos caldrien 400 grams de farina, per fer-ne tres 600 grams de farina. És clar que entre el nombre de pastissos i la quantitat de farina s'estableix una relació funcional. La quantitat de farina depèn del nombre de pastissos a elaborar. Així doncs el nombre de pastissos és la variable independent d'aquesta funció i la quantitat de farina és la variable dependent.

b) L'àrea d'un quadrat depèn de la mida del seu costat. Si el costat mesura 1 cm , l'àrea del quadrat mesura 1 cm^2. Si el costat mesura 2 cm , l'àrea mesura 4 cm^2, …Tenim una funció que a la longitud del costat d'un quadrat li fa correspondre la seva àrea. L'àrea del quadrat depèn de la longitud del seu costat, per tant la variable independent és la mida del costat i la dependent l'àrea del quadrat.

c) Podrem establir una relació que faci correspondre l'edat dels alumnes de GES amb la seva alçada. Però aquesta relació **no constitueix una funció**. Per què? Doncs perquè alumnes de la mateixa edat poden tenir alçada diferent. No es compleix per tant que a cada valor de la primera variable li correspon un únic valor de la segona.

d) Si 1 kg de taronges costa 0,85€ , 2 kg de taronges costen 1,70€, …Tenim una funció que relaciona el pes i el preu de les taronges. El pes és la variable independent i el preu a pagar (que depèn del pes) és la variable dependent.

2. FORMES DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓ

Hi ha diferents formes de representar una funció. Les principals són:

- Mitjançant un enunciat
- Mitjançant una taula
- Mitjançant un gràfic
- Mitjançant una expressió algebraica o fórmula

Qualsevol dels mètodes és bo per descriure una funció i s'utilitza un o altre segons quina és la relació funcional a estudiar i quin és l'objectiu de l'estudi. El gràfic ens dóna de forma ràpida i fàcil tota la informació sobre la funció. No sempre és fàcil trobar una fórmula que caracteritzi la funció, de vegades calen mètodes que s'escapen del nivell estudiat al mòdul.

Veiem les diverses formes d'expressar una funció amb un exemple:

Anem al supermercat i comprem llaunes de cervesa a 52 cèntims cadascuna. Ens cobren 3 cèntims per la bossa, estudiem la funció que ens dóna el preu a pagar en € depenent del nombre de llaunes que comprem.

En aquesta funció la variable independent és el nombre de llaunes comprades i la variable dependent , el preu a pagar.

Si comprem una llauna pagarem 0,03+0,52=0,55€

Si comprem dues llaunes pagarem 0,03+0,52·2=1,07€

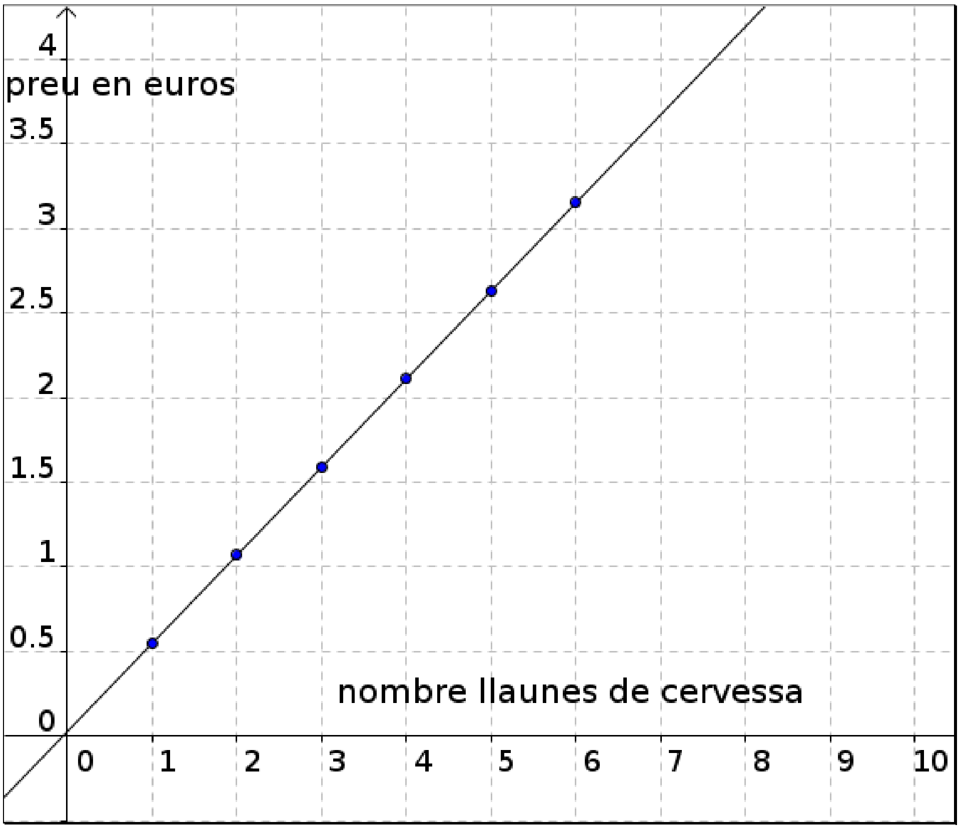
Si en comprem tres pagarem 0,03+0,52·3=1,59€….

