Matemàtiques aplicades a les ciències socials

1 Solucionari

Autors del llibre de l'alumne
Josep M. Guiteras i Piella
Jordi Besora i Torradeflot
Àngela Jané i Sanahuja

McGraw Hill Education

MADRID – BARCELONA – BOGOTÀ – BUENOS AIRES – CARACAS – GUATEMALA
MÈXIC – NOVA YORK – PANAMÀ – SAN JUAN – SANTIAGO – SÃO PAULO
AUCKLAND – HAMBURG – LONDRES – MILÀ – MONTREAL – NOVA DELHI – PARÍS
SAN FRANCISCO – SYDNEY – SINGAPUR – SAINT LOUIS – TÒQUIO – TORONTO

Matemàtiques aplicades a les ciències socials 1 · Batxillerat · Solucionari

No és permesa la reproducció total o parcial d'aquest llibre, ni el seu tractament informàtic, ni la transmissió de cap forma o por qualsevol mitjà, ja sigui electrònic, mecànic, per fotocòpia, per registre o d'altres mitjans. Adreceu-vos a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.conlicencia.com) si necessiteu fotocopiar o escanejar algun fragment d'aquesta obra.

Drets reservats © 2015, respecte de la primera edició en català, per:

McGraw-Hill/Interamericana de España, S.L.
Edificio Valrealty, 1.ª planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

Director general: Álvaro García Tejeda
Editors: Núria Egido, Elsa Tébar
Disseny d'interiors: Equip de disseny de McGraw-Hill
Il·lustracions: Luis Bogajo, Jordi Soto, Andreu Grau i Servei Gràfic NJR, S.L.U.
Composició: Servei Gràfic NJR, S.L.U.
Impressió: xxxxxx

IMPRÈS A ESPANYA-PRINTED IN SPAIN

Solucionari Llibre de l'alumne

Unitat 0. Una mica de tot 5
Activitats finals 5

Unitat 1. Nombres reals. 13
Activitats 13
Activitats finals 19

Unitat 2. Polinomis 22
Activitats 22
Activitats finals 30

Unitat 3. Funcions. 36
Activitats 36
Activitats finals 44

Unitat 4. Progressions i successions 50
Activitats 50
Activitats finals 55

Unitat 5. Funcions exponencial i logarítmica . 60
Activitats 60
Activitats finals 67

Unitat 6. Matemàtica financera 73
Activitats 73
Activitats finals 77

Unitat 7. Estadística descriptiva 82
Activitats 82
Activitats finals 86

Unitat 8. Distribucions bidimensionals. 91
Activitats 91
Activitats finals 96

Unitat 9. Probabilitat 102
Activitats 102
Activitats finals 105

Unitat 10. Distribució de probabilitat 110
Activitats 110
Activitats finals 118

Annex. Avaluacions. 123

Unitat 1 123
Unitat 2 124
Unitat 3 124
Unitat 4 126
Unitat 5 127
Unitat 6 128
Unitat 7 129
Unitat 8 130
Unitat 9 130
Unitat 10 131

Una mica de tot

Activitats finals

1. Expressa com una fracció irreductible de la unitat que hi ha entre parèntesis les magnituds següents:

a) 15 min (1 h)

b) 30 h (1 dia)

c) 75 cm (1 m)

d) 73 dies (1 any)

a) $\frac{1}{4}$ d'hora

b) $\frac{5}{4}$ de dia

c) $\frac{3}{4}$ de metre

d) $\frac{1}{45}$ d'any

2. Determina el valor de la lletra en cadascuna d'aquestes fraccions per tal que representin el mateix nombre racional que la fracció $\frac{4}{9}$:

a) $\frac{r}{63}$

b) $\frac{68}{s}$

c) $\frac{52}{t}$

d) $\frac{u}{-171}$

a) $\frac{r}{63} = \frac{4}{9} \rightarrow r = \frac{63 \cdot 4}{9} = 28$

b) $\frac{68}{s} = \frac{4}{9} \rightarrow s = \frac{68 \cdot 9}{4} = 153$

c) $\frac{52}{t} = \frac{4}{9} \rightarrow t = \frac{52 \cdot 9}{4} = 117$

d) $\frac{u}{-171} = \frac{4}{9} \rightarrow u = \frac{-4 \cdot 171}{9} = -76$

3. Són equivalents les fraccions $\frac{17}{13}$ i $\frac{323}{247}$?

Sí, perquè $17 \cdot 247 = 13 \cdot 323 = 4\,199$

4. Simplifica les fraccions següents:

a) $\frac{52}{91}$

b) $-\frac{121}{77}$

c) $\frac{350}{300}$

d) $-\frac{138}{174}$

a) $\frac{52}{91} = \frac{52 : 13}{91 : 13} = \frac{4}{7}$

b) $-\frac{121}{77} = \frac{121 : 11}{77 : 11} = -\frac{11}{7}$

c) $\frac{350}{300} = \frac{350 : 50}{300 : 50} = \frac{7}{6}$

d) $-\frac{138}{174} = \frac{138 : 6}{174 : 6} = -\frac{23}{29}$

5. Calcula l'expressió decimal d'aquestes fraccions i classifica els nombres decimals que obtinguis en exactes, periòdics purs o periòdics mixtos:

a) $\frac{17}{6}$

b) $\frac{-7}{11}$

c) $\frac{117}{50}$

d) $\frac{-45}{7}$

a) $\frac{17}{6} = 2{,}8\widehat{3}$ nombre decimal periòdic mixt.

b) $\frac{-7}{11} = -0{,}\widehat{63}$ nombre decimal periòdic pur.

c) $\frac{117}{50} = 2{,}34$ nombre decimal exacte.

d) $\frac{-45}{7} = -6{,}\widehat{428\,571}$ nombre decimal periòdic pur.

6. Determina la fracció generatriu dels nombres decimals següents:

a) $2{,}\widehat{63}$

b) $1{,}02\widehat{3}$

c) $-0{,}48$

d) $1{,}\widehat{441}$

a) $f = 2{,}\widehat{63} = 2{,}636\,3...$

$100f = 263{,}63...$

$-f = -2{,}63...$

$99f = 261 \rightarrow f = \frac{261}{99} = \frac{29}{11}$

b) $f = 1{,}02\widehat{3} = 1{,}0233...$

$1\,000f = 1\,023{,}3...$

$-100f = -102{,}3...$

$900f = 921 \rightarrow f = \dfrac{921}{900} = \dfrac{307}{300}$

c) $f = -0{,}48 \rightarrow 100f = -48 \rightarrow f = -\dfrac{48}{100} = \dfrac{-12}{25}$

d) $f = 1{,}\widehat{441} = 1{,}441441...$

$1\,000f = 1\,441{,}441...$

$-f = \quad -1{,}441...$

$999f = 1\,440 \rightarrow f = \dfrac{1\,440}{999} = \dfrac{160}{111}$

7. El $63{,}\widehat{63}$ % dels 88 alumnes de 1r de Batxillerat d'un institut van aprovar totes les matèries. A quants alumnes els va quedar alguna matèria pendent?

$f = 63{,}\widehat{63} = 63{,}6363...$

$100f = 6\,363{,}63...$

$-f = \quad -63{,}63...$

$99f = 6\,300 \rightarrow f = \dfrac{6\,300}{99} = \dfrac{700}{11}$

El $63{,}\widehat{63}$ % és el $\dfrac{700}{11}$ %

Van aprovar:

$$\frac{\frac{700}{11}}{100} \text{ de } 88 = \frac{7}{11} \text{ de } 88 = \frac{7 \cdot 88}{11} = 56 \text{ alumnes}$$

A $88 - 56 = 32$ alumnes els va quedar alguna matèria pendent.

8. Calcula el resultat de les operacions següents:

a) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{2} : \dfrac{3}{4}$

b) $2 + \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$

c) $\dfrac{4}{3} : \dfrac{2}{3} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}$

d) $\dfrac{0{,}\widehat{36} - 0{,}2\widehat{27}}{1 - \dfrac{17}{22}}$

e) $\dfrac{3\left(2 - \dfrac{1}{6}\right) - \dfrac{11}{17} : \dfrac{12}{17} - 1}{\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{12}}$

a) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{2} : \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{19}{15}$

b) $2 + \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = 2 + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9}{4} = 2 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{11}{4}$

c) $\dfrac{4}{3} : \dfrac{2}{3} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3} = 2 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{15}{8}$

d) $\dfrac{0{,}\widehat{36} - 0{,}2\widehat{27}}{1 - \dfrac{17}{22}} = \dfrac{\dfrac{4}{11} - \dfrac{5}{22}}{\dfrac{5}{22}} = \dfrac{3}{22} : \dfrac{5}{22} = \dfrac{3}{5}$

e) $\dfrac{3\left(2 - \dfrac{1}{6}\right) - \dfrac{11}{17} : \dfrac{12}{17} - 1}{\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{12}} =$

$= \dfrac{3 \cdot \dfrac{11}{6} - \dfrac{11}{12} - 1}{1} = \dfrac{43}{12}$

9. Si $p = \dfrac{2}{3}$, $q = -\dfrac{1}{2}$ i $r = \dfrac{3}{5}$, determina el valor numèric de les expressions algèbriques següents:

a) $(p+q)^2$

b) $(p-q)^2$

c) $(q+r)(q-r)$

d) $3p - 2q : 5r$

a) $(p+q)^2 = \left(\dfrac{2}{3} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 =$

$= \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + 2\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{36}$

b) $(p-q)^2 = \left(\dfrac{2}{3} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 =$

$= \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 2\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{49}{36}$

c) $(q+r)(q-r) = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5}\right)\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{11}{100}$

d) $3p - 2q : 5r = 3\left(\dfrac{2}{3}\right) - 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) : 5\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{7}{3}$

10. Quin és el nombre que multiplicat per $\dfrac{2}{3}$ dóna $\dfrac{7}{4}$?

I el que sumat a $\dfrac{4}{5}$ dóna $\dfrac{1}{2}$?

$$\frac{2}{3}x = \frac{7}{4} \rightarrow x = \frac{7}{4} : \frac{2}{3} = \frac{21}{8}$$

$$\frac{4}{5} + y = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{10}$$

11. Es venen els $\frac{2}{3}$ d'una peça de roba i, després, la meitat del que quedava. Quina fracció de peça s'ha venut? Quina fracció en queda encara per vendre?

Es venen $\frac{2}{3}$ de la peça $\rightarrow$ queda per vendre'n $\frac{1}{3}$.

Es ven $\frac{1}{2}$ del que queda $\rightarrow$

se'n ven $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

En total s'han venut $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ de la peça de roba. Encara queda per vendre'n $\frac{1}{6}$.

12. Un trajecte es divideix en tres etapes. A la primera es recorren $\frac{2}{5}$ parts del total; a la segona, la meitat del que queda, i a la tercera, els 22,5 km que encara resten. Quina és la longitud del trajecte? Quants quilòmetres es recorren a la primera etapa?

Si x són els quilòmetres totals del trajecte,

$$x = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{5}x\right) + 22{,}5 \rightarrow x = 75 \text{ km}$$

El trajecte és de 75 km, i a la primera etapa es recorren $\frac{2}{5}x = \frac{2}{5} \cdot 75 = 30$ km.

13. Una aixeta omple un dipòsit en 3 hores i una altra l'omple en 4. Quina part del dipòsit omplen en una hora les dues aixetes obertes alhora? Si el dipòsit està buit i s'obren simultàniament les dues aixetes, quant trigaran a omplir-lo?

En una hora les dues aixetes omplen $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ del dipòsit. Trigaran a omplir-lo $\frac{12}{7}$ h, que és 1 h 42 min 51 s.

14. Una pastilla conté el 20 % d'aspirina, el 40 % de vitamina C i la resta és excipient. Si té una massa de 2,5 grams, quants mil·ligrams conté de cada component?

2,5 g = 2 500 mg

20 % de 2 500 mg = 500 mg d'aspirina

40 % de 2 500 mg = 1 000 mg de vitamina C

2 500 − (500 + 1 000) = 1 000 mg d'excipient

15. La factura de la reparació d'un cotxe és de 578,96 €. Si sabem que l'IVA que s'ha aplicat és del 21 %, quin era l'import de la factura sense IVA?

$$\left(1 + \frac{21}{100}\right)x = 578{,}96 \rightarrow x = 478{,}48 \text{ €}$$

16. Un tipus de llet produeix $\frac{4}{15}$ de la seva massa en nata, i la nata els $\frac{7}{25}$ de la seva massa en mantega. Quina fracció de la massa de la llet representa la mantega? Quants quilograms de mantega es poden obtenir a partir de 175 kg d'aquesta llet?

La mantega representa $\frac{7}{25} \cdot \frac{4}{15} = \frac{28}{375}$ del pes de la llet.

Els $\frac{28}{375}$ de 175 kg són $\frac{28 \cdot 175}{375} = 13{,}07$ kg de mantega.

17. Les accions d'una empresa que cotitza a la borsa van pujar el 2,5 % dilluns i el 4,8 % dimarts. Si quan va començar la sessió borsària de dilluns una acció d'aquesta empresa costava 12,84 €, quin n'és el preu quan es va tancar la sessió de dimarts? Quants diners va guanyar en aquests dos dies un accionista que tenia títols de l'empresa per valor de 10 000 €?

En tancar la sessió de dimarts, una acció d'aquesta empresa costava:

$$12{,}84 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}048 = 13{,}79 \text{ €}$$

En aquests dos dies, els 10 000 € invertits es van transformar en:

$$10\,000 \cdot 1\,025 \cdot 1{,}048 = 10\,742 \text{ €}$$

L'accionista va guanyar:

$$10\,742 - 10\,000 = 742 \text{ €}$$

18. Es col·loquen 2 500 € en una llibreta a termini que garanteix el 4,2 % de rèdit anual durant 3 anys. Si en cap moment se'n retiren els interessos, quants diners hi haurà a la llibreta un cop hagin transcorregut 3 anys des que s'ha fet la imposició?

A la llibreta hi haurà $2\,500 \cdot 1{,}042^3 = 2\,828{,}42$ €.

19. L'índex de la borsa inicia la setmana en 100 i el seu comportament durant els cinc primers dies és el següent: dilluns baixa el 15,2 %, dimarts puja el 7,5 %, dimecres puja el 16 %, dijous baixa el 12,4 % i divendres puja el 18,6 %. Amb quin índex tanca la borsa la setmana?

$$100\left(1 - \frac{15{,}2}{100}\right) = 84{,}8$$

$$84{,}8\left(1 + \frac{7{,}5}{100}\right) = 91{,}16$$

$$91{,}16\left(1 + \frac{16}{100}\right) = 105{,}74$$

$$105,75\left(1-\frac{12,4}{100}\right)=92,637$$

$$92,637\left(1+\frac{18,6}{100}\right)=109,87$$

20. Resol les equacions següents:

a) $(2x-1)^2-(2x+1)^2=24$

b) $2-\dfrac{3(1-x)}{14}=\dfrac{x+3}{7}$

c) $\dfrac{x-5}{2x+1}=\dfrac{2x+3}{4x+7}$

d) $\sqrt{2}\,x-1=x-\sqrt{2}$

e) $1-\dfrac{4+2x}{13}=0$

a) $(2x-1)^2-(2x+1)^2=24 \rightarrow$
$4x^2-4x+1-4x^2-4x-1=24 \rightarrow$
$-8x=24 \rightarrow x=-3$

b) $2-\dfrac{3(1-x)}{14}=\dfrac{x+3}{7} \rightarrow$
$28-3+3x=2x+6 \rightarrow x=-19$

c) $\dfrac{x-5}{2x+1}=\dfrac{2x+3}{4x+7} \rightarrow$
$(x-5)(4x+7)=(2x+1)(2x+3) \rightarrow$
$4x^2+7x-20x-35=4x^2+6x+2x+3 \rightarrow$
$-13x-35=8x+3 \rightarrow -21x=38 \rightarrow x=-\dfrac{38}{21}$

d) $\sqrt{2}x-1=x-\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}x-x=1-\sqrt{2} \rightarrow$
$\left(\sqrt{2}-1\right)x=1-\sqrt{2} \rightarrow$
$x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{-\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}-1}=-1$

e) $1-\dfrac{4+2x}{13}=0 \rightarrow \dfrac{13-4-2x}{13}=0 \rightarrow$
$9-2x=0 \rightarrow 2x=9 \rightarrow x=\dfrac{9}{2}$

21. Soluciona les equacions següents. Escriu prèviament els seus primers membres en forma de producte de factors.

a) $x^2-6x=0$

b) $x(x-5)-2(x-5)=0$

c) $(x+2)^2-(x+2)(3x-1)=0$

a) $x^2-6x=0 \rightarrow x(x-6)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x-6=0 \rightarrow x_2=6 \end{cases}$

b) $x(x-5)-2(x-5)=0 \rightarrow$
$(x-5)(x-2)=0 \begin{cases} x-5=0 \rightarrow x_1=5 \\ x-2=0 \rightarrow x_2=2 \end{cases}$

c) $(x+2)^2-(x+2)(3x-1)=0 \rightarrow$
$(x+2)(x+2-3x+1)=0 \rightarrow$
$(x+2)(3-2x)=0 \rightarrow \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x_1=-2 \\ 3-2x=0 \rightarrow x_2=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

22. Sabem que $x=2$ i $y=-3$ és una de les solucions de l'equació $3x+by=10$. Calcula b i esbrina una altra solució de l'equació.

$3x+by=10 \xrightarrow{x=2,\ y=-3} 3\cdot 2+b\cdot(-3)=10 \rightarrow$
$6-3b=10 \rightarrow b=-\dfrac{4}{3}$

Resposta oberta. Per exemple: $x=\dfrac{10}{3}$, $y=0$.

23. Determina tres solucions de l'equació:

$$2x-3y+z=15$$

Resposta oberta. Per exemple: $x=0$, $y=0$, $z=15$;
$x=\dfrac{15}{2}$, $y=0$, $z=0$; $x=0$, $y=-5$, $z=0$.

24. Resol les equacions següents:

a) $5x^2-75=0$

b) $7x^2+15x=0$

c) $2x^2-x-1=0$

d) $\dfrac{2(x+2)}{3}=x(x-3)$

e) $(3x-5)^2=0$

f) $x^3-5x^2+6x=0$

g) $\dfrac{4}{x}=\dfrac{x}{9}$

h) $x^2+4x+5=0$

a) $5x^2-75=0 \rightarrow 5x^2=75 \rightarrow x^2=15 \rightarrow x=\pm\sqrt{15}$

b) $7x^2+15x=0 \rightarrow$
$x(7x+15)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ 7x+15=0 \rightarrow x_2=-\dfrac{15}{7} \end{cases}$

c) $2x^2-x-1=0 \rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=$
$=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{4}=\dfrac{1\pm 3}{4} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

d) $\dfrac{2(x+2)}{3} = x(x-3) \rightarrow 2x + 4 = 3x^2 - 9x \rightarrow$

$3x^2 - 11x - 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{11 \pm \sqrt{121+48}}{6} =$

$= \dfrac{11 \pm 13}{6} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

e) $(3x-5)^2 = 0 \rightarrow 3x - 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{3}$ (solució doble).

f) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \rightarrow$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

g) $\dfrac{4}{x} = \dfrac{x}{9} \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$

h) $x^2 + 4x + 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

L'equació no té solucions reals.

25. Determina el valor o els valors de *b* per als quals l'equació $x^2 - bx + 9 = 0$ té:

a) Una solució doble.

b) Dues solucions reals diferents.

c) No té solucions reals.

$$x^2 - bx + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 36}}{2}$$

a) $b^2 - 36 = 0 \rightarrow b = \pm 6$

b) $b^2 - 36 > 0 \rightarrow b < -6$ o $b > 6$

c) $b^2 - 36 < 0 \rightarrow -6 < b < 6$

26. Quantes solucions reals té l'equació $x^2 + y^2 = 0$? I l'equació $x + y = 0$? Raona les respostes.

L'equació $x^2 + y^2 = 0$ té una sola solució real: $x = y = 0$.

En canvi, qualsevol parell de nombres reals oposats, $x = -y$, és una solució de l'equació $x + y = 0$.

27. Resol les equacions següents:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $(3x + 1)(x^4 - 16) = 0$

c) $6x^4 + 7x^2 + 2 = 0$

d) $(x^2 - 4)^2 = 1$

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 13t + 36 = 0$

$t = \dfrac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \dfrac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = 4 \end{cases}$

$x = \pm\sqrt{t} \rightarrow x = \pm 3;\ x = \pm 2$

b) $(3x + 1)(x^4 - 16) = 0$

$\begin{cases} 3x + 1 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{3} \\ x^4 - 16 = 0 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2 \end{cases}$

c) $6x^4 + 7x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} 6t^2 + 7t + 2 = 0$

$t = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{12} = \dfrac{-7 \pm 1}{12} \begin{cases} t_1 = -\dfrac{1}{2} \\ t_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$x = \pm\sqrt{t} \rightarrow$ l'equació no té solucions reals.

d) $(x^2 - 4)^2 = 1 \rightarrow x^2 - 4 = \pm 1 \rightarrow$

$\begin{cases} x^2 - 4 = 1 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ x^2 - 4 = -1 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

28. Esbrina la solució de les equacions següents:

a) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

b) $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}$

c) $\sqrt{2x - 1} + 2 = x$

d) $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{3x - 12} = \sqrt{5x - 16}$

a) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1 \rightarrow x - 1 = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow$

$(x - 1)^2 = 25 - x^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 =$

$= 25 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

La solució de l'equació és $x = 4$ ($x = -3$ és solució fictícia).

b) $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x} \rightarrow 36 + x = \left(2 + \sqrt{x}\right)^2 \rightarrow$

$36 + x = 4 + 4\sqrt{x} + x \rightarrow$

$32 = 4\sqrt{x} \rightarrow 8 = \sqrt{x} \rightarrow x = 64$

c) $\sqrt{2x - 1} + 2 = x \rightarrow \sqrt{2x - 1} = x - 2 \rightarrow$

$2x - 1 = (x - 2)^2 \rightarrow 2x - 1 =$

$= x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

La solució és $x = 5$.

d) $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{3x - 12} = \sqrt{5x - 16} \rightarrow$

$\left(\sqrt{2x - 4} - \sqrt{3x - 12}\right)^2 = 5x - 16 \rightarrow$

$2x - 4 - 2\sqrt{(2x-4)(3x-12)} + 3x - 12 =$

$= 5x - 16 \rightarrow -2\sqrt{(2x-4)(3x-12)} = 0 \rightarrow$

$(2x-4)(3x-12) = 0 \rightarrow$

$2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

$3x - 12 = 0 \rightarrow x = 4$

La solució és $x = 4$.

29. Esbrina l'edat d'una persona si sabem que d'aquí a 4 anys serà un quadrat perfecte i que fa 38 anys era l'arrel quadrada d'aquest quadrat.

$x + 4 = (x - 38)^2 \rightarrow x_1 = 32, x_2 = 45$

L'única solució vàlida és 45 anys.

30. El sistema $\left.\begin{array}{l} 2x + 7y = -3 \\ 4x + ky = -6 \end{array}\right\}$ **és compatible determinat.**

Quins valors pot tenir *k*?

Si és compatible determinat, $\frac{2}{4} \neq \frac{7}{k}$. Per tant, $k \neq 14$.

31. El sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -\frac{1}{6} \end{array}\right\}$$

es transforma en un sistema lineal mitjançant els canvis $\frac{1}{x} = a$ i $\frac{1}{y} = b$. Una vegada resolt el sistema lineal, només cal desfer els canvis efectuats per esbrinar la solució del sistema original. Aplica aquest procediment per resoldre el sistema proposat.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -\frac{1}{6} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b = \frac{5}{6} \\ a - 2b = -\frac{1}{6} \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$$

Si desfem el canvi: $x = 2$, $y = 3$.

32. Resol el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x = y = z \\ 3x - 2y + z = 8 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = y = z \\ 3x - 2y + z = 8 \end{array}\right\} \rightarrow 3x - 2x + x = 8 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$$

per tant, $x = 4$, $y = 4$, $z = 4$.

33. Esbrina la solució dels sistemes següents:

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} xy = 6 \\ x + y = 3\sqrt{3} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 6 \\ x - \frac{y+1}{4} = 1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{array}\right\}$

$y = 8 - x$

$x \cdot (8 - x) = 15 \rightarrow 8x - x^2 = 15 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$ $\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{array}$

Si $x = 5 \rightarrow y = 3$, i si $x = 3 \rightarrow y = 5$

$x = 5, y = 3; x = 3, y = 5$

b) $\left.\begin{array}{l} xy = 6 \\ x + y = 3\sqrt{3} \end{array}\right\}$

$y = 3\sqrt{3} - x$

$x(3\sqrt{3} - x) = 6 \rightarrow 3\sqrt{3}x - x^2 = 6 \rightarrow$

$x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$

$x = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 24}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2}$ $\begin{array}{l} x_1 = 2\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{array}$

Si $x = 2\sqrt{3} \rightarrow y = \sqrt{3}$; si $x = \sqrt{3} \rightarrow y = 2\sqrt{3}$

$x = 2\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}, y = 2\sqrt{3}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 6 \\ x - \frac{y+1}{4} = 1 \end{array}\right\}$

$2x - y = 6 \rightarrow -y = 6 - 2x \rightarrow y = 2x - 6$

$x - \frac{y+1}{4} = 1 \rightarrow 4x - y - 1 = 4 \rightarrow 4x - y = 5$

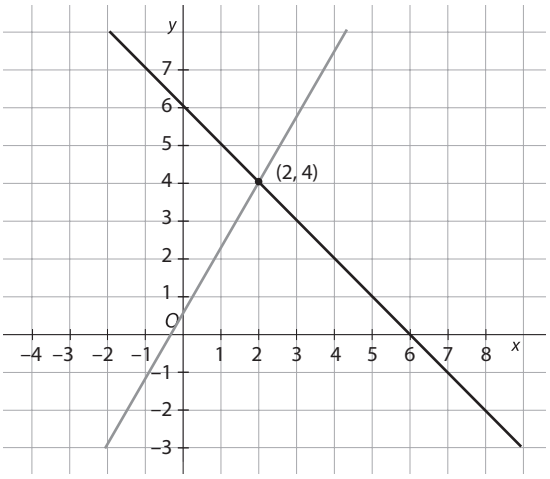
$4x - (2x - 6) = 5 \rightarrow 4x - 2x + 6 = 5 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow$

$x = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 6 = -7$

34. Resol gràficament els sistemes:

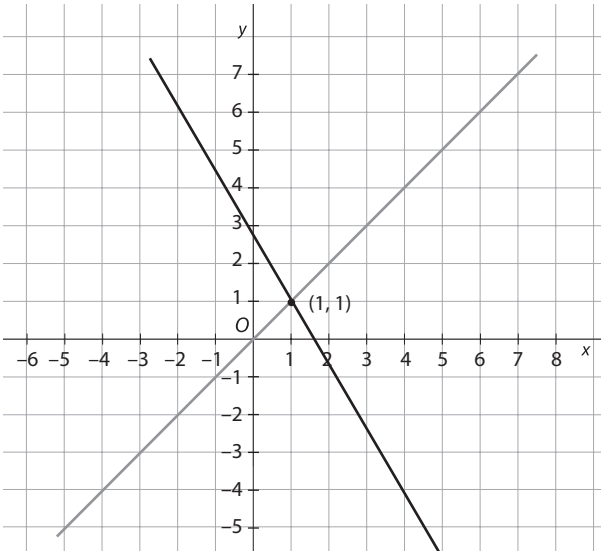
a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 6 \\ 2x = y \end{array}\right\}$ ***b)*** $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 6 \\ 2x = y \end{array}\right\}$



$x = 2,\ y = 4$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$



$x = 1,\ y = 1$

35. Un grup d'amics es reparteixen a parts iguals els 720 € que els ha tocat a la loteria de la Grossa de Cap d'any. Determina el nombre d'amics que componen el grup si sabem que, si tres d'ells haguessin renunciat al premi, cadascun dels altres hauria cobrat 20 € més del que ha cobrat.

$$\frac{720}{x} + 20 = \frac{720}{x-3} \rightarrow x_1 = -9,\ x_2 = 12$$

Són 12 amics.

36. Els perímetres de dos quadrats es diferencien en 8 cm i les seves àrees, en 20 cm². Calcula la longitud dels costats de cada quadrat.

Si anomenem p_1, A_1 i c_1 el perímetre, l'àrea i el costat del primer quadrat i p_2, A_2 i c_2 el perímetre, l'àrea i el costat del segon quadrat,

$$\left.\begin{array}{l} p_1 - p_2 = 8 \\ A_1 - A_2 = 20 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4c_1 - 4c_2 = 8 \\ c_1^2 - c_2^2 = 20 \end{array}\right\} \rightarrow c_1 = 6, c_2 = 4$$

Els costats del quadrats mesuren 4 i 6 cm respectivament.

37. Quants nombres de quatre xifres diferents es poden escriure amb les 9 xifres significatives?

$$V_{9,\,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3\,024$$

38. Resol l'equació:

$$V_{x,\,3} - VR_{x,\,3} + 65 = 0$$

Recorda que *x* només pot ser un nombre natural.

$$V_{x,\,3} - VR_{x,\,3} + 65 = 0 \rightarrow x\,(x-1)\,(x-2) - x^3 + 65 = 0$$

$$-3x^2 + 2x + 65 = 0 \rightarrow x = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = -\dfrac{13}{3} \end{array}\right.$$

Només és solució de l'equació proposada $x = 5$.

39. Per fer l'alineació d'un equip de futbol necessitem 11 jugadors i en tenim 22. Quantes alineacions es poden fer si cada jugador pot ocupar qualsevol posició? I si dos d'ells només poden jugar-hi de porters i sis només poden fer-hi de defenses?

$C_{22,\,11} = 705\,432$ alineacions diferents.

Si 8 estan fixats, en queden 14. Suposem que a l'alineació hi ha 4 defenses, per tant queden 6 posicions per triar:

$C_{14,\,6} = 3\,003$

Dels 6 defenses cal triar-ne 4:

$C_{6,\,4} = 15$

Dels 2 porters cal triar-ne 1:

$C_{2,\,1} = 2$

El nombre d'alineacions diferents és: $2 \cdot 15 \cdot 3\,003 = 90\,090$

40. En una cursa participen 8 corredors. De quantes maneres diferents poden creuar la línia d'arribada tenint en compte que no n'arriben dos al mateix temps? I en cas que dos arribin al mateix temps?

$P_8 = 8! = 40\,320$ maneres diferents de creuar la línea d'arribada.

Si dos arriben al mateix temps serà:

$$P_7 = 7! = 5\,040$$

41. Forma totes les paraules possibles, tinguin o no sentit, amb les lletres de la paraula *PERA*. Quantes n'hi ha?

Hi ha: $P_4 = 4! = 24$ paraules possibles. Són:

AEPR, AERP, APER, APRE, AREP, ARPE, EAPR, EARP, EPAR, EPRA, ERAP, ERPA, PAER, PARE, PEAR, PERA, PRAE, PREA, RAEP, RAPE, REAP, REPA, RPAE, RPEA.

42. Determina el valor de *n* en cadascuna de les igualtats següents:

***a*)** $n! = 120$ ***b*)** $C_{n,2} = 21$

***c*)** $V_{4,n} = 24$ ***d*)** $VR_{n,3} = 64$

a) $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$n = 5$

b) $C_{n,2} = \binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 21$

$n = 7$

c) $V_{4,n} = 4(4-1)\ldots(4-n+1) = 24$

$n = 4$

d) $VR_{n,3} = n^3 = 64$

$n = 4$

43. Escriu totes les ordenacions possibles de les lletres de la paraula *PASSADA*. Quantes n'hi ha?

Hi ha: $P_7^{2,\,3,\,1,\,1} = \dfrac{7!}{2!\ 3!} = 420$ ordenacions possibles.

44. Vint persones van a una festa i totes s'encaixen la mà per saludar-se. Quantes encaixades de mà s'han fet?

Cada encaixada és la tria de 2 persones entre 20.

$C_{20,\,2} = 190$ encaixades.

45. D'una baralla de 40 cartes se'n reparteixen 3 a cada jugador. Quants jocs diferents pot rebre un dels jugadors?

Tria de 3 cartes de 40:

$$C_{40,\,3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2} = 9\,880 \text{ jocs diferents}$$

46. Amb les xifres 2, 4, 6 i 8, quants nombres de tres xifres diferents es poden escriure? I quants nombres de tres xifres?

Es poden escriure 24 nombres de tres xifres diferents i 64 nombres de tres xifres.

47. En una cursa hi participen set corredors de l'equip *A* i deu de l'equip *B*. Si tots ells acaben la cursa, determina de quantes maneres diferents ho poden fer si:

a) **Els dos primers són de l'equip *A*.**

b) **Els tres primers són de l'equip *B*.**

c) **Tots els de l'equip *A* arriben abans que els de l'equip *B*.**

a) $7 \cdot 6 \cdot 15! = 54\,922\,323\,456\,000$

b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 14! = 117\,690\,693\,120\,000$

c) $7! \cdot 10! = 18\,289\,152\,000$

48. Quants nombres senars de quatre xifres diferents es poden formar amb les xifres 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6?

360 nombres

49. Calcula el nombre de paraules, amb sentit o sense, que es poden escriure amb totes les lletres de la paraula *MATEMÀTIQUES*.

Si no distingim entre la À i la A, tenim:

$$P_{12}^{2,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{12!}{2!2!2!2!} = 29\,937\,600 \text{ paraules}$$

Unitat 1. Nombres reals

Activitats

1. Calcula la longitud dels segments indicats a continuació. Expressa'n el resultat de manera exacta i utilitza la calculadora per obtenir-ne una aproximació arrodonida a les centèsimes:

a) La diagonal *d* d'un rectangle de costats 3 i 5 cm.

b) El diàmetre *d'* d'una circumferència de 10 cm de longitud.

c) L'altura *h* d'un triangle equilàter de 4 cm de costat.

d) L'altura *h'* d'un con que mesura 6 cm de radi i 9 cm de generatriu.

a) Diagonal: d

$$d = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} =$$
$$= \sqrt{34}\text{ cm} \simeq 5{,}83\text{ cm}$$

b) Diàmetre: d'

$$d' = \frac{L}{\pi} = \frac{10}{\pi}\text{ cm} \simeq 3{,}18\text{ cm}$$

c) Altura: h

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}\text{ cm} =$$
$$= 2\sqrt{3}\text{ cm} \simeq 3{,}46\text{ cm}$$

d) Altura: h'

$$h' = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{45}\text{ cm} =$$
$$= 3\sqrt{5}\text{ cm} \simeq 6{,}72\text{ cm}$$

2. El costat més petit d'un rectangle auri mesura 2 cm. Quant mesura l'altre costat? Expressa'n el resultat de manera exacta i amb una aproximació arrodonida a les dècimes.

Mesura 2ϕ, és a dir,

$$2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}\text{ cm} \simeq 3{,}2\text{ cm}$$

3. Sabent que $PQ = PS = 1$ dm, demostra que el segment QR mesura $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ dm (Fig. 1.5).

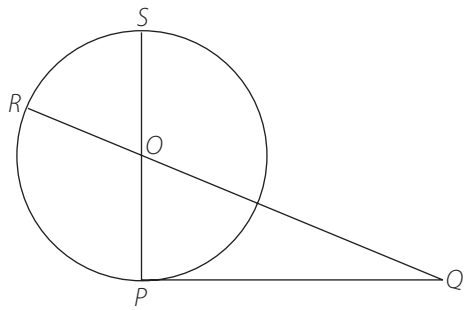


Fig. 1.5

$$QO = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\text{ dm}$$

$$QR = QO + OR = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\text{ dm}$$

4. Classifica els nombres següents segons si són racionals o irracionals:

a) $2{,}04\widehat{5}$ **b) $-3{,}880\,800\,800\,08\ldots$**

c) $1{,}\widehat{9}$ **d) $\frac{113}{114}$**

e) $4{,}313\,113\,111\,3\ldots$ **f) $0{,}\overline{58421}$**

a) Racional b) Irracional

c) Racional d) Racional

e) Irracional f) Racional

5. Indica quins d'aquests nombres són irracionals:

a) $\sqrt{25}$ **b) $1 + \pi$**

c) $\sqrt{5} + 3$ **d) $5e$**

e) $3 + 2\sqrt{49}$ **f) $7\sqrt{5}$**

g) $\sqrt{16 + 9}$ **h) $\sqrt{25 + 36}$**

i) $\sqrt{2(16 + 9)}$

a) Racional b) Irracional

c) Irracional d) Irracional

e) Racional f) Irracional

g) Racional h) Irracional

i) Irracional

6. Per què el nombre $\frac{1{,}\widehat{2} + 0{,}25}{0{,}1\widehat{6}}$ no pot ser irracional?

No pot ser irracional perquè és el resultat de sumar i dividir nombres que són racionals.

7. Calcula l'àrea d'un cercle de 4 cm de radi prenent els valors següents de π:

a) L'aproximació per defecte 3,1415.

b) L'aproximació per excés 3,1416.

En quin dels dos casos has obtingut una aproximació millor a la mesura real de la superfície d'aquest cercle? Per què?

a) $A = \pi r^2 \simeq 3{,}1415 \cdot 4^2 = 50{,}264\text{ cm}^2$

b) $A = \pi r^2 \simeq 3{,}1416 \cdot 4^2 = 50{,}2656\text{ cm}^2$

La segona aproximació és més bona que la primera, ja que l'error relatiu de l'aproximació per excés (0,0002) del nombre π és menor que l'error relatiu de l'aproximació per defecte (0,003).