Si en comprem sis pagarem 0,03+0,52·6=3,15€

Això ho podem escriure en forma de **taula**:

X=nombre de llaunes	Y=f(x)=preu a pagar en euros
1	0,55
2	1,07
3	1,59
4	2,11
5	2,63
6	3,15

Construïm un **gràfic** on quedi expressada aquesta relació. Recordem que sempre , la **variable independent** (la x) la representem a **l'eix horitzontal** anomenat eix d'abscisses i la **variable dependent** (la y) la representem a **l'eix vertical** anomenat eix d'ordenades.



Finalment escrivim una **fórmula** que descrigui la funció. En aquest cas hem de sumar al preu de la bossa (que és fixe) el preu a pagar per les llaunes que obtenim multiplicant per 0,52 el nombre de llaunes adquirides. Expressem això amb llenguatge algebraic:

y=f(x)=0,03+0,52·x on x és el nombre de llaunes comprades i y el preu a pagar.

3.CÀLCUL D' IMATGES I ANTIIMATGES D'UNA FUNCIÓ

Tal com hem explicat una funció és una relació entre nombres.

Quan un nombre x es relaciona amb un altre y , ho expressem dient **y=f(x).**

$$x \longrightarrow y=f(x)$$

Això ho podríem llegir amb paraules dient que **y és la imatge de x per la funció.** Fixem-nos que diem **la** imatge , doncs per definició de funció cada valor x només pot tenir una imatge.

De la mateixa manera podem dir que **x és una antiimatge de y per la funció**. Fixem-nos que ara diem **una,** doncs un mateix valor y pot tenir diverses antiimatges.

3.1 COM CALCULAR IMATGES D'UNA FUNCIÓ ?

Si ens demanen la imatge vol dir que ens donen la x i hem de calcular la y. Si tenim l'expressió algebraica només cal que substituïm la x pel valor que ens donin i operar.

Si per contra el que tenim és el gràfic; el que hem de fer és buscar el valor donat per la x sobre l'eix horitzontal, traçar una recta vertical fins que intersequi amb el gràfic i després mirar sobre l'eix d'ordenades quina coordenada y té aquest punt d'intersecció.

Veiem exemples.

Exemple 3.1.1.

Considerem la funció y=f(x)= 3x-1 és a dir la funció que a cada nombre x li associa el nombre que surt de multiplicar-lo per 3 i restar 1 al resultat. Tenim per tant l'expressió algebraica o fórmula.

Per trobar imatges (és a dir trobar la y) , només cal substituir la x pel valor que ens indiquin i operar