8. Expressa de manera exacta:

a) La longitud d'una circumferència de 6 cm de diàmetre.

b) L'àrea lateral d'un cilindre de 2 cm de radi i 5 cm de generatriu.

c) El volum d'un con de 5 cm de radi i 13 cm de generatriu.

a) $L = 6\pi$ cm

b) $A_{lat} = 2\pi rg = 20\pi$ cm²

c) L'altura del con mesura:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3$$

9. S'ha aconseguit determinar que el radi d'una circumferència mesura $\frac{4}{\pi}$ cm. Se'n pot conèixer amb exactitud la longitud? I l'àrea del cercle que limita? Justifica la resposta fent els càlculs corresponents.

La longitud de la circumferència es pot conèixer amb exactitud, perquè:

$$L = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 8 \text{ cm}$$

En canvi, només podem saber un valor aproximat de l'àrea del cercle corresponent, ja que

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi} \text{ cm}^2$$

i $\frac{16}{\pi}$ és un nombre irracional.

$$A = \frac{16}{\pi} \text{ cm}^2 \simeq 5{,}09 \text{ cm}^2$$

10. Quant mesura la diagonal d'un cub de 2 cm d'aresta? Expressa'n el resultat de manera exacta i aproxima'l a les centèsimes.

Diagonal: D

$$D = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \simeq 3{,}46 \text{ cm}$$

11. La longitud d'una circumferència mesura 10π cm.

a) Expressa'n el resultat aproximat a les centèsimes.

b) Quant mesura el radi d'aquesta circumferència?

c) Calcula l'àrea del cercle que limita i expressa-la de manera exacta.

a) $L \simeq 31{,}42$ cm

b) $r = \frac{L}{2\pi} = 5$ cm

c) $A = \pi r^2 = 25\pi$ cm²

12. Esbrina cinc nombres racionals compresos entre $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$, i ordena'ls de més petit a més gran.

Resposta oberta. Per exemple:

$$0{,}51 < 0{,}54 < 0{,}6 < 0{,}63 < 0{,}65$$

13. Entre quins nombres enters consecutius se situa cadascun d'aquests nombres irracionals?

a) $\sqrt{21}$ **b)** $-\sqrt{54}$

c) $3 - \sqrt{2}$ **d)** $1 + 2\pi$

e) $3\sqrt{2}$ **f)** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

g) $\sqrt{226}$ **h)** $-\sqrt{123}$

i) 3 e

a) 4 i 5 b) –8 i –7

c) 1 i 2 d) 7 i 8

e) 4 i 5 f) 1 i 2

g) 15 i 16 h) –12 i –11

i) 8 i 9

14. Representa a la recta numèrica els nombres irracionals següents:

a) $\sqrt{17}$ **b)** $\sqrt{13}$

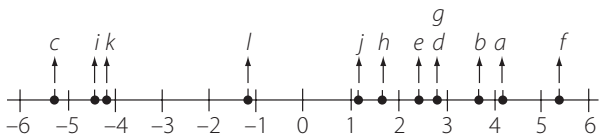
c) $-\sqrt{29}$ **d)** $\sqrt{8}$

e) $1 + \sqrt{2}$ **f)** $3 + \sqrt{5}$

g) $2\sqrt{2}$ **h)** $\sqrt{3}$

i) $-\sqrt{20}$ **j)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

k) $-\sqrt{18}$ **l)** $-\sqrt{17} + 3$



15. Compara aquests parells de nombres reals:

a) $\frac{7}{5}$ **i** $\sqrt{2}$ **b)** $1 - \sqrt{3}$ **i –0,73**

c) π **i** $\sqrt{10}$ **d)** **–1,9 i –2**

e) $-\sqrt{6}$ **i** $-\sqrt{7}$ **f)** **4,9 i 5**

g) $\frac{\sqrt{10}}{8}$ **i** $\frac{\sqrt{10}}{9}$ **h)** $-1{,}3\widehat{9}$ **i –1,4**

a) $\frac{7}{5} < \sqrt{2}$ b) $1 - \sqrt{3} < -0{,}73$

c) $\pi < \sqrt{10}$ *d)* $-1{,}9 > -2$

e) $-\sqrt{6} > -\sqrt{7}$ *f)* $4{,}9 < 5$

g) $\frac{\sqrt{10}}{8} > \frac{\sqrt{10}}{9}$ *h)* $-1{,}3\widehat{9} = -1{,}4$

16. Ordena del més petit al més gran els nombres reals següents i col·loca el signe de desigualtat que correspongui:

$2{,}\widehat{45}$; 2,99; $2{,}\widehat{9}$; $-\sqrt{2}$; –1,42; 0; $\frac{5}{2}$

$-1{,}42 < -\sqrt{2} < 0 < 2{,}\widehat{45} < \frac{5}{2} < 2{,}99 < 2{,}\widehat{9}$

17. Escriu dos nombres racionals compresos entre:

a) **$\sqrt{5}$ i $\sqrt{6}$** ***b)*** **$-\sqrt{2}$ i $-\sqrt{3}$**

c) **4 i $\sqrt{17}$** ***d)*** **e i π**

Resposta oberta. Per exemple:

a) 2,41 i 2,42 *b)* –1,5 i –1,6

c) 4,05 i 4,1 *d)* 2,9 i 3

18. Expressa de manera exacta:

a) **L'àrea d'un triangle equilàter de 4 cm de costat.**

b) **La longitud de la diagonal d'un rectangle els costats del qual mesuren 4 i 6 cm.**

c) **El volum d'un cilindre de 2 cm de radi i 3 cm d'altura.**

d) **L'àrea d'un hexàgon regular inscrit en una circumferència de 8 cm de diàmetre.**

a) $A = \frac{c^2}{4}\sqrt{3} = \frac{16}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

b) $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 36} =$

$= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\ \text{cm}$

c) $V = \pi r^2 h = 12\pi\ \text{cm}^3$

d) Costat de l'hexàgon: $c = \frac{d}{2} = 4\ \text{cm}$

$A = \frac{3c^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3 \cdot 4^2}{2}\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

19. Aproxima per defecte i per excés fins a les mil·lèsimes cadascun dels nombres irracionals següents:

a) **$\sqrt{17}$** ***b)*** **e** ***c)*** **π**

	Per defecte	Per excés
$\sqrt{17}$	4,123	4,124
e	2,718	2,719
π	3,141	3,142

20. Extreu factor comú de:

a) **$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$**

b) **$7\pi - 3\pi + \pi$**

c) **$4\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$**

d) **$\sqrt{5}\,a + \sqrt{5}\,b - \sqrt{5}\,c$**

a) $(3 + 5)\sqrt{2}$

b) $(7 - 3 + 1)\pi$

c) $(4 + 5 - 2)\sqrt{a}$

d) $\sqrt{5}\,(a + b - c)$

21. Les operacions amb nombres irracionals que s'indiquen a continuació donen com a resultat un nombre racional. Calcula'l en cada cas.

a) **$(\sqrt{10})^2$**

b) **$(15 + 2\sqrt{3})(15 - 2\sqrt{3})$**

c) **$(3\sqrt{7})^2$**

d) **$(7\pi - 2\pi) : 3\pi$**

e) **$(\sqrt{6})^2 - \frac{2}{3}$**

f) **$\sqrt{(7 - \sqrt{2})(7 + \sqrt{2}) - 11}$**

a) $(\sqrt{10})^2 = 10$

b) $(15 + 2\sqrt{3})(15 - 2\sqrt{3}) = 225 - 12 = 213$

c) $(3\sqrt{7})^2 = 9 \cdot 7 = 63$

d) $(7\pi - 2\pi) : 3\pi = 5\pi : 3\pi = \frac{5}{3}$

e) $(\sqrt{6})^2 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

f) $\sqrt{(7 - \sqrt{2})(7 + \sqrt{2}) - 11} = \sqrt{49 - 2 - 11} =$

$= \sqrt{36} = \pm 6$

22. Si *x*, *y*, *z* i *t* representen quatre nombres reals, escriu cadascuna d'aquestes expressions com un producte de dos factors:

a) **$x^2y + xy^2$**

b) **$x(y + z) + t(y + z)$**

c) **$z^3 + z^2 + z$**

d) **$x^2 + 2xy + y^2 + t(x + y)$**

e) **$z(x - t) - x^2 + 2xt - t^2$**

a) $x^2y + xy^2 = xy(x + y)$

b) $x(y + z) + t(y + z) = (y + z)(x + t)$

c) $z^3 + z^2 + z = z(z^2 + z + 1)$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + t(x+y) =$

$= (x+y)^2 + t(x+y) = (x+y)(x+y+t)$

e) $z(x-t) - x^2 + 2xt - t^2 =$

$= z(x-t) - (x-t)^2 = (x-t)(z-x+t)$

23. Calcula, sense utilitzar la calculadora:

a) $\sqrt[3]{1\,000}$ ***b)*** $\sqrt[4]{1\,296}$

c) $\sqrt{\frac{25}{81}}$ ***d)*** $\sqrt[5]{-1}$

e) $\sqrt[3]{0{,}001}$ ***f)*** $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

a) 10 *b)* ± 6

c) $\pm\frac{5}{9}$ *d)* -1

e) 0,1 *f)* $\frac{1}{2}$

24. Tot i que a primer cop d'ull no ho sembli, els resultats de les arrels següents són tots racionals. Calcula'ls.

a) $\sqrt{\frac{8}{18}}$ ***b)*** $\sqrt[3]{\frac{2}{16}}$

c) $\sqrt{\frac{50}{98}}$ ***d)*** $\sqrt[3]{\frac{3}{81}}$

a) $\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2}{16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{\frac{50}{98}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \pm\frac{5}{7}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3}{81}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

25. Expressa-ho en forma de potència:

a) $\sqrt[3]{7}$ ***b)*** $\sqrt[4]{a^3}$

c) $\sqrt{10}$ ***d)*** $\sqrt[5]{(a+2)^2}$

e) $\sqrt[6]{6^5}$ ***f)*** $\sqrt{\frac{1}{5}}$

a) $7^{\frac{1}{3}}$ *b)* $a^{\frac{3}{4}}$

c) $10^{\frac{1}{2}}$ *d)* $(a+2)^{\frac{2}{5}}$

e) $6^{\frac{5}{6}}$ *f)* $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

26. Expressa en forma d'arrel:

a) $25^{\frac{1}{3}}$ ***b)*** $12^{\frac{1}{4}}$

c) $a^{\frac{3}{5}}$ ***d)*** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{3}}$

e) $b^{\frac{2}{7}}$

a) $\sqrt[3]{25}$ *b)* $\sqrt[4]{12}$

c) $\sqrt[5]{a^3}$ *d)* $\sqrt[3]{2^2}$

e) $\sqrt[7]{b^2}$

27. Les potències d'exponent fraccionari verifiquen totes i cadascuna de les propietats de les potències d'exponent enter. Aplica aquestes propietats per expressar en funció d'una sola potència:

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ ***b)*** $3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{4}}$

c) $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2$ ***d)*** $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}}$

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$

b) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{5}{12}}$

c) $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{3}\cdot 2} = 5^{\frac{2}{3}}$

d) $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{5}}} = 2^{1+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{16}{15}}$

28. Utilitza la calculadora i aproxima fins a les centèsimes aquests nombres irracionals:

a) $\sqrt[3]{10}$ ***b)*** $\sqrt[5]{2{,}76}$

c) $\pi^{\frac{1}{4}}$ ***d)*** $\sqrt[3]{-50}$

e) $5^{\frac{2}{3}}$ ***f)*** $\sqrt[7]{2^4}$

a) 2,15 *b)* 1,23

c) 1,33 *d)* −3,68

e) 4,45 *f)* 0,45

29. Per simplificar una arrel del tipus $\sqrt[n]{a^m}$, cal aconseguir que *m* i *n* siguin nombres primers entre si. Simplifica-ho:

a) $\sqrt[12]{a^{10}}$ ***b)*** $\sqrt[3]{a^{12}}$

c) $\sqrt[15]{3^{10}}$ ***d)*** $\sqrt[4]{64}$

a) $\sqrt[6]{a^5}$ *b)* a^4

c) $\sqrt[3]{3^2}$ *d)* $\sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3}$

30. Quina de les igualtats següents és incorrecta?

a) $\sqrt{(a+b)^2} = a + b$

b) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$

c) $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$

La de l'apartat *b)*, ja que $(a+b)^3 \neq a^3 + b^3$.

La *a)* i la *c)* no del tot: $\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$ i $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$

31. Expressa-ho en forma d'una sola arrel:

a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$ ***b)*** $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$

c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{4}}$ ***d)*** $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{15}}$

e) $\left(\sqrt[7]{2^3}\right)^4$ ***f)*** $3^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{2}$

g) $(a+b)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{a-b}$ **h)** $2\sqrt{5}$

i) $\sqrt{\sqrt{13}}$ **j)** $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}$

a) $\sqrt[3]{3\cdot 5}=\sqrt[3]{15}$

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$

c) $\sqrt[3]{\frac{12}{4}}=\sqrt[3]{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{18}{15}}=\sqrt{\frac{6}{5}}$

e) $\sqrt[7]{2^{3\cdot 4}}=\sqrt[7]{2^{12}}$

f) $\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{3^3\cdot 2}=\sqrt[6]{54}$

g) $\sqrt{(a+b)(a-b)}=\sqrt{a^2-b^2}$

h) $\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{20}$

i) $\sqrt[4]{13}$

j) $\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}=\sqrt[6]{a^5}$

32. Expressa-ho de la manera més senzilla possible:

a) $\sqrt{10}+2\sqrt{10}-\frac{1}{2}\sqrt{10}$

b) $3\sqrt{12}-2\sqrt{75}+7\sqrt{3}$

c) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[3]{2}$

d) $\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[12]{10}}$

a) $\left(1+2-\frac{1}{2}\right)\sqrt{10}=\frac{5}{2}\sqrt{10}$

b) $6\sqrt{3}-10\sqrt{3}+7\sqrt{3}=$

$=(6-10+7)\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

c) $\sqrt[12]{5^3}\cdot\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{5^3\cdot 2^4}=\sqrt[12]{2\,000}$

d) $\frac{\sqrt[12]{7^6}\cdot\sqrt[12]{5^4}}{\sqrt[12]{10}}=\sqrt[12]{\frac{7^6\cdot 5^4}{10}}$

33. Racionalitza les expressions fraccionàries que figuren a continuació:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

c) $\frac{12}{\sqrt{2}}$ **d)** $\frac{22}{4-\sqrt{5}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$

c) $\frac{12}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{12}{2}\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

d) $\frac{22}{4-\sqrt{5}}\cdot\frac{4+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}=\frac{22(4+\sqrt{5})}{16-5}=$

$=\frac{22(4+\sqrt{5})}{11}=2(4+\sqrt{5})$

34. Efectua les operacions indicades racionalitzant prèviament cada expressió fraccionària:

a) $\frac{1}{5+\sqrt{3}}+\frac{2}{5-\sqrt{3}}$

b) $\frac{7}{4+\sqrt{2}}-\frac{6}{4-\sqrt{2}}$

a) $\frac{1}{5+\sqrt{3}}\cdot\frac{5-\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}=\frac{5-\sqrt{3}}{22}$

$\frac{2}{5-\sqrt{3}}\cdot\frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}=\frac{2(5+\sqrt{3})}{22}=\frac{5+\sqrt{3}}{11}$

$\frac{1}{5+\sqrt{3}}+\frac{2}{5-\sqrt{3}}=$

$=\frac{5-\sqrt{3}}{22}+\frac{5+\sqrt{3}}{11}=\frac{15+\sqrt{3}}{22}$

b) $\frac{7}{4+\sqrt{2}}\cdot\frac{4-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}=\frac{7(4-\sqrt{2})}{14}=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$

$\frac{6}{4-\sqrt{2}}\cdot\frac{4+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}=\frac{6(4+\sqrt{2})}{14}=$

$=\frac{3(4+\sqrt{2})}{7}=\frac{12+3\sqrt{2}}{7}$

$\frac{7}{4+\sqrt{2}}-\frac{6}{4-\sqrt{2}}=$

$=\frac{4-\sqrt{2}}{2}-\frac{12+3\sqrt{2}}{7}=\frac{4-\sqrt{2}}{14}$

35. Representa a la recta real els conjunts de nombres següents. Després, defineix-los mitjançant desigualtats:

a) $[4,+\infty)$ **b)** $(-\infty,-2)$

c) $[1,3]$ **d)** $(2,5)$

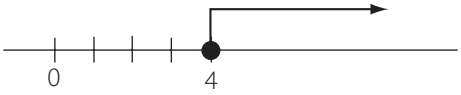
e) $[-3,0)$ **f)** $(0,3]$

g) $(5,+\infty)$ **h)** $[-2,2)$

i) $(-4,2]$ **j)** $(-\infty,0)$

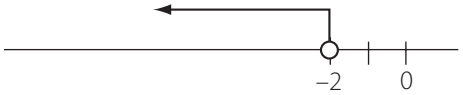
k) $(-3,4]$ **l)** $\left(-1,\frac{3}{2}\right]$

a)



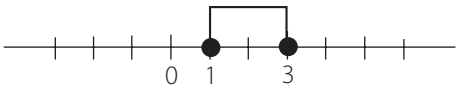
$4\leqslant x$

b)



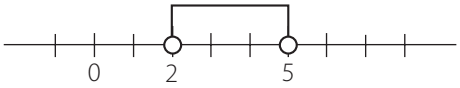
$x < -2$

c)



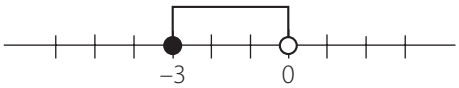
$1 \leqslant x \leqslant 3$

d)



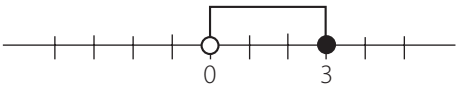
$2 < x < 5$

e)



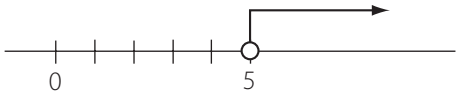
$-3 \leqslant x < 0$

f)



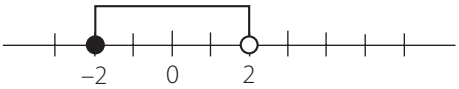
$0 < x \leqslant 3$

g)



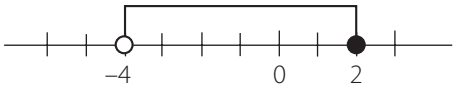
$5 < x$

h)



$-2 \leqslant x < 2$

i)

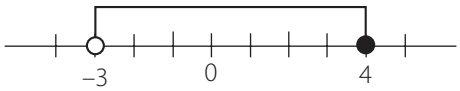


$-4 < x \leqslant 2$

j)

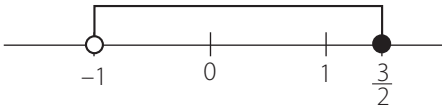
$x < 0$

k)



$-3 < x \leqslant 4$

l)



$-1 < x \leq \frac{3}{2}$

36. Expressa, utilitzant la nova notació, els conjunts de nombres reals que verifiquen:

***a*)** $x \geqslant -3$ ***b*)** $x < 4$

***c*)** $-2 \leqslant x \leqslant 3$ ***d*)** $-5 < x < -1$

***e*)** $-4 < x \leqslant 6$ ***f*)** $x > 7$

a) $[-3, +\infty)$ *b*) $(-\infty, 4)$

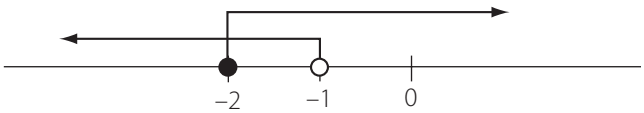
c) $[-2, 3]$ *d*) $(-5, -1)$

e) $(-4, 6]$ *f*) $(7, +\infty)$

37. Les inequacions $-1 \leq 3x + 5$ i $3x + 5 < 2$ tenen solucions comunes. Troba-les, representa-les gràficament i expressa-les de dues maneres diferents.

$-1 \leq 3x + 5 \rightarrow -6 \leq 3x \rightarrow x \geq -2$

$3x + 5 < 2 \rightarrow 3x < -3 \rightarrow x < -1$



$-2 \leq x < -1$, o també, $x \in [-2, -1)$.

38. Escriu en notació científica:

***a*)** $0{,}003\,45 \cdot 10^8$ ***b*)** $126{,}78 \cdot 10^{-5}$

***c*)** $\dfrac{13}{5\,789\,680}$ ***d*)** $756\,423\,987$

***e*)** $0{,}000\,000\,028\,54$

a) $0{,}003\,45 \cdot 10^8 = 3{,}45 \cdot 10^5$

b) $126{,}78 \cdot 10^5 = 1{,}267\,8 \cdot 10^{-3}$

c) $\dfrac{13}{5\,789\,680} = 2{,}245\,374\,528 \cdot 10^{-6}$

d) $756\,423\,987 = 7{,}564\,239\,87 \cdot 10^8$

e) $0{,}000\,000\,028\,54 = 2{,}854 \cdot 10^{-8}$

39. Efectua aquestes operacions amb l'ajut de la calculadora. Expressa'n els resultats utilitzant-hi la notació científica:

a) $2{,}5 \cdot 10^4 + 10^5 - 6{,}25 \cdot 10^3$ **b)** $(10^6 : 4 \cdot 10^{-3}) : 5 \cdot 10^7$

c) $\dfrac{1{,}25 \cdot 10^{12} - 10^{12}}{10^{10} + 5 \cdot 10^9}$ **d)** $(10^4 - 10^7)^2$

a) $1{,}1875 \cdot 10^5$ b) 5

c) $1{,}\hat{6} \cdot 10$ d) $9{,}98 \cdot 10^{13}$

40. Una estrella està situada a 4 anys llum de la Terra. Quina és la distància en quilòmetres que la separa del nostre planeta? Un any llum és la distància que recorre la llum en un any a una velocitat de 300 000 km/s.

$$1 \text{ any} \cdot \frac{365 \text{ dies}}{1 \text{ any}} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ dia}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 31\,536\,000 \text{ s}$$

$$1 \text{ any llum} = 31\,536\,000 \text{ s} \cdot \frac{300\,000 \text{ km}}{1 \text{ s}} =$$

$$= 9{,}4608 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

$$4 \text{ anys llum} = 4 \cdot 9{,}4608 \cdot 10^{12} = 3{,}784\,32 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

41. Sabent que un mol d'àtoms de ferro conté $6{,}02 \cdot 10^{23}$ àtoms d'aquest metall i que té una massa de 55,8 g, esbrina:

a) La massa en grams d'un àtom de ferro.

b) El nombre d'àtoms continguts en 1 g de ferro.

a) $$1 \text{ àtom Fe} \cdot \frac{1 \text{ mol àtom Fe}}{6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ àtom Fe}} \cdot \frac{55{,}8 \text{ g Fe}}{1 \text{ mol àtom Fe}} =$$

$$= 9{,}27 \cdot 10^{-23} \text{ g Fe}$$

b) $$1 \text{ g Fe} \cdot \frac{1 \text{ mol àtom Fe}}{55{,}8 \text{ g Fe}} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ àtom Fe}}{1 \text{ mol àtom Fe}} =$$

$$= 1{,}08 \cdot 10^{22} \text{ àtoms Fe}$$

42. Expressa en notació científica la longitud en metres del radi de la Terra, sabent que un quadrant d'un meridià terrestre mesura 10^4 km.

$$r = \frac{L}{2\pi} = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ km}}{6{,}283184} = \frac{40\,000 \text{ km}}{6{,}283\,184} = 6\,366{,}2 \text{ km} =$$

$$= 6{,}3662 \cdot 10^3 \text{ km} = 6{,}3662 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Activitats finals

1. Demostra, sense utilitzar la calculadora, que el nombre $\sqrt{1\,764}$ és racional. Fes abans la descomposició en factors primers de 1 764.

$$1\,764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$$

$$\sqrt{1\,764} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

2. Calcula el costat, el perímetre i l'àrea d'un quadrat inscrit en una circumferència de 2 cm de radi. Quina de les tres mesures s'expressa mitjançant un nombre racional? Expressa les altres dues de manera exacta i amb una aproximació que arribi fins a les centèsimes.

El diàmetre de la circumferència coincideix amb la diagonal del quadrat i mesura 4 cm.

Si representen per c el costat del quadrat, es verifica:

$$c^2 + c^2 = 4^2 \rightarrow 2c^2 = 16 \rightarrow c^2 = 8 \rightarrow$$

$$c = 2\sqrt{2} \text{ cm} \simeq 2{,}83 \text{ cm}$$

El perímetre p del quadrat mesura:

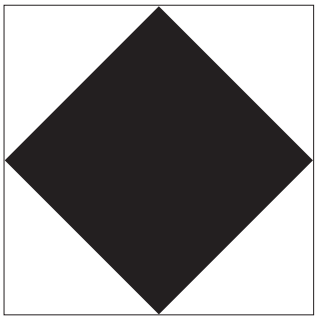
$$p = 4c = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ cm} \simeq 11{,}31 \text{ cm}$$

i l'àrea A del quadrat és:

$$A = c^2 = 8 \text{ cm}^2$$

L'única mesura que s'expressa mitjançant un nombre racional és la superfície del quadrat.

3. Dibuixa un quadrat de 2 cm de costat. Determina els punts mitjans dels seus costats i uneix-los successivament. Quina figura n'obtens? Per què? Calcula'n l'àrea i el perímetre.



S'obté un altre quadrat: els seus costats són iguals i els quatre angles són rectes.

Àrea: $A = (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ cm}^2$

Perímetre: $P = 4\sqrt{2}$ cm

4. Considera un nombre positiu, eleva'l al quadrat, multiplica'l per 2 i, finalment, extreu-ne l'arrel quadrada. Demostra que el quocient de la divisió entre l'últim nombre i el primer és igual a $\sqrt{2}$.

$$x \rightarrow x^2 \rightarrow 2x^2 \rightarrow x \cdot \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$$

L'últim pas és possible perquè $x \neq 0$.

5. Quina condició han de verificar els coeficients a, b i c de l'equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$, per tal que les seves solucions siguin nombres reals?

Les solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ són de la forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per tant, perquè aquestes solucions siguin nombres reals s'ha de verificar que:

$$b^2 - 4ac \geqslant 0$$

6. El perímetre d'un rectangle mesura 16 cm i una de les seves diagonals, $2\sqrt{10}$ cm. Calcula'n l'àrea.

Anomenem x i y les dimensions del rectangle expressades en centímetres. Es verifica:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 16 \\ x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 40 \end{array}\right\}$$

$$x = 8 - y$$

$$(8 - y)^2 + y^2 = 40 \rightarrow$$

$$64 - 16y + y^2 + y^2 = 40 \rightarrow$$

$$2y^2 - 16y + 24 = 0 \rightarrow y^2 - 8y + 12 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow \ y_1 = 6 \\ \searrow \ y_2 = 2 \end{array}$$

Si $y = 6 \rightarrow x = 2$, i si $y = 2$, $x = 6$.

En qualsevol cas, l'àrea del rectangle és

$$A = 12 \text{ cm}^2$$

7. Esbrina quatre nombres racionals que estiguin compresos entre $2 + \sqrt{5}$ i $2 + \sqrt{6}$.

Resposta oberta. Per exemple: 4,25; 4,3; 4,42; 4,4.

8. Representa a la recta numèrica els nombres reals següents:

a) $\frac{3}{4}$ ***b)*** $1{,}1\widehat{6}$

c) $\sqrt{34}$ ***d)*** $-\sqrt{8}$

Representació aproximada:

9. Calcula:

a) $\left(3\sqrt{5}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{10}\right)^4$

c) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$

d) $\left(\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2$

a) $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 9 \cdot 5 = 45$

b) $\left(\sqrt{10}\right)^4 = 10^2 = 100$

c) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) = 5 - 3 = 2$

d) $\left(\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 7 - 2 = 5$

10. Calcula:

a) $\left(1 + \sqrt{2}\right)^2$

b) $\left(3 - \sqrt{3}\right)^2$

c) $\left(2\sqrt{5} + 1\right)^2$

d) $\left(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)^2$

a) $\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

b) $\left(3 - \sqrt{3}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{3} + 3 = 12 - 6\sqrt{3}$

c) $\left(2\sqrt{5} + 1\right)^2 = 20 + 4\sqrt{5} + 1 = 21 + 4\sqrt{5}$

d) $\left(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)^2 = 32 - 16\sqrt{6} + 12 =$
$= 44 - 16\sqrt{6}$

11. En quins casos el resultat d'una potència de base 3 és més petit que 3? Justifica la teva resposta amb exemples.

Sempre que l'exponent és més petit que 1.

Per exemple: $3^{\frac{1}{2}} \simeq 1{,}73$; $3^0 = 1$; $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

12. Expressa com una sola potència:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ ***b)*** $\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5}$

c) $\sqrt[7]{a^2}$ ***d)*** $\left(\sqrt[4]{b^3}\right)^2$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$

b) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{3}} : 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{12}}$

c) $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$

d) $\left(\sqrt[4]{b^3}\right)^2 = \sqrt[4]{b^6} = \sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$

13. L'arrel quadrada de l'arrel cúbica d'un nombre positiu x té dos resultats possibles. Per què? Si un d'aquests és 2, quin és l'altre? Calcula x.

Perquè es tracta d'una arrel d'índex parell (índex 6).

$\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[6]{x}$

L'altre resultat és –2, l'oposat de 2.

$\sqrt[6]{x} = \pm 2 \rightarrow x = (\pm 2)^6 = 64$

14. Calcula:

a) $\sqrt{\frac{200}{450}}$ ***b)*** $\sqrt{\frac{3}{27}}$ ***c)*** $\sqrt{\frac{242}{338}}$

a) $\sqrt{\frac{200}{450}} = \sqrt{\frac{100}{225}} = \pm\frac{10}{15} = \pm\frac{2}{3}$

b) $\sqrt{\frac{3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$

c) $\sqrt{\frac{242}{338}} = \sqrt{\frac{121}{169}} = \pm\frac{11}{13}$

15. Escriu com una única arrel:

a) $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{-1}{2}}$ ***b)*** $7^{\frac{3}{4}} : 7^{0,5}$

c) $\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$ ***d)*** $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$

a) $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{-1}{2}} = 10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10}$

b) $7^{\frac{3}{4}} : 7^{0,5} = 7^{\frac{3}{4}} : 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$

c) $\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$

d) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$

16. Indica quines de les igualtats següents no són certes. Per què?

a) $\sqrt{9+25} = 3+5$

b) $\sqrt{7 \cdot 6} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{6}$

c) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

d) $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{45}}{3}$

a) Perquè $34 \neq 8^2$

c) Perquè $a^2 + b^2 \neq (a+b)^2$

17. Expressa de la manera més senzilla possible el resultat de les operacions següents:

a) $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63}$

b) $\sqrt{121} + \sqrt{169} - \sqrt{225}$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

d) $\sqrt[4]{b^3} : \sqrt{b}$

a) $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63} = \sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} =$
$= (1+2-3) \cdot \sqrt{7} = 0$

b) $\sqrt{121} + \sqrt{169} - \sqrt{225} = 11 + 13 - 15 = 9$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7} = a\sqrt[6]{a}$

d) $\sqrt[4]{b^3} : \sqrt{b} = b^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{b}$

18. Justifica aquestes igualtats:

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ ***b)*** $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ***d)*** $a^2\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{2n+1}}$

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$

b) $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 3} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

d) $a^2\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{2n} \cdot a} = \sqrt[n]{a^{2n+1}}$

19. Racionalitza:

a) $\frac{20}{\sqrt{10}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

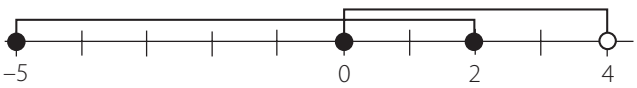
c) $\frac{6+\sqrt{6}}{6-\sqrt{6}}$

a) $\frac{20}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10}$

b) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} =$
$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{7-5} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{6+\sqrt{6}}{6-\sqrt{6}} \cdot \frac{6+\sqrt{6}}{6+\sqrt{6}} = \frac{36+12\sqrt{6}+6}{36-6} =$
$= \frac{42+12\sqrt{6}}{30} = \frac{7+2\sqrt{6}}{5}$

20. Les solucions d'una inequació se situen a l'interval [–5, 2), i les d'una altra inequació, a l'interval [0, 4). Expressa mitjançant un interval les solucions comunes a totes dues inequacions. Ajuda't d'un gràfic.



Les solucions comunes són les que se situen a l'interval: [0, 2].

Unitat 2. Polinomis

Activitats

1. Indica el grau i els coeficients de cadascun d'aquests polinomis:

a) $A(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

b) $B(x) = -x^4 + \sqrt{2}\,x^2 - \frac{1}{3}x$

c) $C(x) = 3x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{8}{5}$

d) $D(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

a) Grau 3; coeficients: 1, 3, 0 i -2.

b) Grau 4; coeficients: -1, 0, $\sqrt{2}$, $-\frac{1}{3}$ i 0.

c) Grau 2; coeficients: 3, $-\frac{5}{4}$ i $\frac{8}{5}$.

d) Grau 4; coeficients: 1, -1, 1, -1 i 1.

2. Escriu un polinomi que sigui:

a) De tercer grau i amb dos termes.

b) De quart grau i amb cinc termes.

c) De segon grau i amb un terme.

d) Hi ha algun polinomi de tercer grau amb cinc termes? Per què?

Respostes obertes. Per exemple:

a) $2x^3 - 7$

b) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 1$

c) $-5x^2$

d) No hi ha cap polinomi de 3r grau amb 5 termes. Com a màxim en pot tenir 4.

3. Indica quines de les expressions algèbriques següents no són polinomis. Justifica les respostes.

a) $\frac{5}{x^2} + 1$ **b)** $\frac{x^2+1}{5}$

c) $x^3 + x^{-2} + x + 1$ **d)** $\sqrt{\frac{\sqrt{x^4}}{9}}$

e) $\frac{x^2+x+2}{x}$ **f)** $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$

Les expressions *a)*, c), *e)* i *f)* no són polinomis, ja que la indeterminada x hi figura elevada a -2 i a -1. En l'expressió *d)* s'obté $\frac{x}{3}$, que sí que és un polinomi.

4. Calcula, per a $x = -1$, el valor numèric del polinomi:

$A(x) = -x^3 - x^2 + x - 1$

El valor numèric s'obté en substituir x per -1:

$A(-1) = -(-1)^3 - (-1)^2 + (-1) - 1 = -2$

$A(-1) = -2$

5. Determina els coeficients *a*, *b* i *c* perquè els polinomis següents siguin idèntics:

$B(x) = x^4 + x^2 + 1$ i $C(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$

Identificar dos polinomis de quart grau és igualar els coeficients del mateix grau:

$a = 0$

$b = 1$

$c = 0$

6. Considera els polinomis: $A(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{3}{4}$,

$B(x) = -x^3 + \frac{7}{2}x + 3$ i $C(x) = 2x^2 - 4x$.

Calcula:

a) $A(x) + B(x)$

b) $A(x) - B(x)$

c) $C(x) + B(x) + A(x)$

d) $B(x) - [A(x) - C(x)]$

e) $-x^2[B(x) - C(x)]$

f) $3A(x) - 5B(x) + \frac{1}{2}C(x)$

g) $B(x)\,C(x)$

h) $[C(x)]^3$

a) $A(x) + B(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{3}{4} + \left(-x^3 + \frac{7}{2}x + 3\right) =$

$= -3x^2 + \frac{17}{2}x + \frac{9}{4}$

b) $A(x) - B(x) =$

$= x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{3}{4} + x^3 - \frac{7}{2}x - 3 =$

$= 2x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{15}{4}$

c) $C(x) + B(x) + A(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{4}$

$$\begin{array}{rcl} C(x) &=& 2x^2 - 4x \\ B(x) &=& -x^3 + \frac{7}{2}x + 3 \\ A(x) &=& x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{3}{4} \\ \hline C(x) + B(x) + A(x) &=& -x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{4} \end{array}$$

d) $B(x) - [A(x) - C(x)] =$

$= B(x) - A(x) + C(x) = -2x^3 + 5x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{15}{4}$

$$\begin{array}{rcrrrrr} B(x) & = & -x^3 & & +\frac{7}{2}x & + & 3 \\ -A(x) & = & -x^3 & +3x^2 & -5x & + & \frac{3}{4} \\ C(x) & = & & 2x^2 & -4x & & \\ \hline B(x) - A(x) + C(x) & = & -2x^3 & +5x^2 & -\frac{11}{2}x & + & \frac{15}{4} \end{array}$$

e) $-x^2[B(x) - C(x)] =$

$= -x^2\left[-x^3 + \frac{7}{2}x + 3 - 2x^2 + 4x\right] =$

$= -x^2\left[-x^3 - 2x^2 + \frac{15}{2}x + 3\right] = x^5 + 2x^4 - \frac{15}{2}x^3 - 3x^2$

f) $3A(x) - 5B(x) + \frac{1}{2}C(x) = 8x^3 - 8x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{69}{4}$

$$\begin{array}{rcrrrrr} 3A(x) & = & 3x^3 & -9x^2 & +15x & - & \frac{9}{4} \\ -5B(x) & = & 5x^3 & & -\frac{35}{2}x & - & 15 \\ \frac{1}{2}C(x) & = & & x^2 & -2x & & \\ \hline 3A(x) - 5B(x) + \frac{1}{2}C(x) & = & 8x^3 & -8x^2 & -\frac{9}{2}x & - & \frac{69}{4} \end{array}$$

g) $B(x)C(x) = -2x^5 + 4x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 12x$

$$\begin{array}{rrrrrrr} B(x) = & & & -x^3 & +\frac{7}{2}x & + & 3 \\ C(x) = & & & \times & 2x^2 & -4x & \\ \hline & +4x^4 & & & -14x^2 & -12x & \\ & -2x^5 & & +7x^3 & +6x^2 & & \\ \hline B(x)C(x) = & -2x^5 & +4x^4 & +7x^3 & -8x^2 & -12x & \end{array}$$

h) $[C(x)]^3 = (2x^2 - 4x)^3 = (2x^2 - 4x)^2(2x^2 - 4x) =$

$= 8x^6 - 48x^5 + 96x^4 - 64x^3$

$$\begin{array}{rrrrrr} [C(x)]^2 = & & 4x^4 & -16x^3 & +16x^2 & \\ C(x) = & & & \times & 2x^2 & -4x \\ \hline & & -16x^5 & +64x^4 & -64x^3 & \\ & 8x^6 & -32x^5 & +32x^4 & & \\ \hline [C(x)]^3 = & 8x^6 & -48x^5 & +96x^4 & -64x^3 & \end{array}$$

Contesta les qüestions següents i justifica les respostes:

i) **Per què el grau del polinomi $A(x) + B(x)$ no és 3?**

j) **Quin és el grau del polinomi $-x^2[B(x) - C(x)]$?**

k) **Per què el grau del polinomi $[C(x)]^3$ és 6?**

l) **És cert que:**

$B(x) - [A(x) - C(x)] = B(x) - A(x) + C(x)$?

i) El grau del polinomi $A(x) + B(x)$ no és 3 perquè els coeficients de 3r grau són oposats.

j) El grau del polinomi $-x^2[B(x) - C(x)]$ és 5.

k) El grau del polinomi $[C(x)]^3$ és 6 perquè $(2x^2)^3 = 8x^6$

l) $B(x) - [A(x) - C(x)] = B(x) - A(x) + C(x)$.