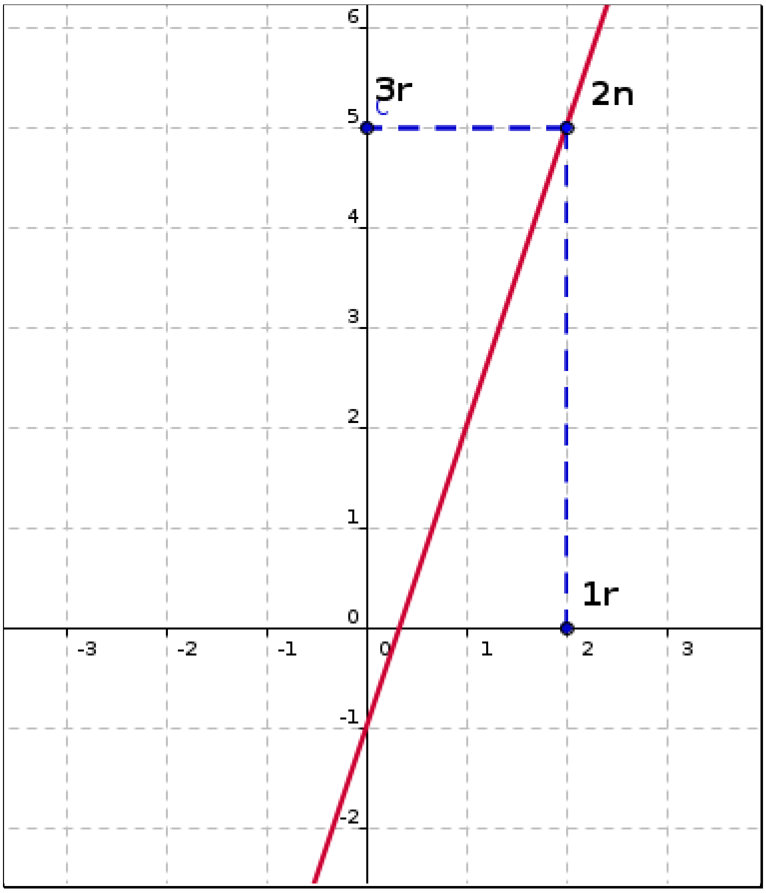
- Calculem la imatge de 1 : f(1)= 3·1-1=3-1=2. La imatge de 1 és 2. La funció passa pel punt (1,2)
- Calculem la imatge de 2 : f(2)= 3·2-1=6-1=5 La imatge de 2 és 5 .La funció passa pel punt (2,5)
- Calculem la imatge de 0: f(0)=3·0-1= 0-1=-1 La imatge de 0 és -1 .La funció passa pel punt (0,-1)
- Calculem la imatge de -1: f(-1)=3·(-1)-1= -3-1=-4 La imatge de -1 és -4 .La funció passa pel punt (-1,-4)
- Calculem la imatge de -2: f(-2)=3·(-2)-1= -6-1=-7 La imatge de -2 és -7 .La funció passa pel punt (-2,-7)

- Calculem la imatge de 1.5: f(1.5)=3·1.5-1= 4.5-1=3.5 La imatge de 1.5 és 3.5 .La funció passa pel punt (1.5,3.5)

Podríem de la mateixa manera calcular la imatge de qualsevol altre valor x.

Anem a veure quins passos cal seguir per trobar una imatge si el que tenim és el gràfic. A la imatge de sota , tenim en vermell el gràfic de la funció anterior.

Calculem la imatge de x=2



1r) Busquem sobre l'eix horitzontal x=2

2n) Tracem una recta vertical fins que intersequi amb el gràfic

3r) Busquem quina coordenada y té aquest punt d'intersecció, en aquest cas y=5.

Per tant diríem que la imatge de 2 és 5. Les coordenades del punt del gràfic són (2,5).

Exemple 3.1.2.

Considerem la funció $y=g(x)=x^2+1$, és a dir la funció que a cada nombre x li associa el nombre que resulta d'elevar al quadrat i sumar 1 al resultat. Tenim l'expressió algebraica.

Anem a calcular les imatges dels valors -1, -2, 0, 1 i 2. Recordem que cal substituir la x pel valor i operar

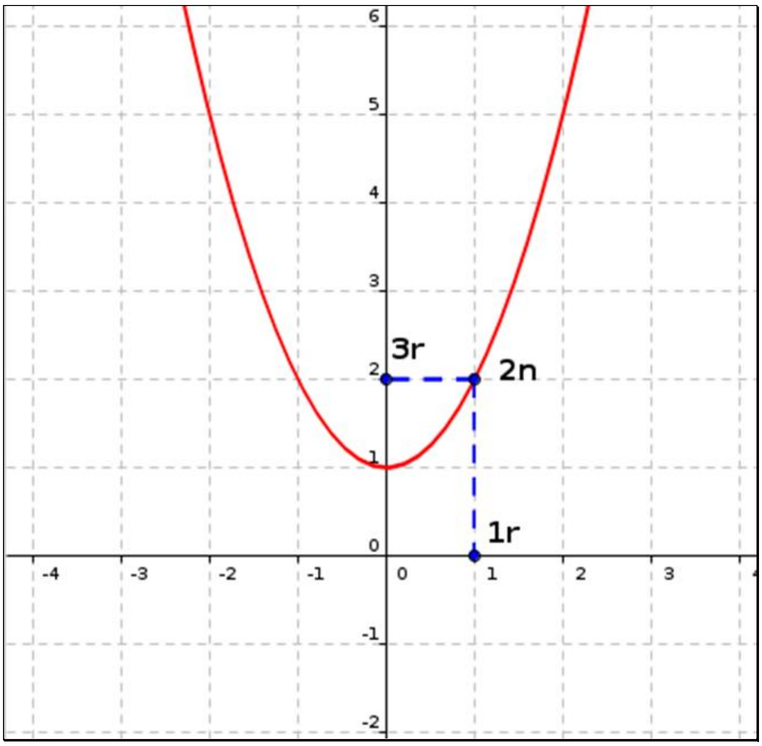
- Imatge de -1. $g(-1)= (-1)^2+1=1+1=2$. Per tant la imatge de -1 és 2. La funció passa pel punt (-1,2).
- Imatge de -2. $g(-2)= (-2)^2+1=4+1=5$. Per tant la imatge de -2 és 5. La funció passa pel punt (-2,5).

- Imatge de 0. $g(0)= (0)^2+1=0+1=1$. Per tant la imatge de 0 és 1. La funció passa pel punt (0,1).

- Imatge de 1. $g(1)= (1)^2+1=1+1=2$. Per tant la imatge de 1 és 2. La funció passa pel punt (1,2).

- Imatge de 2. $g(2)= (2)^2+1=4+1=5$. Per tant la imatge de 2 és 5. La funció passa pel punt (2,5).

Com ho faríem si el que tenim és el gràfic de la funció g , (en vermell a la imatge)? Calculem , per exemple , la imatge de x=1.



1r) Busquem sobre l'eix de les x (l'horitzontal) el valor 1.

2n) Tracem una recta vertical fins que intersequi amb el gràfic (en vermell).

3r) Busquem quina coordenada y (vertical) té aquest punt d'intersecció. En aquest cas és 2.

Per tant diríem que la imatge de 1 per la funció g és 2. El gràfic passa pel punt (1,2)

3.2.COM CALCULAR ANTIIMATGES D'UNA FUNCIÓ?

Si hem de calcular una antiimatge , el que tenim és la y i hem de trobar la x.

De la mateixa manera que abans pot ser que en tinguem la fórmula o bé que en tinguem el gràfic. Actuarem de forma diferent en un cas o amb l'altre.

Si tenim l'expressió algebraica substituirem la y pel valor que ens donin i resoldrem l'equació resultant. La o les solucions d'aquesta equació seran les antiimatges buscades. Si l'equació no té solució voldrà dir que el punt que busquem no té antiimatge.

Si tenim el gràfic de la funció i volem calcular l'antiimatge d'un punt donat seguirem aquests passos:

1r) A l'eix d'ordenades (el vertical) buscarem la y donada.

2n) Traçarem una recta horitzontal per aquest punt fins que intersequi amb el gràfic . (NOTA: si no interseca voldrà dir que el punt no té antiimatge)

3r) Buscarem quina coordenada x té cada punt d'intersecció trobat. (recordem que un punt pot tenir més d'una antiimatge)

Exemple 3.2.1.

Tornem a considerar la funció y= f(x)=3x-1

- Anem a calcular l'antiimatge de -3.

  Canviem la y per -3 , obtenim -3=3·x-1 ara cal resoldre aquesta equació

  -3x=-1+3----------→ -3x=2 --------→ x=-2/3

  Per tant -2/3 és l'antiimatge de -3 per la funció f. La funció passa pel punt (-2/3, -3)