És certa la igualtat.

7. Si $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7$ i $B(x) = x^4 - 5x^3 + 2x$, determina:

a) **El polinomi $C(x)$ que verifica $A(x) + C(x) = B(x)$.**

b) **El polinomi $D(x)$ que verifica $B(x) + D(x) = A(x)$.**

c) **La relació que hi ha entre els polinomis $C(x)$ i $D(x)$.**

a) $C(x) = B(x) - A(x) = x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 2x - 7$

$$\begin{array}{rrrrrr} x^4 & -5x^3 & & +2x & & \\ & -3x^3 & +2x^2 & & -7 & \\ \hline x^4 & -8x^3 & +2x^2 & +2x & -7 & \end{array}$$

b) $D(x) = A(x) - B(x) = -x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 2x + 7$

Aquest polinomi és oposat a l'anterior.

c) La relació: $D(x) = -C(x)$

8. Fes la divisió $(3x^4 - x^3 + 1) : (x^2 + 1)$. Comprova que es verifica la propietat fonamental.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & -x^3 & & & +1 & x^2+1 \\ \cline{6-6} -3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2 - x - 3 \\ \cline{1-3} & -x^3 & -3x^2 & & & \\ & +x^3 & & +x & & \\ \cline{2-5} & & -3x^2 & +x & +1 & \\ & & +3x^2 & & +3 & \\ \cline{3-5} & & & x & +4 & \end{array}$$

Quocient: $3x^2 - x - 3$

Residu: $x + 4$

Comprovació:

$(3x^2 - x - 3)(x^2 + 1) + (x + 4) = 3x^4 - x^3 + 1$

9. Efectua aquestes divisions. Aplica-hi la regla de Ruffini quan sigui possible.

a) **$(6x^5 - 3x^4 + 2x + 1) : (-3x^3 + 2x + 4)$**

b) **$x^6 : (x^4 + x^2 - 2)$**

c) **$(2x^3 - x^2 + 3x) : (x - 1)$**

d) **$(x^4 - 1) : (x + 1)$**

e) **$x^3 : (x + 2)$**

f) **$(x^6 - 1) : (x^2 + 1)$**

g) **$\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$**

a)

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 6x^5 & -3x^4 & & & +2x & +1 & -3x^3+2x+4 \\ \cline{7-7} -6x^5 & & +4x^3 & +8x^2 & & & -2x^2 + x - \frac{4}{3} \\ \cline{1-4} & -3x^4 & +4x^3 & +8x^2 & +2x & +1 & \\ & +3x^4 & & -2x^2 & -4x & & \\ \cline{2-6} & & 4x^3 & +6x^2 & -2x & +1 & \\ & & -4x^3 & & +\frac{8}{3}x & +\frac{16}{3} & \\ \cline{3-6} & & & 6x^2 & +\frac{2}{3}x & +\frac{19}{3} & \end{array}$$

Quocient: $-2x^2 + x - \frac{4}{3}$

Residu: $6x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$

b)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^6 & & & & & x^4 + x^2 - 2 \\ \cline{6-6}
-x^6 & -x^4 & +2x^2 & & & x^2 - 1 \\ \cline{1-3}
 & -x^4 & +2x^2 & & & \\
 & +x^4 & +x^2 & -2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^2 & -2 & &
\end{array}$$

Quocient: $x^2 - 1$

Residu: $3x^2 - 2$

c) Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & 3 & 0 \\
1 & & 2 & 1 & 4 \\ \hline
 & 2 & 1 & 4 & \boxed{4}
\end{array}$$

Quocient: $2x^2 + x + 4$

Residu: 4

d) Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0}
\end{array}$$

Quocient: $x^3 - x^2 + x - 1$

Residu: 0

e) Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline
 & 1 & -2 & 4 & \boxed{-8}
\end{array}$$

Quocient: $x^2 - 2x + 4$

Residu: -8

f)

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & & & & & & -1 & x^2 + 1 \\ \cline{8-8}
-x^6 & -x^4 & & & & & & x^4 - x^2 + 1 \\ \cline{1-2}
 & -x^4 & & & & & & \\
 & +x^4 & +x^2 & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & x^2 & -1 & & & & \\
 & & -x^2 & -1 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -2 & & & &
\end{array}$$

Quocient: $x^4 - x^2 + 1$

Residu: -2

g) Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & -\frac{1}{24} \\ \hline
 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} & \boxed{\frac{5}{24}}
\end{array}$$

Quocient: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}$

Residu: $\frac{5}{24}$

10. En una divisió, el divisor és el polinomi $x^3 - 2x^2 + 3$, el quocient és $x^2 + 2x + 1$ i el residu és $-8x - 2$. Quin és el grau del dividend? Pots calcular-lo? Fes-ho.

Dividend:

$(x^3 - 2x^2 + 3)(x^2 + 2x + 1) + (-8x - 2) =$

$= x^5 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1.$

El dividend és de grau 5.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & x^3 & -2x^2 & & +3 \\
 & & \times & & x^2 & +2x & +1 \\ \cline{4-7}
 & & & x^3 & -2x^2 & & +3 \\
 & 2x^4 & -4x^3 & & & +6x & \\
x^5 & -2x^4 & & +3x^2 & & & \\ \cline{1-7}
x^5 & & -3x^3 & +x^2 & & +6x & +3 \\
 & + & & & & -8x & -2 \\ \cline{1-7}
x^5 & & -3x^3 & +x^2 & & -2x & +1
\end{array}$$

11. Determina els valors de a i b, de manera que, quan dividim $3x^4 - 12x^2 + ax + b$ per $x^3 - 2x^2 + 3$, el residu sigui $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^4 & & -12x^2 & +ax & & +b & x^3 - 2x^2 + 3 \\ \cline{7-7}
-3x^4 & +6x^3 & & -9x & & & 3x + 6 \\ \cline{1-4}
 & 6x^3 & -12x^2 & +(a-9)x & & +b & \\
 & -6x^3 & +12x^2 & & & -18 & \\ \cline{2-6}
 & & & (a-9)x & & +b-18 & = \frac{1}{2} \rightarrow
\end{array}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a - 9 = 0 \rightarrow a = 9 \\ b - 18 = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{37}{2} \end{cases}$$

12. En una divisió exacta, el dividend és $x^5 - 1$ i el quocient, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Calcula'n el divisor.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & & & & -1 & x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & -x & & x - 1 \\ \cline{1-5}
 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & -x & -1 & \\
 & +x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & +1 & \\ \cline{2-6}
 & & & / & & &
\end{array}$$

Divisor: $x - 1$

13. Determina el valor de k per tal que sigui exacta la divisió: $(2x^3 - x^2 + k) : (x + 2)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -x^2 & & +k & x + 2 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & -4x^2 & & & 2x^2 - 5x + 10 \\ \cline{1-2}
 & -5x^2 & & +k & \\
 & 5x^2 & +10x & & \\ \cline{2-4}
 & & 10x & +k & \\
 & & -10x & -20 & \\ \cline{3-4}
 & & & k - 20 & = 0 \rightarrow k = 20
\end{array}$$

14. Tria el mètode que consideris més convenient per esbrinar el valor numèric d'aquests polinomis per al valor que s'indica:

a) $-\frac{3}{2}x^4 - 5x^3 + 4x - 2$ **per a** $x = 12$.

b) $-x^6 + x^4 - \sqrt{2}\,x^3 - x^2$ **per a** $x = \sqrt{2}$.

c) $\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + 1$ **per a** $x = -5$.

a) Pel teorema del residu:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -\frac{3}{2} & -5 & 0 & 4 & -2 \\ 12 & & -18 & -276 & -3\,312 & -39\,696 \\ \hline & -\frac{3}{2} & -23 & -276 & -3\,308 & \boxed{-39\,698} \end{array}$$

Valor numèric: $-39\,698$

b) Substituint:

$$-(\sqrt{2})^6 + (\sqrt{2})^4 - \sqrt{2}(\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^2 =$$

$$= -8 + 4 - 4 - 2 = -10$$

Valor numèric: -10

c) Substituint:

$$\frac{2}{5}(-5)^3 + \frac{1}{5}(-5)^2 + \frac{3}{5}(-5) + 1 =$$

$$= -50 + 5 - 3 + 1 = -47$$

Valor numèric: -47

15. Calcula el residu de la divisió $(2x^3 - 3) : (x - 2)$. Fes-ho mitjançant els dos procediments que hem analitzat. Explica quin és el més ràpid.

Fent la divisió:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & & & -\ 3 & x - 2 \\ \cline{5-5} -\ 2x^3 & +\ 4x^2 & & & 2x^2 + 4x + 8 \\ \cline{1-4} & 4x^2 & & -\ 3 & \\ & -\ 4x^2 & +\ 8x & & \\ \cline{2-4} & & 8x & -\ 3 & \\ & & -\ 8x & +\ 16 & \\ \cline{3-4} & & & 13 & \end{array}$$

$R = 13$

Pel teorema del residu: $2 \cdot 2^3 - 3 = 13$

És més ràpid fer-ho pel teorema del residu.

16. Determina el valor de k per tal que sigui exacta la divisió:

$$(x^3 - 3x^2 + 5x + k) : (x + 3)$$

Valor numèric 0 per a $x = -3$:

$(-3)^3 - 3(-3)^2 + 5(-3) + k = 0 \rightarrow k = 69$

17. Esbrina el residu de la divisió $(x^9 + 1) : (x + 1)$. Pots obtenir-lo sense necessitat de fer la divisió.

$R = (-1)^9 + 1 = 0$

18. Comprova que $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ és divisible per $x + 2$. Expressa el polinomi $P(x)$ com a producte de dos polinomis.

Si $P(-2) = 0$, $P(x)$ és divisible per $x + 2$.

$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 6(-2) + 8 = 0$

Dividim $P(x)$ per $x + 2$ per esbrinar l'altre factor:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ -2 & & -2 & 10 & -8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x) = (x^2 - 5x + 4)(x + 2)$

19. Esbrina el valor de k perquè el polinomi $x^4 + k$ sigui divisible per $x + 1$.

Substituir per $x = -1$:

$(-1)^4 + k = 0 \rightarrow k = -1$

20. Un polinomi $P(x)$ només té els divisors 3, $x^2 - 1$ i $\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$. Esbrina $P(x)$.

$$P(x) = 3(x^2 - 1)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) = x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x - \frac{2}{3}$$

21. Calcula k perquè el polinomi $x^3 - 3x^2 + k$ sigui múltiple de $x + 1$.

Cal que $(-1)^3 - 3(-1)^2 + k = 0 \rightarrow k = 4$.

22. Indica si són certes o falses aquestes afirmacions:

a) $x^4 - 1$ **és divisible per** $x + 1$.

b) $x^5 - 1$ **és múltiple de** $x - 1$.

c) $x + 2$ **és divisor de** $x^3 + 8$.

d) $x^7 + 1$ **és múltiple de** $x + 1$.

e) $x + 3$ **és divisor de** $x^3 - 27$.

a) Certa, ja que $(-1)^4 - 1 = 0$

b) Certa, $1^5 - 1 = 0$

c) Certa, $(-2)^3 + 8 = 0$

d) Certa, $(-1)^7 + 1 = 0$

e) Falsa, $(-3)^3 - 27 = -54$

23. Determina, si és possible, les arrels enteres d'aquests polinomis:

$A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

$B(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

$C(x) = 2x^3 + 2$

$D(x) = x^3 + 7x^2 + 6x$

$E(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

$F(x) = x^4 + x^2 - 2$

Les arrels enteres, si n'hi ha, cal que siguin divisors del terme independent.

$$A(x) = x(x^2 - 5x + 6) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \to x_2 = 3,\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$B(-2) = 0 \to x = -2$ és l'única arrel entera.

$C(x) = 0 \to 2x^3 + 2 = 0 \to x^3 = -1 \to x = -1$

$$D(x) = x(x^2 + 7x + 6) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 + 7x + 6 = 0 \to x_2 = -1 \text{ i } x_3 = -6 \end{cases}$$

$E(-2) = 0 \to x = -2$

$F(1) = F(-1) = 0 \to x_1 = 1$ i $x_2 = -1$

24. Esbrina si $x = 3$ és una arrel del polinomi $P = x^3 - 2x^2 - 9$.

$x = 3$ és una arrel de $P(x)$, ja que:

$P(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 9 = 0$

25. Determina les arrels del polinomi: $A(x) = (x^2 - 9)(2x - 1)$

$$A(x) = 0 \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \to x_1 = 3,\ x_2 = -3 \\ 2x - 1 = 0 \to x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

26. Calcula les arrels del polinomi $P(x) = (x^2 - 4)(3x + 1)$.

$$P(x) = 0 \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2 \\ 3x + 1 = 0 \to x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

27. El polinomi $B(x) = (x^2 + 4)(x - 1)$ només té una arrel real. Per què?

$$B(x) = 0 \begin{cases} x^2 + 4 = 0 \to \text{no té solució real.} \\ x - 1 = 0 \to x = 1 \end{cases}$$

28. Factoritza el polinomi $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$. Esbrina una arrel entera entre els divisors del terme independent. Determina'n totes les seves arrels.

Té les arrels -3 i 2 (doble).

$P(x) = (x + 3)(x - 2)^2$

29. Factoritza aquests polinomis:

a) $x^4 - 1$

b) $x^5 + x^4 - x - 1$

c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2$

d) $9x^2 + 30x + 25$

e) $\frac{x^2}{9} - 9$

f) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

a) $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) =$

$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

b) $x^5 + x^4 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2(x^2 + 1)$

$$\left.\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
1 & & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & -1 & -1 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & 0 & -1 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}\right\} \text{divisions successives}$$

c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4x + 4) =$

$= x^2(x + 2)^2$

d) $9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$

e) $\frac{x^2}{9} - 9 = \left(\frac{x}{3} + 3\right)\left(\frac{x}{3} - 3\right)$

f) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 =$

$= (x + 2)(x - 3)(x - 1)^2$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & -3 & 11 & -6 \\
-2 & & -2 & 10 & -14 & 6 \\
\hline
 & 1 & -5 & 7 & -3 & 0 \\
3 & & 3 & -6 & 3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 0 &
\end{array}$$

30. Esbrina les arrels d'aquests polinomis mitjançant la seva factorització:

a) $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

b) $2x^4 + 6x^3 - 8x$

c) $3x^2 + 3x + \frac{3}{4}$

d) $x^3 + 3x^2 - 4x$

e) $x^4 + x^3 - 2x^2$

f) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

a) $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x-3)(x+5)$

Arrels: -1, 3 i -5

b) $2x^4 + 6x^3 - 8x = 2x(x-1)(x+2)^2$

Arrels: 0, 1 i -2 (doble)

c) $3x^2 + 3x + \frac{3}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

Arrel: $-\frac{1}{2}$ (doble)

d) $x^3 + 3x^2 - 4x = x(x+4)(x-1)$

Arrels: 0, -4 i 1

e) $x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2(x+2)(x-1)$

Arrels: 0 (doble), -2 i 1

f) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = (x-1)^2(x-3)(x+2)$

Arrels: 1 (doble), 3 i -2

31. Les arrels d'un polinomi de segon grau són 2 i $-\frac{1}{3}$ i el coeficient de x^2 és 6. Quin és aquest polinomi?

$P(x) = 6(x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 6x^2 - 10x - 4$

32. Calcula l'm. c. d. i l'm. c. m. dels polinomis:

a) $P(x) = x^2 - 9$ **i** $R(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $P(x) = x^2 - 1$ **i** $R(x) = 3x^2 - 6x + 3$

c) $A(x) = 3x^4 - 3$ **i** $B(x) = 3x^2 - 3$

d) $A(x) = x^2 - 2x - 3$, $B(x) = x^3 + 2x^2 + x$ **i** $C(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

a) $P(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

$R(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

m. c. d.: $x - 3$; m. c. m.: $(x+3)(x-3)^2$

b) $P(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$R(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$

m. c. d.: $x - 1$; m. c. m.: $3(x+1)(x-1)^2$

c) $A(x) = 3x^4 - 3 = 3(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$B(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

m. c. d.: $3(x-1)(x+1) = B(x)$

m. c. m.: $3(x^2+1)(x+1)(x-1) = A(x)$

d) $A(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

$B(x) = x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$

$C(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x-3)^2(x-2)$

m. c. d.: 1; m. c. m.: $(x+1)^2(x-3)^2(x-2)x$

33. Esbrina l'm. c. d. i l'm. c. m. de $S(x) = (x-2)^2$ i $T(x) = x^2 - 4$. Comprova que el producte dels dos polinomis que acabes d'esbrinar és igual al producte dels polinomis $S(x)$ i $T(x)$.

$S(x) = (x-2)^2$; $T(x) = (x+2)(x-2)$

m. c. d.: $x - 2$; m. c. m.: $(x-2)^2(x+2)$

Efectivament:

$(x-2)(x-2)^2(x+2) = S(x) \cdot T(x)$

34. L'm. c. d. de dos polinomis $A(x)$ i $B(x)$ és 1. Quin és el seu m. c. m.?

Si l'm. c. d. de $A(x)$ i $B(x)$ és 1, els factors que formen l'm. c. m. són els dels dos polinomis; és a dir, l'm. c. m. $= A(x) \cdot B(x)$

35. Determina si els parells de fraccions següents són equivalents:

a) $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 + 7x + 10}$ **i** $\dfrac{x-5}{x+2}$

b) $\dfrac{1}{x+1}$ **i** $\dfrac{x-1}{x^2+2}$

a) $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 + 7x + 10} = \dfrac{x-5}{x+2}$, ja que:

$(x^2 - 25)(x+2) = (x^2 + 7x + 10)(x-5)$

b) $\dfrac{1}{x+1} \neq \dfrac{x-1}{x^2+2}$, ja que $(x^2+2) \neq x^2 - 1$

36. Considera la fracció $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Indica quines d'aquestes fraccions són equivalents a la fracció donada:

a) $\dfrac{4P(x)}{4Q(x)}$ ***b)*** $\dfrac{10P(x)}{5Q(x)}$

c) $\dfrac{3 + P(x)}{3 + Q(x)}$ ***d)*** $\dfrac{[P(x)]^2}{[Q(x)]^2}$

a) $\dfrac{4P(x)}{4Q(x)} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

La resta de fraccions no són equivalents a $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

37. Indica per a quins valors de x no té valor numèric la fracció algèbrica:

$$\frac{2x+7}{2x^2 - x - 1}$$

La fracció no té valor numèric per als nombres que anul·len el denominador:

$$2x^2 - x - 1 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

38. Simplifica aquestes fraccions algèbriques:

a) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 - 50}$ ***b)*** $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

c) $\dfrac{x^3-5x+4}{x^3-3x^2+3x-1}$ **d)** $\dfrac{x^4-16}{x^3+2x^2+4x+8}$

e) $\dfrac{3x^2-5x+2}{4x^2-4}$ **f)** $\dfrac{2x^2-4x+2}{x^2-1}$

a) $\dfrac{x^2-7x+10}{2x^2-50}=\dfrac{(x-2)(x-5)}{2(x+5)(x-5)}=\dfrac{x-2}{2x+10}$

b) $\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}=$

$=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$

c) $\dfrac{x^3-5x+4}{x^3-3x^2+3x-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x-4)}{(x-1)(x^2-2x+1)}=$

$=\dfrac{x^2+x-4}{x^2-2x+1}$

d) $\dfrac{x^4-16}{x^3+2x^2+4x+8}=\dfrac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{(x^2+4)(x+2)}=x-2$

e) $\dfrac{3x^2-5x+2}{4x^2-4}=\dfrac{(3x-2)(x-1)}{4(x+1)(x-1)}=\dfrac{3x-2}{4(x+1)}$

f) $\dfrac{2x^2-4x+2}{x^2-1}=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$

39. Calcula:

a) $\dfrac{2x-1}{2x+4}+\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{3-x}{x-2}$ **b)** $\dfrac{1-x^2}{x^2-x}\cdot\dfrac{3x}{x-1}$

a) $\dfrac{2x-1}{2x+4}+\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{3-x}{x-2}$

m. c. m. dels denominadors: $2(x-2)(x+2)$.

$\dfrac{(2x-1)(x-2)+2-(3-x)\cdot 2(x+2)}{2(x-2)(x+2)}=$

$=\dfrac{4x^2-7x-8}{2(x^2-4)}$

b) $\dfrac{1-x^2}{x^2-x}\cdot\dfrac{3x}{x-1}=$

$=\dfrac{(1+x)(1-x)3x}{x(x-1)(x-1)}=\dfrac{-3(1+x)}{x-1}$

40. Donades les fraccions:

$A=\dfrac{1}{x+5}$, $B=\dfrac{x^2-25}{x+3}$ i $C=\dfrac{x^2+4x+3}{x+5}$

calcula:

a) $(A\cdot B)\cdot C$ **b)** $(A+C)\cdot B$ **c)** $3A:C$

a) $\dfrac{1}{x+5}\cdot\dfrac{x^2-25}{x+3}\cdot\dfrac{x^2+4x+3}{x+5}=$

$=\dfrac{(x+5)(x-5)(x+3)(x+1)}{(x+5)(x+3)(x+5)}=$

$=\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x+5)}$

b) $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{x^2+4x+3}{x+5}=\dfrac{x^2+4x+4}{x+5}$

$\dfrac{x^2+4x+4}{x+5}\cdot\dfrac{x^2-25}{x+3}=$

$=\dfrac{(x+2)^2(x+5)(x-5)}{(x+5)(x+3)}=\dfrac{(x+2)^2(x-5)}{(x+3)}$

c) $\dfrac{3}{x+5}:\dfrac{x^2+4x+3}{x+5}=\dfrac{3(x+5)}{(x+5)(x^2+4x+3)}=$

$=\dfrac{3}{x^2+4x+3}$

41. Quina fracció hem de sumar a $\dfrac{2x-1}{x+4}$ per obtenir la fracció zero?

Serà la fracció oposada: $\dfrac{-2x+1}{x+4}$.

42. Per quina fracció hem de multiplicar la fracció $\dfrac{3x}{x+3}$ per obtenir el polinomi de grau zero i de coeficient 1, és a dir, $U(x)=1$?

Serà la fracció inversa: $\dfrac{x+3}{3x}$

43. Calcula:

a) $\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{5x}{x+1}-\dfrac{2x}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{3x}:\dfrac{x^2-4x+4}{x+2}$

c) $2-\dfrac{3x}{x+1}$ **d)** $\dfrac{x^2+3}{x^2+1}-5$

a) $\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{5x}{x+1}-\dfrac{2x}{x-1}=$

$=\dfrac{3+5x(x-1)-2x(x+1)}{x^2-1}=\dfrac{3x^2-7x+3}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{3x}:\dfrac{x^2-4x+4}{x+2}=$

$=\dfrac{(x+2)(x-2)(x+2)}{3x(x-2)^2}=\dfrac{(x+2)^2}{3x(x-2)}$

c) $2-\dfrac{3x}{x+1}=\dfrac{2x+2-3x}{x+1}=\dfrac{2-x}{x+1}$

d) $\dfrac{x^2+3}{x^2+1}-5=\dfrac{x^2+3-5x^2-5}{x^2+1}=\dfrac{-4x^2-2}{x^2+1}$

44. Quina condició ha de verificar una fracció algèbrica per tal que sigui equivalent a un polinomi?

Una fracció algèbrica és equivalent a un polinomi si el polinomi numerador és múltiple del polinomi denominador.

45. Comprova que el resultat d'aquesta multiplicació és 1:

$$\frac{x^2-4}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x-2}$$

$\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x-1}{x-2}=$

$=\dfrac{(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}=1$

46. Per quina fracció algèbrica cal multiplicar $\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ per obtenir $\dfrac{1}{2x^2-5x+2}$?

La fracció s'obté en fer la divisió:

$$\frac{1}{2x^2-5x+2}:\frac{2x+1}{x^2-4}=$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(2x+1)(2x-1)}=\frac{x+2}{(4x^2-1)}$$

47. Calcula els nombres combinatoris següents:

$$\binom{6}{2}\quad\binom{10}{0}\quad\binom{80}{5}\quad\binom{15}{7}\quad\binom{15}{8}$$

$$\binom{6}{2}=\frac{6\cdot5}{2}=15$$

$$\binom{10}{0}=1$$

$$\binom{80}{5}=\frac{80!}{75!5!}=24\,040\,016$$

$$\binom{15}{7}=\frac{15!}{8!7!}=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}=6\,435$$

$$\binom{15}{8}=\frac{15!}{7!8!}=6\,435$$

48. Simplifica aquestes fraccions:

a) $\dfrac{10!}{2!8!}$

b) $\dfrac{15!}{3!12!}$

c) $\dfrac{50!}{2!48!}$

d) $\dfrac{1\,000!}{3!997!}$

a) $\dfrac{10!}{2!8!}=\dfrac{10\cdot9}{2}=45$

b) $\dfrac{15!}{3!12!}=\dfrac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2}=455$

c) $\dfrac{50!}{2!48!}=\dfrac{50\cdot49}{2}=1\,225$

d) $\dfrac{1\,000!}{3!997!}=\dfrac{1\,000\cdot999\cdot998}{3\cdot2}=166\,167\,000$

49. Desenvolupa les potències següents:

a) $(x-2)^5$

b) $(3x+2)^6$

a) $$(x-2)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4(-2)+\binom{5}{2}x^3(-2)^2+$$
$$+\binom{5}{3}x^2(-2)^3+\binom{5}{4}x(-2)^4+\binom{5}{5}(-2)^5=$$
$$=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$$

b) $$(3x+2)^6=\binom{6}{0}(3x)^6+\binom{6}{1}(3x)^5 2+\binom{6}{2}(3x)^4\,2^2+$$
$$+\binom{6}{3}(3x)^3 2^3+\binom{6}{4}(3x)^2 2^4+\binom{6}{5}(3x)2^5+\binom{6}{6}2^6=$$
$$=729x^6+2\,916x^5+4\,860x^4+4\,320x^3+2\,160x^2+576x+64$$

50. Calcula el quart terme del desenvolupament de: $(x-1)^{12}$

Quart terme: $\binom{12}{3}x^9(-1)^3=-\dfrac{12!}{9!3!}\,x^9=-220x^9$

51. Donat el polinomi $C(x)=2x^2-4x$, calcula $\left[C(x)\right]^3$.

$$\left(2x^2-4x\right)^3=$$
$$=\binom{3}{0}\left(2x^2\right)^3+\binom{3}{1}\left(2x^2\right)^2(-4x)+\binom{3}{2}\left(2x^2\right)(-4x)^2+\binom{3}{3}(-4x)^3=$$
$$=8x^6-48x^5+96x^4-64x^3$$

52. Desenvolupa aquestes potències:

a) $\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)^7$

b) $\left(3-x^3\right)^4$

a) $$\left(2x+\frac{1}{2}\right)^7=\binom{7}{0}(2x)^7+\binom{7}{1}(2x)^6\cdot\frac{1}{2}+\binom{7}{2}(2x)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+$$
$$+\binom{7}{3}(2x)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{7}{4}(2x)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\binom{7}{5}(2x)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+$$
$$+\binom{7}{6}\cdot2x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6+\binom{7}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7=2^7x^7+7\cdot2^6x^6\cdot\frac{1}{2}+$$
$$+21\cdot2^5x^5\cdot\frac{1}{2^2}+35\cdot2^4x^4\cdot\frac{1}{2^3}+35\cdot2^3x^3\cdot\frac{1}{2^4}+$$
$$+21\cdot2^2x^2\cdot\frac{1}{2^5}+7\cdot2x\cdot\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}=$$
$$=128x^7+224x^6+168x^5+70x^4+\frac{35}{2}x^3+\frac{21}{8}x^2+\frac{7}{32}x+\frac{1}{128}$$

b) $$\left(3-x^3\right)^4=\binom{4}{0}\cdot3^4+\binom{4}{1}\cdot3^3\left(-x^3\right)+\binom{4}{2}\cdot3^2\left(-x^3\right)^2+$$
$$+\binom{4}{3}\cdot3\left(-x^3\right)^3+\binom{4}{4}\left(-x^3\right)^4=$$
$$=81-4\cdot27x^3+6\cdot9x^6-4\cdot3x^9+x^{12}=$$
$$=81-108x^3+54x^6-12x^9+x^{12}$$

53. Calcula en el desenvolupament de la potencia $(2x+3)^{30}$:

a) **El terme de grau 21.**

b) **El terme central.**

c) **El coeficient del terme de grau més gran.**

d) **El dissetè terme.**

a) $\binom{30}{9}(2x)^{21}\cdot 3^9 = 14\,307\,150\cdot 2^{21}\cdot 3^9\,x^{21}$

b) $\binom{30}{15}(2x)^{15}\cdot 3^{15} = 155\,117\,520\cdot 2^{15}\cdot 3^{15}\,x^{15}$

c) $\binom{30}{0}(2x)^{30} = 2^{30}\,x^{30} = 1\,073\,741\,824\,x^{30} \rightarrow$

coeficient: 1 073 741 824

d) $\binom{30}{16}(2x)^{14}\cdot 3^{16} = 145\,422\,675\cdot 2^{14}\cdot 3^{16}\,x^{14}$

54. Emprant el binomi de Newton, calcula la potència:

$\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^8$.

$$\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^8 = \binom{8}{0}\left(3\sqrt{2}\right)^8 + \binom{8}{1}\left(3\sqrt{2}\right)^7\left(-\sqrt{3}\right) +$$

$$+\binom{8}{2}\left(3\sqrt{2}\right)^6\left(-\sqrt{3}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(3\sqrt{2}\right)^5\left(-\sqrt{3}\right)^3 +$$

$$+\binom{8}{4}\left(3\sqrt{2}\right)^4\left(-\sqrt{3}\right)^4 + \binom{8}{5}\left(3\sqrt{2}\right)^3\left(-\sqrt{3}\right)^5 +$$

$$+\binom{8}{6}\left(3\sqrt{2}\right)^2\left(-\sqrt{3}\right)^6 + \binom{8}{7}\cdot\left(3\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^7 + \binom{8}{8}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^8 =$$

$$= 6\,561\cdot 16 - 8\cdot 2\,187\cdot 8\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} +$$
$$+ 28\cdot 729\cdot 8\cdot 3 - 56\cdot 243\cdot 4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3} +$$
$$+ 70\cdot 81\cdot 4\cdot 9 - 56\cdot 27\cdot 2\sqrt{2}\cdot 9\sqrt{3} +$$
$$+ 28\cdot 9\cdot 2\cdot 27 - 8\cdot 3\sqrt{2}\cdot 27\sqrt{3} + 81 =$$
$$= 104\,976 - 139\,968\sqrt{6} + 489\,888 - 163\,296\sqrt{6} +$$
$$+ 204\,120 - 27\,216\sqrt{6} + 13\,608 - 648\sqrt{6} + 81 =$$
$$= 812\,673 - 331\,128\sqrt{6}$$

55. Desenvolupa la potència: $(-a-b)^5$.

$$(-a-b)^5 = \binom{5}{0}(-a)^5 + \binom{5}{1}(-a)^4(-b) + \binom{5}{2}(-a)^3(-b)^2 +$$

$$+\binom{5}{3}(-a)^2(-b)^3 + \binom{5}{4}(-a)(-b)^4 + \binom{5}{5}(-b)^5 =$$

$$= -a^5 - 5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3 - 5ab^4 - b^5$$

Activitats finals

1. Expressa en forma de polinomi ordenat en potències decreixents de x els resultats d'aquestes operacions:

a) $4(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ ***b)*** $\left(x-\sqrt{2}\right)^2x^2$

c) $\frac{1}{x}\cdot\frac{3x^3-x^2}{1-3x}$ ***d)*** $-x^3(1-x)^2$

a) $4(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right) = 4x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{8}{3}$

b) $\left(x-\sqrt{2}\right)^2x^2 =$

$= \left(x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2\right)x^2 = x^4 - 2\sqrt{2}\,x^3 + 2x^2$

c) $\frac{1}{x}\cdot\frac{3x^3-x^2}{1-3x} = \frac{x^2(3x-1)}{x(1-3x)} = -x$

d) $-x^3(1-x)^2 =$

$= -x^3(1-2x+x^2) = -x^5 + 2x^4 - x^3$

2. Considera els polinomis:

$$A(x) = x^2 - 2x - 3 \text{ i } B(x) = (x+1)(x-3).$$

Calcula'n el valor numèric per a $x = 1$ i $x = -2$. Poden ser iguals aquests dos polinomis? Raona la teva resposta i comprova-ho.

$A(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

$A(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$

$B(1) = 2\cdot(-2) = -4$

$B(-2) = -1\cdot(-5) = 5$

No n'hi ha prou que per a un valor de x coincideixin els valors numèrics dels dos polinomis per poder dir que els polinomis són iguals.

3. Escriu dos polinomis de tercer grau la suma dels quals sigui un polinomi de segon grau.

Resposta oberta. Per exemple:

$$\begin{array}{l} A(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1 \searrow \\ B(x) = -2x^3 - x^2 + x \nearrow \end{array} A(x) + B(x) = 2x^2 + x + 1$$

4. Esbrina el polinomi que sumat a $P(x) = x^4 - 3x^2 + 5x$ dóna com a resultat el polinomi $R(x) = x^3 - 1$.

El polinomi que es busca és: $R(x) - P(x)$.

$R(x) - P(x) = x^3 - 1 - x^4 + 3x^2 - 5x =$

$= -x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x - 1$

5. Calcula a, b i c per tal que es verifiqui la igualtat:

$$(x^3 - 2x + a)(bx + c) = 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x + 2$$

$(x^3 - 2x + a)(bx + c) =$

$= bx^4 + cx^3 - 2bx^2 + (ba - 2c)x + ca$

Igualant els coeficients del mateix grau:

$b = 3;\ c = 2;\ ba - 2c = -1 \rightarrow a = 1$

6. La potència de polinomis es defineix com a productes repetits de la base tantes vegades com indica l'exponent. $(3x^2 - 2)^5$ és un polinomi. De quin grau? Quin és el coeficient que acompanya el terme de grau més gran? Quin és el terme independent?

En la potència $(3x^2 - 2)^5$, el primer terme del polinomi és $(3x^2)^5 = 243x^{10}$ i el terme independent: $(-2)^5 = -32$. Per tant, el grau del polinomi és 10.

7. Si $A(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2$, $B(x) = 2x + 3$ i $C(x) = x^3 - 3$, calcula:

a) $B(x) \cdot 3A(x) - C(x)$

b) $3B(x) \cdot A(x) - 2C(x)$

c) $C(x) - 2B(x) - \frac{3}{2}A(x)$

d) $[C(x) - 3A(x)] \cdot B(x)$

a)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 9x^2 & - \frac{3}{2}x & + 6 \\
 & \times & & 2x & + 3 \\
\hline
 & & 27x^2 & - \frac{9}{2}x & + 18 \\
18x^3 & - & 3x^2 & + 12x & \\
\hline
18x^3 & + & 24x^2 & + \frac{15}{2}x & + 18 \\
-x^3 & & & & + 3 \\
\hline
17x^3 & + & 24x^2 & + \frac{15}{2}x & + 21
\end{array}$$

$$B(x) \cdot 3A(x) - C(x) = 17x^3 + 24x^2 + \frac{15}{2}x + 21$$

b)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 3x^2 & - \frac{1}{2}x & + 2 \\
 & \times & & 6x & + 9 \\
\hline
 & & 27x^2 & - \frac{9}{2}x & + 18 \\
18x^3 & - & 3x^2 & + 12x & \\
\hline
18x^3 & + & 24x^2 & + \frac{15}{2}x & + 18 \\
-2x^3 & & & & + 6 \\
\hline
16x^3 & + & 24x^2 & + \frac{15}{2}x & + 24
\end{array}$$

$$3B(x) \cdot A(x) - 2C(x) = 16x^3 + 24x^2 + \frac{15}{2}x + 24$$

c)

$$\begin{array}{rrrrr}
x^3 & & & & - 3 \\
 & & - 4x & & - 6 \\
 & - \frac{9}{2}x^2 & + \frac{3}{4}x & & - 3 \\
\hline
x^3 & - \frac{9}{2}x^2 & - \frac{13}{4}x & & - 12
\end{array}$$

$$C(x) - 2B(x) - \frac{3}{2}A(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{13}{4}x - 12$$

d)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^3 & & & - 3 \\
 & & - 9x^2 & + \frac{3}{2}x & - 6 \\
\hline
 & x^3 & - 9x^2 & + \frac{3}{2}x & - 9 \\
\times & & & 2x & + 3 \\
\hline
 & 3x^3 & - 27x^2 & + \frac{9}{2}x & - 27 \\
2x^4 & - 18x^3 & + 3x^2 & - 18x & \\
\hline
2x^4 & - 15x^3 & - 24x^2 & - \frac{27}{2}x & - 27
\end{array}$$

$$[C(x) - 3A(x)] \cdot B(x) = 2x^4 - 15x^3 - 24x^2 - \frac{27}{2}x - 27$$

8. Hi ha algun polinomi que multiplicat per $x - 4$ doni com a resultat el polinomi $2x^2 - 5x - 12$? Si la resposta és afirmativa, quin és?