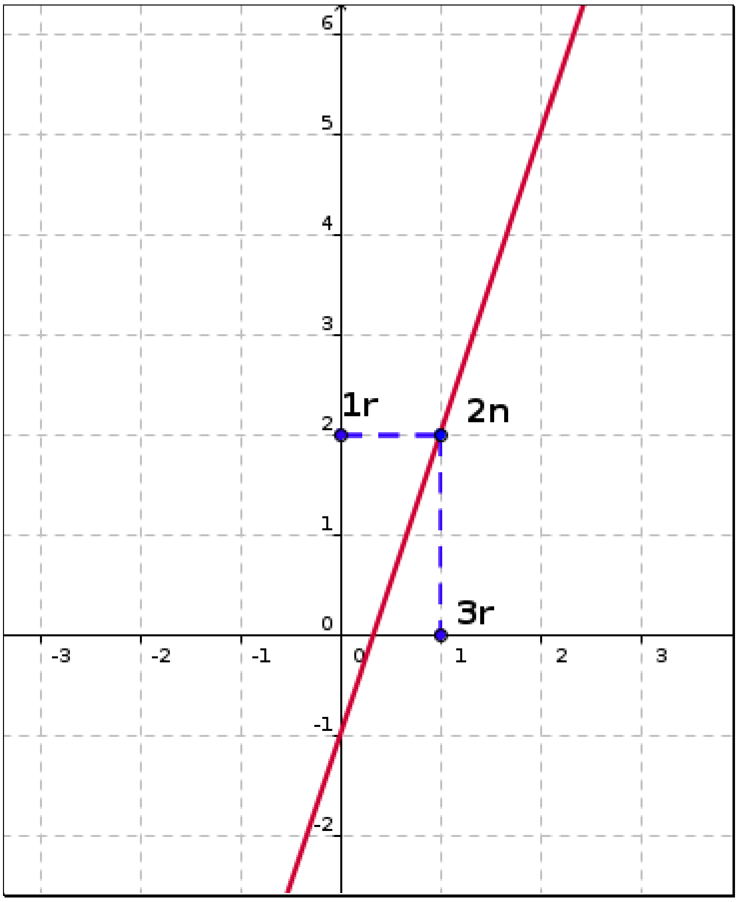
- Anem a calcular l'antiimatge de 2.

  Substituïm la y per 2   2= 3x-1 i ara resolem l'equació resultant.

  2= 3x-1 ----→ -3x= -1-2 ------→ -3x=-3 -----→ 3x=3------→x=3/3=1

  Per tant l'antiimatge de 2 és 1 i la funció passa pel punt (1,2)

Ara veiem com ho faríem si en tenim el gràfic de f (en vermell a la il-lustració de sota) Calculem l'antiimatge de 2.



1r) Busquem a l'eix vertical el valor 2.

2n) Tracem una recta horitzontal pel punt fins que intersequi amb el gràfic.

3r) Busquem quina abscissa té aquest punt d'intersecció (sobre l'eix horitzontal). En aquest cas és 1.

Així diríem que l'antiimatge de 2 per la funció f és 1, perquè el gràfic passa pel punt (1,2)

Exemple 3.2.2.

Calculem ara alguna antiimatge per la funció $y=g(x)=x^2+1$

- Quina és l'antiimatge per g de 1? Substituïm la y per 1 i resolem l'equació

  $1=x^2+1$ ---→ $x^2=1-1$ ---→ $x^2= 0$---→ $x=0$

  Per tant l'antiimatge de 1 és 0 I la funció g passa pel punt (0,1)

- Quina és l'antiimatge per g de 0? Substituïm la y per 0 i resolem l'equació

  $0=x^2+1$ ---→ $x^2=0-1$ ---→ $x^2= -1$---→ $x=\sqrt{-1} = \nexists$ no existeix , cap nombre elevat al quadrat dóna -1.

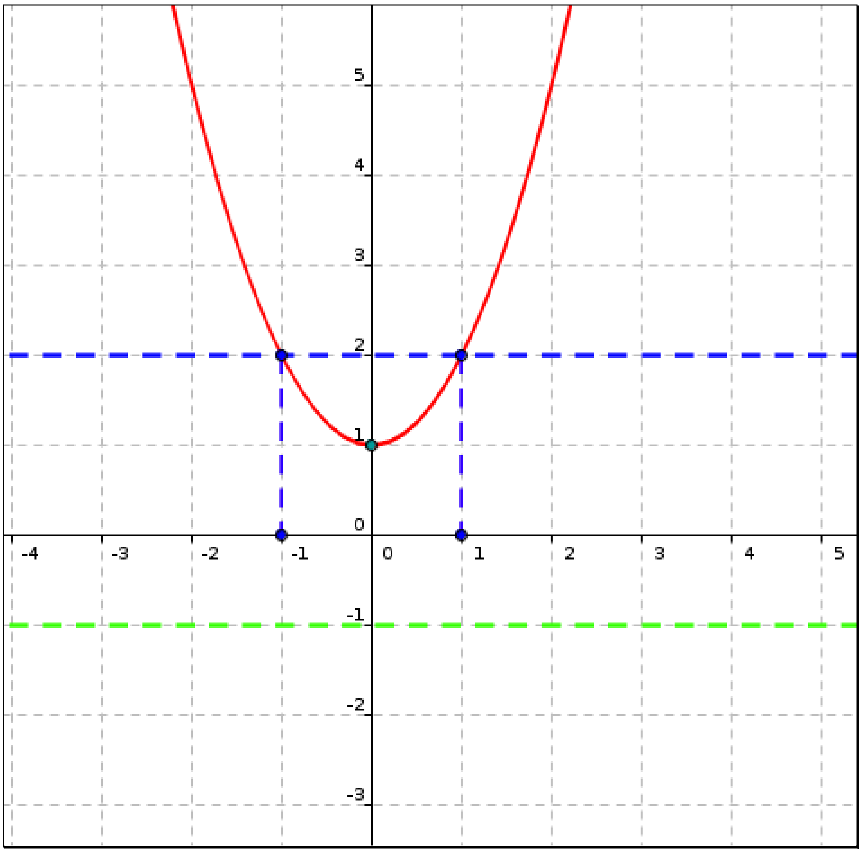
  Això significa que 0 no té cap antiimatge per aquesta funció. Cap nombre va a parar al 0.

- Quina és l'antiimatge per g de 2? Substituïm la y per 2 i resolem l'equació

  $2=x^2+1$ ---→ $x^2=2-1$ ---→ $x^2= 1$---→ $x=\pm\sqrt{1} = \pm 1$. Ara tenim 2 solucions doncs $(-1)^2=1$ i $1^2=1$. Per tant 2 té dues antiimatges per la funció g : 1 i -1.

  La funció passa pels punts (1,2) i (-1,2).

Fem-ho ara gràficament. El següent gràfic és el de la funció g(x). Anem a calcular les antiimatges de 2, de 1 i de -1.



Comencem per les antiimatges de 2.

1r) Busquem a l'eix vertical el valor 2.

2n)Tracem una recta horitzontal per aquest punt fins que intersequi amb el gràfic. En aquest cas tenim dos punts d'intersecció senyalats en blau.

3r)Busquem l'abscissa d'aquests dos punts d'intersecció. La del punt de l'esquerra és -1 i la del punt de la dreta és 1.

Per tant diríem que 2 té dues antiimatges per la funció g: -1 i 1. Doncs el gràfic passa pels punts (-1,2) i (1,2).

Busquem l'antiimatge de 1 per la funció g. Actuem de la mateixa manera.

1r) Busquem el valor 1 sobre l'eix de les y (vertical)

2n) En aquest cas no ens cal traçar cap recta horitzontal , doncs el punt d'intersecció amb el gràfic és el de l' eix.

3r) La coordenada x d'aquest punt és 0.

Per tant diríem que l'antiimatge de 1 per la funció g és 0 doncs el gràfic de g passa pel punt (0,1).

Busquem ara l'antiimatge de -1 per la mateixa funció g.

1r) Busquem el valor -1 sobre l'eix de les y (vertical)

2n) Tracem una recta horitzontal (en verd a la imatge) i mirem si interseca amb el gràfic. Observem que no. I per tant ja no continuem.

Això vol dir que -1 no té cap antiimatge per la funció g. És a dir que el gràfic no passa per cap punt d'ordenada -1.

4. PUNTS DE TALL AMB ELS EIXOS.

4.1 TALL AMB L'EIX D'ORDENADES

El punt de tall d'una funció amb l'eix d'ordenades és el punt on interseca el gràfic de la funció amb l'eix vertical. Si n'hi ha només n'hi ha un .Equival a trobar la imatge de x=0.

Per tant seguirem els mètodes explicats abans per trobar imatges,és a dir si tenim l'expressió algebraica substituïm la x per 0 i operem. Si tenim el gràfic només hem de trobar les coordenades del punt d'intersecció del gràfic amb l'eix vertical que sempre seran de tipus (0,y).

4.1 TALL AMB L'EIX D'ABSCISSES

El punt o punts de tall d'una funció amb l'eix d'abscisses són els punts d'intersecció del gràfic amb l'eix horitzontal. Pot ser que n'hi hagi més d'un , un o cap. Només cal trobar-ne les coordenades.

Els punts de l'eix horitzontal sempre són de tipus (x,0).

Per tant es tracta de trobar les antiimatges de 0 per la funció , utilitzant els mètodes explicats a l'apartat 3.És a dir substituïm la y per 0 i resolem l'equació obtinguda per a trobar la o les possibles x.