El polinomi és el quocient de la divisió:

$(2x^2 - 5x - 12) : (x - 4)$

Si és exacta, existirà aquest polinomi:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 2 & -5 & -12 \\
4 & & 8 & 12 \\
\hline
 & 2 & 3 & \boxed{0}
\end{array}$$

El polinomi és:

$$2x + 3$$

9. Donat el polinomi $A(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 1$, determina, si n'hi ha, un altre polinomi $C(x)$ tal que el quocient de la divisió $A(x) : C(x)$ sigui $2x + 3$ i el residu, -4.

$$\begin{array}{l|l}
A(x) & C(x) \\
\cdots & 2x + 3 \\
\cdots & \\
-4 & \\
/ &
\end{array}$$

$$A(x) = C(x) \cdot (2x + 3) + (-4)$$

$$C(x) = [A(x) + 4] : (2x + 3) = x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^3 & - x^2 & - 4x & + 3 & & 2x + 3 \\
\cline{6-6}
-2x^3 & - 3x^2 & & & & x^2 - 2x + 1 \\
\cline{1-4}
 & - 4x^2 & - 4x & + 3 & & \\
 & + 4x^2 & + 6x & & & \\
\cline{2-4}
 & & 2x & + 3 & & \\
 & & - 2x & - 3 & & \\
\cline{3-4}
 & & & / & &
\end{array}$$

10. Esbrina el dividend d'una divisió en què el quocient és $3x^2 - 2x + 1$; el divisor, $2x^2 + x$ i el residu, $x + 1$.

$D(x) = (2x^2 + x)(3x^2 - 2x + 1) + (x + 1) =$

$= 6x^4 - x^3 + 2x + 1$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 3x^2 & - 2x & + 1 \\
 & \times & & 2x^2 & + x \\
\hline
 & & 3x^3 & - 2x^2 & + x \\
6x^4 & - 4x^3 & + 2x^2 & & \\
\hline
6x^4 & - x^3 & & + x & \\
 & & & x & + 1 \\
\hline
6x^4 & - x^3 & & + 2x & + 1
\end{array}$$

11. Donats els polinomis $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x - 5$ i $Q(x) = x^2 - x + 1$, calcula el quocient i el residu de la divisió $P(x) : Q(x)$,

a) **Aplicant la propietat fonamental de la divisió.**

b) **Fent-ne la divisió.**

Quocient: $2x^2 + x + 2$

Residu: $3x - 2$

12. Calcula *m* per tal que la divisió següent sigui exacta:

$$(x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 7m) : (x^2 + x - 1)$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^4 & +\ x^3 & -\ 2x^2 & -\ x & -\ 7m & & x^2+x-1 \\ \cline{7-7}
-x^4 & -\ x^3 & +\ x^2 & & & & x^2-1 \\ \cline{1-5}
 & & -\ x^2 & -\ x & -\ 7m & & \\
 & & +\ x^2 & +\ x & -\ 1 & & \\ \cline{3-5}
 & & & & -\ 7m-1 & &
\end{array}$$

$-7m - 1 = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{7}$

13. Efectua aquestes divisions. Aplica la regla de Ruffini sempre que sigui possible.

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x) : (2x - 1)$

b) $x^5 : (x^2 - 1)$

c) $(x^4 - 2x^2 + 1) : (x + 2)$

d) $(x^6 + x^3 - x + 1) : (x - 1)$

a)

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\ 3x^2 & +\ 2x & & 2x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\ \frac{1}{2}x^2 & & & \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} \\ \cline{1-3}
 & -\ \frac{5}{2}x^2 & +\ 2x & & \\
 & \frac{5}{2}x^2 & -\ \frac{5}{4}x & & \\ \cline{2-3}
 & & \frac{3}{4}x & & \\
 & & -\ \frac{3}{4}x & +\ \frac{3}{8} & \\ \cline{3-4}
 & & & \frac{3}{8} &
\end{array}$$

Quocient: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}$

Residu: $\frac{3}{8}$

b)

$$\begin{array}{rrr|l}
x^5 & & & x^2-1 \\ \cline{4-4}
-x^5 & +\ x^3 & & x^3+x \\ \cline{1-2}
 & x^3 & & \\
 & -\ x^3 & +\ x & \\ \cline{2-3}
 & & x &
\end{array}$$

Quocient: $x^3 + x$

Residu: x

c) Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
-2 & & -2 & 4 & -4 & 8 \\ \hline
 & 1 & -2 & 2 & -4 & \boxed{9}
\end{array}$$

Quocient: $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

Residu: 9

d) Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline
 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \boxed{2}
\end{array}$$

Quocient: $x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Residu: 2

14. Efectua la divisió entre els polinomis:

$$P(x) = -x^3 + 2x^2 - 4x + 6 \text{ i } Q(x) = x + 1$$

de dues maneres diferents i compara'n els resultats obtinguts.

Quocient: $-x^2 + 3x - 7$

Residu: 13

15. Calcula un possible valor enter de *k* per tal que el polinomi $x + k$ sigui divisor del polinomi $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 3$. Expressa aquest darrer polinomi com a producte de dos polinomis.

Els únics valors enters possibles de k han de ser els divisors del terme independent 3, que són: –1, 1, –3 i 3. Provem quins d'aquests divisors anul·len el polinomi $A(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 3$. Per fer-ho, utilitzem el teorema del residu:

$x = -1 \rightarrow A(-1) = 1 + 2 + 1 + 3 + 3 = 10$

$x = 1 \rightarrow A(1) = 1 - 2 + 1 - 3 + 3 = 0$

$x = -3 \rightarrow A(-3) = 81 + 54 + 9 + 9 + 3 = 156$

$x = 3 \rightarrow A(3) = 81 - 54 + 9 - 9 + 3 = 30$

L'únic valor enter possible que anul·la el polinomi $A(x)$ és $x = 1$. Per tant, el polinomi $A(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 3$ és divisible per $x-1$; si $x + k$ ha de ser divisor del polinomi $A(x)$ i $x-1$ és l'únic divisor possible, tenim que: $x + k = x - 1$, d'on resulta $k = -1$.

Fem la divisió per Ruffini: $(x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 3) : (x - 1) = x^3 - x^2 - 3$, i obtenim: $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 3) = (x^3 - x^2 - 3)(x - 1)$

16. Esbrina si el polinomi $6x^2 - 6x - 12$ és divisible per $2x - 4$. Pots donar la resposta sense fer la divisió?

El polinomi és múltiple de 2.

$6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$

$2x - 4 = 2(x - 2)$

$2^2 - 2 - 2 = 0$. Sí, és divisible.

17. Determina el valor de *k* per tal que el residu de la divisió $(x^4 - 3x^2 + kx - 3) : (x - 2)$ sigui –3.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -3 & k & -3 \\
2 & & 2 & 4 & 2 & 2(k+2) \\ \hline
 & 1 & 2 & 1 & k+2 & -3+2(k+2)
\end{array}$$

$-3 + 2(k + 2) = -3 \rightarrow 2(k + 2) = 0 \rightarrow k = -2$

18. Dels nombres enters 1, –1, 2, –2, 4 i –4, quins són arrels del polinomi $A(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$? Quins no ho són?

Cal buscar el valor numèric del polinomi per a cada una de les preteses arrels.

El valor numèric és zero i, per tant, són arrels: 1, –2 i 4. La resta no ho són.

19. Esbrina, en cada cas, el valor o els valors de *m* que fan que la divisió:

$$(x^3 - mx^2 + x - m) : (x + 1)$$

a) **Sigui exacta.**

b) **Tingui residu 4.**

c) **No tingui residu –2.**

d) **El residu sigui positiu.**

	1	$-m$	1	$-m$
-1		-1	$m + 1$	$-m - 2$
	1	$-m - 1$	$m + 2$	$-2m - 2$

a) $-2m - 2 = 0 \rightarrow m = -1$

b) $-2m - 2 = 4 \rightarrow m = -3$

c) $-2m - 2 = -2 \rightarrow m = 0$

Perquè el residu no sigui –2, $m \neq 0$

d) $-2m - 2 > 0 \rightarrow m < -1$

20. Sense fer la divisió, indica i justifica si les divisions següents són exactes o no:

a) $(5x^3 - 2x + 3) : (x + 1)$

b) $(x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x - 2)$

c) $(x^3 - 2x^2 - x + 6) : (x + 2)$

d) $(2x^2 - x - 3) : (x - 1)$

a) És exacta perquè $P(-1) = 0$.

b) És exacta perquè $P(2) = 0$.

c) No és exacta perquè $P(-2) = -8$.

d) No és exacta perquè $P(1) = -2$.

21. Quines són les arrels enteres del polinomi $x^8 - 1$? Raona la resposta. Té alguna arrel entera el polinomi $x^8 + 1$? Per què?

Les arrels enteres de $x^8 - 1$ són 1 i –1 que fan zero el valor numèric del polinomi.

$x^8 + 1$ no té arrel ja que $1^8 + 1 = (-1)^8 + 1 = 2$.

22. Factoritza els polinomis següents:

a) $A(x) = 3x^3 - 75x$

b) $B(x) = 3x^3 + 18x^2 + 27x$

c) $C(x) = 2x^4 - 12x^3 + 18x^2$

d) $D(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$

a) $A(x) = 3x^3 - 75x$

$A(x) = 3x(x^2 - 25) = 3x(x + 5)(x - 5)$

b) $B(x) = 3x^3 + 18x^2 + 27x$

$B(x) = 3x(x^2 + 6x + 9) = 3x(x + 3)^2$

c) $C(x) = 2x^4 - 12x^3 + 18x^2$

$C(x) = 2x^2(x - 3)^2$

d) $D(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$

$D(x) = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2$

23. Comprova que el polinomi $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ no té cap arrel entera. És possible factoritzar-lo? Justifica la resposta.

$P(1) = 5$ i $P(-1) = 1$, per tant, com que 1 i –1 són les úniques arrels enteres possibles perquè són els únics divisors del terme independent 1, $P(x)$ no té cap arrel entera.

24. Indica les arrels dels polinomis següents:

a) $A(x) = 4x^2 - 16$

b) $B(x) = (2x + 6)(x - 2)(x^2 + 1)$

c) $C(x) = (3x - 1)(x^2 + 6x + 9)$

d) $D(x) = (x^2 - 3x + 2)(x + 1)$

a) $4x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

b) $(2x + 6)(x - 2)(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = -3, x = 2$

c) $(3x - 1)(x^2 + 6x + 9) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}, x = -3$ (doble)

d) $(x^2 - 3x + 2)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 1, x = 2, x = -1$

25. Determina l'm. c. d. i l'm. c. m. dels polinomis:

$A(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2$, $B(x) = x^3 - x$ i

$C(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$

$A(x) = 2x^2(x - 1)(x + 2)^2$

$B(x) = x(x + 1)(x - 1)$

$C(x) = x(x - 1)^2(x + 1)$

m. c. d. $= (x - 1)x$;

m. c. m. $= 2x^2(x - 1)^2(x + 1)(x + 2)^2$

26. Calcula:

$$\frac{1 - x}{1 + x} + \frac{x + 1}{1 - x} - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Cal tenir en compte que

$1 - x = -(x - 1)$. m. c. m. $= x^2 - 1$

$$\frac{(1 - x)(x - 1)}{x^2 - 1} - \frac{(x + 1)(1 + x)}{x^2 - 1} - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} =$$

$$= \frac{-3x^2 - 3}{x^2 - 1}$$

27. Donades les fraccions següents:

$P = \dfrac{x - 2}{x^2 + 6x + 9}$ **i** $Q = \dfrac{x + 3}{x^2 - 4}$**, calcula:**

a) $P \cdot Q$ ***b)*** $P : Q$ ***c)*** $Q : P$

a) $P \cdot Q = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+3)^2(x+2)(x-2)} =$

$= \dfrac{1}{(x+3)(x+2)}$

b) $P : Q = \dfrac{(x-2)(x+2)(x-2)}{(x+3)^2(x+3)} = \dfrac{(x-2)^2(x+2)}{(x+3)^3}$

c) $Q : P = \dfrac{(x+3)^3}{(x-2)^2(x+2)}$

28. Calcula el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple dels polinomis $P(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ i $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$. I utilitza'ls per:

a) **Simplificar les expressions algèbriques $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ i $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$.**

b) **Calcular $\dfrac{3}{P(x)} + \dfrac{2x+1}{Q(x)}$.**

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x-2)(x-4)$

$Q(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x-2)^2$

m. c. d. $= x\,(x-2)$

m. c. m. $= x^2\,(x-2)^2\,(x-4)$

a) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x-4}{x(x-2)}$

$\dfrac{Q(x)}{P(x)} = \dfrac{x(x-2)}{x-4}$

b) $\dfrac{3}{P(x)} + \dfrac{2x+1}{Q(x)} = \dfrac{3}{x(x-2)(x-4)} + \dfrac{2x+1}{x^2(x-2)^2} =$

$= \dfrac{3x(x-2) + (2x+1)(x-4)}{x^2(x-2)^2(x-4)} = \dfrac{5x^2 - 13x - 4}{x^2(x-2)^2(x-4)}$

29. Simplifica les expressions algèbriques següents:

a) $\dfrac{x^3 - 9x}{x^3 + 5x^2 + 6x}$

b) $\dfrac{4 - x^2}{x^2 + 2x - 8}$

c) $\dfrac{3x^2}{x^4 + 2x^2}$

d) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2}$

a) $\dfrac{x^3 - 9x}{x^3 + 5x^2 + 6x} = \dfrac{x-3}{x+2}$

b) $\dfrac{4 - x^2}{x^2 + 2x - 8} = -\dfrac{2+x}{x+4}$

c) $\dfrac{3x^2}{x^4 + 2x^2} = \dfrac{3}{x^2 + 2}$

d) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2} = \dfrac{x+1}{2(x-1)}$

30. Calcula:

a) $\dfrac{2x-1}{2x^2} + \dfrac{1-x}{6x} - \dfrac{x+2}{3x^3}$

b) $\dfrac{x^2-1}{4x^2} \cdot \dfrac{2x}{x+1}$

c) $\dfrac{4-x^2}{x^3-x} : \dfrac{x+2}{3x^2-3}$

d) $\dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{2x+2}{3x^2} - \dfrac{5}{6x}$

a) $\dfrac{2x-1}{2x^2} + \dfrac{1-x}{6x} - \dfrac{x+2}{3x^3} = \dfrac{-x^3 + 7x^2 - 5x - 4}{6x^3}$

b) $\dfrac{x^2-1}{4x^2} \cdot \dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{x-1}{2x}$

c) $\dfrac{4-x^2}{x^3-x} : \dfrac{x+2}{3x^2-3} = \dfrac{3\,(2-x)}{x}$

d) $\dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{2x+2}{3x^2} - \dfrac{5}{6x} = -\dfrac{1}{6x}$

31. Comprova les igualtats següents:

a) $\dbinom{7}{0} + \dbinom{7}{1} + \dbinom{7}{2} + \cdots + \dbinom{7}{7} = 2^7$

b) $\dbinom{8}{5} + \dbinom{8}{6} = \dbinom{9}{6}$

c) $\dbinom{15}{2} = \dbinom{15}{13}$

a) $\dbinom{7}{0} + \dbinom{7}{1} + \dbinom{7}{2} + \cdots + \dbinom{7}{7} =$

$= 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 31 + 7 + 1 = 128 = 2^7$

b) $\dbinom{8}{5} = \dfrac{8!}{5!3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

$\dbinom{8}{6} = \dfrac{8!}{6!2!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 28$

$\dbinom{9}{6} = \dfrac{9!}{6!3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 = 56 + 28$

c) $\dbinom{15}{2} = \dfrac{15!}{2!13!} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{2! \cdot 13!} = \dfrac{15 \cdot 14}{2!} = 105$

$\dbinom{15}{13} = \dfrac{15!}{13!2!} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{2! \cdot 13!} = \dfrac{15 \cdot 14}{2!} = 105$

32. Calcula les potències utilitzant el binomi de Newton:

a) $(2x - x^3)^8$

b) $(3x^2 + x)^6$

c) $(4 - x)^5$

d) $\left(\sqrt{3}\,x + \sqrt{2}\right)^3$

a) $(2x - x^3)^8 =$

$$= \binom{8}{0}(2x)^8 + \binom{8}{1}(2x)^7(-x^3) + \binom{8}{2}(2x)^6(-x^3)^2 +$$
$$+ \binom{8}{3}(2x)^5(-x^3)^3 + \binom{8}{4}(2x)^4(-x^3)^4 + \binom{8}{5}(2x)^3(-x^3)^5 +$$
$$+ \binom{8}{6}(2x)^2(-x^3)^6 + \binom{8}{7}(2x)(-x^3)^7 + \binom{8}{8}(-x^3)^8 =$$
$$= 256x^8 - 1024x^{10} + 1\,792x^{12} - 1\,792x^{14} +$$
$$+ 1\,120x^{16} - 448x^{18} + 112x^{20} - 16x^{22} + x^{24}$$

b) $(3x^2 + x)^6 =$
$= 729x^{12} + 1458x^{11} + 1215x^{10} + 540x^9 + 135x^8 + 18x^7 + x^6$

c) $(4 - x)^5 = 1024 - 1280x + 640x^2 - 160x^3 + 20x^4 - x^5$

d) $\left(\sqrt{3}\,x + \sqrt{2}\right)^3 = 3\sqrt{3}\,x^3 + 9\sqrt{2}\,x^2 + 6\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{2}$

33. En el desenvolupament de la potència $(2x^2 + 1)^{36}$, determina:

a) **El terme central.**

b) **El coeficient del terme de grau 24.**

c) **El terme de grau més gran.**

d) **El 29è terme.**

a) $\binom{36}{17} 2^{19} x^{38} = 4507564297420800x^{38}$

b) $\binom{36}{12} 2^{12} = 5126871859200$

c) $2^{36}\, x^{72} = 68\ 719\ 476\ 736\ x^{72}$

d) $\binom{36}{28} 2^{28} x^{56} = 8122948166615040\ x^{56}$

34. Determina el valor de *k* de la potència $(2x^2 + k)^6$ si el coeficient del terme central és 160.

$\binom{6}{3} 2^3 k^3 = 160 \rightarrow k = 1$

35. Calcula les potències:

a) $(x^2 + x + 1)^3$

b) $(2x^3 - x^2 + x - 3)^2$

a) $(x^2 + x + 1)^3 = x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1$

b) $(2x^3 - x^2 + x - 3)^2 = 4x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 14x^3 + 7x^2 - 6x + 9$

Unitat 3. Funcions

Activitats

1. Representant amb x la variable independent i amb $f(x)$ la variable dependent, escriu l'expressió algèbrica de la funció que fa correspondre:

a) A la longitud del costat d'un quadrat, la mesura del perímetre.

b) Al diàmetre d'una circumferència, l'àrea del cercle que limita.

c) A una quantitat de diners invertida al 5 % d'interès durant 4 anys, els interessos que produeix.

d) A un rectangle de 16 cm de perímetre, la mesura de la superfície.

e) A l'àrea d'un quadrat, la longitud del costat.

a) $f(x) = 4x$

b) $f(x) = \frac{\pi}{4}x^2$

c) $f(x) = \frac{x}{5}$

d) $f(x) = 8x - x^2$, on x representa una de les dimensions del rectangle.

e) $f(x) = \sqrt{x}$

2. L'expressió algèbrica de la funció $i = f(n)$ de la factura de la llum sense IVA de l'exemple és $i = 16{,}53 + 0{,}08n$. Determina l'expressió algèbrica d'aquesta funció tenint en compte l'IVA.

Quin és l'import amb un consum energètic de 350 kWh? Si l'import de la factura puja 65,57 €, quants kWh s'han gastat?

$i = f(n) = 1{,}21(16{,}53 + 0{,}08n) \simeq 20 + 0{,}1n$

$n = 350 \text{ kwh} \rightarrow i = f(350) = 55 \text{ €}$

$i = f(n) = 65{,}57 \text{ €} \rightarrow n = 455{,}7 \text{ kwh}$

3. L'expressió algèbrica d'una funció és $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Esbrina les imatges de –1, 0 i 3 i les antiimatges de –4, –1 i 0.

$f(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 8 = 1 + 6 + 8 = 15$

$f(0) = 8$

$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1$

Antiimatge de –4:

$-4 = x^2 - 6x + 8 \rightarrow x^2 - 6x + 12 = 0$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 48}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin \mathbb{R}$

–4 no té antiimatge.

Antiimatge de –1:

$-1 = x^2 - 6x + 8 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = 3$

L'antiimatge de –1 és 3.

Antiimatge de 0:

$0 = x^2 - 6x + 8 \begin{cases} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = 4 \end{cases}$

0 té dues antiimatges: 2 i 4.

4. Si considerem la funció $f(x) = \frac{3}{x}$, hi ha algun nombre real que no tingui imatge? Justifica la resposta.

No existeix $f(0)$, ja que no és possible la divisió $\frac{3}{0}$.

5. Una de les gràfiques de la Figura 3.4 no correspon a una funció. Indica quina és i raona la resposta.

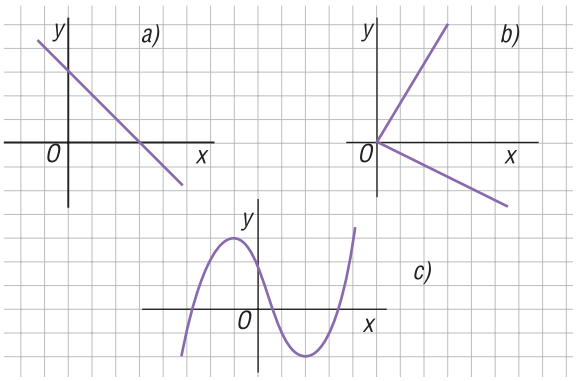


Fig. 3.4

La gràfica de l'apartat *b*), perquè hi ha valors de x que tenen dues imatges.

6. Determina el domini d'aquestes funcions:

a) $f(x) = 6 - 2x$

b) $g(x) = x^2 - 5x + 6$

c) $h(x) = \frac{1}{x - 2}$

d) $i(x) = \frac{-2}{x + 1}$

a) $D_f = \mathbb{R}$ perquè $f(x)$ és una funció polinòmica.

b) $D_g = \mathbb{R}$, perquè $g(x)$ és una funció polinòmica.

c) $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow D_h = \mathbb{R} - \{2\}$

d) $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow D_i = \mathbb{R} - \{-1\}$

7. Indica el domini i el recorregut de les funcions que hi ha representades a la Figura 3.10.

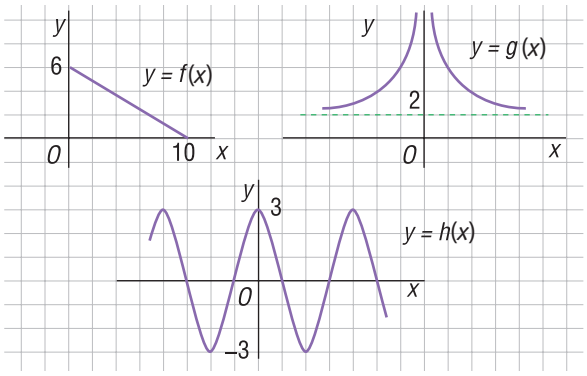


Fig. 3.10

$D_f = [0, 10], R_f = [0, 6]$

$D_g = \mathbb{R} - \{0\}, R_g = (2, +\infty)$

$D_h = \mathbb{R}, R_h = [-3, 3]$

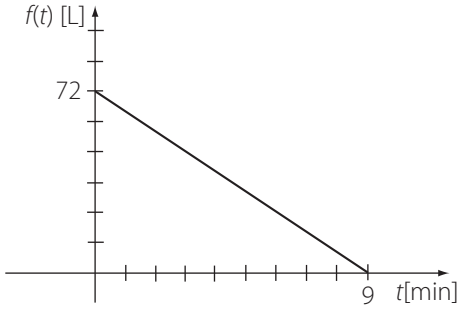
8. Un dipòsit conté 72 L d'aigua i disposa d'un desguàs capaç de buidar-lo a raó de 8 L/min. Esbrina l'expressió algèbrica que permet calcular la quantitat d'aigua que queda al dipòsit en funció del temps que ha transcorregut des que s'obre el desguàs. Representa-la gràficament i estableix-ne el domini i el recorregut.

$f(t) = 72 - 8t$, on $f(t)$ s'expressa en litres i t, en minuts.

$D_f = [0, 9], R_f = [0, 72]$

Cal tenir en compte que el dipòsit triga 9 minuts a buidar-se:

$72 - 8t = 0 \rightarrow t = 9$ min



9. L'expressió algèbrica d'una funció és:

$$f(x) = \frac{x-4}{x+a}$$

Esbrina el valor de a sabent que $f(x)$ està definida per a qualsevol nombre real $x \neq 3$.

$x + a = 0 \rightarrow x = -a$

El denominador de l'expressió algèbrica de la funció s'anul·la quan $x = 3$. Aleshores: $-a = 3 \rightarrow a = -3$

10. Sabem que el domini d'una funció que té com a expressió algèbrica $f(x) = 10 - 2x$, és $D_f = [0, 5]$.

***a*) Representa-la gràficament.**

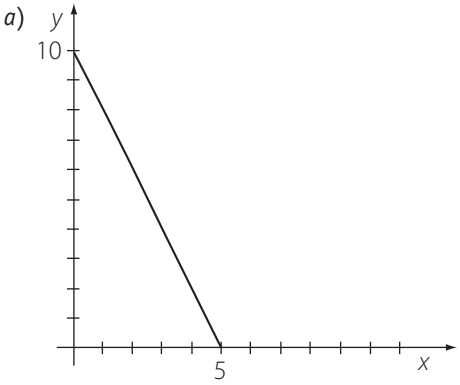
***b*) Indica'n el recorregut.**

Es tracta d'una recta de la qual podem determinar fàcilment dos punts:

$x = 0 \rightarrow y = f(0) = 10$

$x = 5 \rightarrow y = f(5) = 10 - 10 = 0$

a)



b) $R_f = [0, 10]$

11. Sabent que $f(a) = \frac{1}{2}$ i $g(a) = \frac{2}{3}$, esbrina els valors de $(f+g)(a)$, $(f \cdot g)(a)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(a)$ i $\left(\frac{g}{f}\right)(a)$.

$(f+g)(a) = f(a) + g(a) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

$(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(a) = \frac{g(a)}{f(a)} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

12. Donades les funcions $f(x) = x^2 - 9$ i $g(x) = x - 5$, determina l'expressió algèbrica de les funcions $(f+g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ i $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$. Indica el domini de cadascuna.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 9 + x - 5 =$

$= x^2 + x - 14; D_{f+g} = \mathbb{R}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 9) \cdot (x - 5) =$

$= x^3 - 5x^2 - 9x + 45; D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9}{x - 5}$

$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5; D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{5\}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x - 5}{x^2 - 9}$

$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3; D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

13. Donades les funcions $f(x) = 2x - 4$ i $g(x) = x + 2$, per a quin valor de x no existeix la funció $\frac{f}{g}$? I la funció $\frac{g}{f}$? Raona les respostes.

La funció $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ no existeix quan $x = -2$, perquè $g(-2) = 0$.

La funció $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ no existeix quan $x = 2$, perquè $f(2) = 0$.

14. L'element simètric de la funció $f(x)$ en el producte de funcions és la funció $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$, $f(x) \neq 0$; es verifica que $f(x) \cdot \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 1$. Quina és l'expressió algèbrica i el domini de la funció $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ si $f(x) = x^2 + 4$?

$f(x) = x^2 + 4 \rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 4}$

$D_{\frac{1}{f}} = \mathbb{R}$, ja que l'equació $x^2 + 4 = 0$ no té solució real.

15. La funció f fa correspondre a cada nombre real el seu quadrat i la funció g fa correspondre a cada nombre real diferent de zero el seu invers. Esbrina $(g \circ f)(3)$ i $(f \circ g)(3)$.

$f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x}$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(9) = \frac{1}{9}$

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

16. Estableix l'expressió algèbrica de les funcions $g \circ f$ i $f \circ g$ si $f(x) = x - 5$ i $g(x) = 2x^2 - 3$.

$f(x) = x - 5; g(x) = 2x^2 - 3$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 5) = 2(x - 5)^2 - 3 =$
$= 2x^2 - 20x + 47$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2 - 3) = 2x^2 - 8$

17. A partir de la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 6x$ de la Figura 3.14, raona l'existència, o no, de la funció inversa de f.

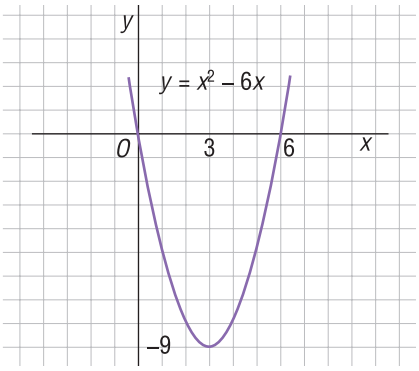
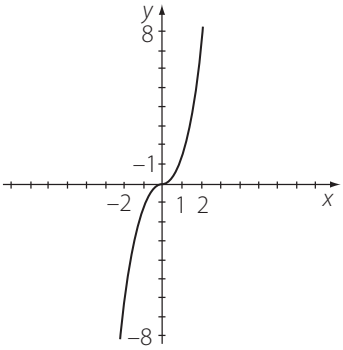


Fig. 3.14

La funció f no té inversa, ja que hi ha valors de x que són diferents i tenen la mateixa imatge. Per exemple, $f(0) = f(6) = 0$.

18. Elabora una taula de valors per a la funció $f(x) = x^3$ i fes-ne la representació gràfica. Existeix la funció inversa d'aquesta funció? Si la resposta és afirmativa, esbrina'n l'expressió algèbrica.

x	$f(x) = x^3$
–2	–8
–1	–1
0	0
1	1
2	8



La funció f té inversa, ja que si $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ per a qualsevol parell de valors reals. L'expressió de la funció inversa de la funció f és:

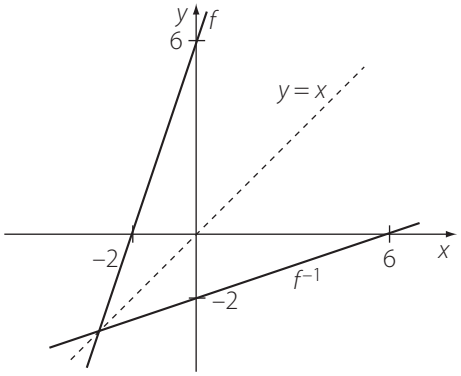
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

19. Té inversa la funció $f(x) = x^4$? Per què?

No, perquè podem trobar valors $x_1 \neq x_2$ per als quals $f(x_1) = f(x_2)$. Per exemple, $f(-1) = f(1) = 1$. En general, $f(-x) = f(x) = x^4$.

20. Determina la funció inversa de la funció: $f(x) = 3x + 6$. Representa gràficament les funcions f i f^{-1} i comprova que són simètriques respecte de la recta $y = x$.

$y = 3x + 6 \rightarrow 3x = y - 6 \rightarrow x = \frac{1}{3}y - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - 2$



21. Comprova que la funció inversa de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ és aquesta mateixa funció.

$f(x) = \frac{1}{x}, f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

22. Hem comprovat que la funció $f(x) = x^2$ no té inversa. Malgrat tot, segons el fenomen a què s'apliqui, és possible que la tingui. És el que succeeix, per exemple, en el cas que x representi la longitud del costat d'un quadrat i $f(x)$, la mesura de la seva superfície. Intenta justificar aquesta afirmació.

Tenint en compte que la longitud dels costats d'un quadrat és sempre un nombre positiu, som davant de la funció $f(x) = x^2$ amb el domini restringit a l'interval $(0, +\infty)$. En aquestes condicions, existeix la funció inversa de la funció f i la seva expressió algèbrica és $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

23. Suposem que establir una trucada telefònica costa 0,8 € i que, a partir d'aquest moment, el preu és de 0,4 € per minut. Escriu l'expressió de la funció que ens proporciona l'import $f(x)$ en euros de la trucada en funció de la durada x en minuts. Quina és l'expressió algèbrica de la funció f^{-1}? Què indica aquesta funció?

$f(x) = 0{,}80 + 0{,}40x$ on $f(x)$ s'expressa en euros i x en minuts.

$y = 0{,}80 + 0{,}40x \rightarrow x = \frac{1}{0{,}40}y - \frac{0{,}80}{0{,}40} \rightarrow$

$x = 2{,}5y - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = 2{,}5x - 2$

La funció inversa de la funció f és $f^{-1}(x) = 2{,}5x - 2$. Indica la durada de la trucada telefònica en funció del seu import.

24. Dibuixa de manera aproximada la gràfica d'una funció f que compleixi les condicions següents:

- **El domini i el recorregut són tots els nombres reals.**
- **Presenta un màxim relatiu en el punt (–2, 4) i un mínim relatiu en el punt (3, –5).**

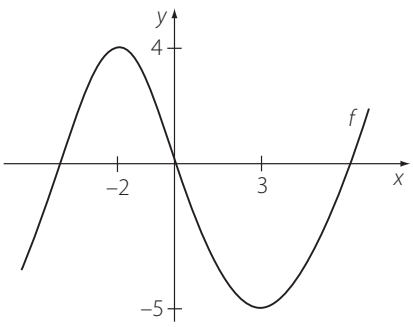
a) **En quants punts talla la gràfica de la funció l'eix d'abscisses?**

b) **I el d'ordenades?**

c) **Indica els intervals de creixement i decreixement de la funció.**

Resposta oberta. Per exemple, la funció representada a la figura.

Talla l'eix de les abscisses en tres punts i el d'ordenades en un punt. És creixent en els intervals $(-\infty, -2)$ i $(3, +\infty)$ i decreixent en l'interval (–2, 3).



25. Assenyala els punts de discontinuïtat de les funcions representades a la Figura 3.28.

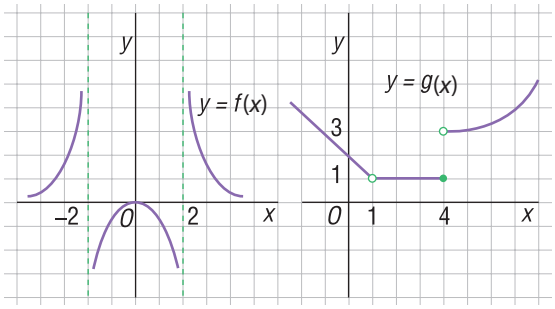


Fig. 3.28

La funció f és discontínua en $x = -2$ i en $x = 2$.

La funció g és discontínua en $x = 1$ i en $x = 4$.

26. Donades les funcions $f(x) = 5x - 10$ i $g(x) = x^2 + 4x + 5$, esbrina els punts d'intersecció de cadascuna amb els eixos de coordenades.

$f(x) = 5x - 10$

eix $OX \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow 5x - 10 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$

eix $OY \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = -10 \rightarrow (0, -10)$

$g(x) = x^2 + 4x + 5$

eix $OX \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 5 = 0$. Aquesta equació no té solucions reals i, per tant, la gràfica de la funció g no talla l'eix OX.

eix $OY \rightarrow x = 0 \rightarrow g(0) = 5 \rightarrow (0, 5)$

27. La Figura 3.29 representa la gràfica d'una funció $y = f(x)$ a l'interval (0, 3]. Dibuixa la gràfica aproximada d'aquesta funció a l'interval (–3, 3] sabent que és periòdica de període 3.

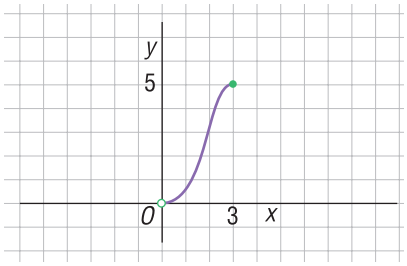
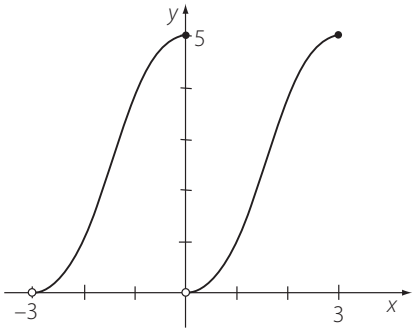


Fig. 3.29



28. A la Figura 3.30 hem representat el gràfic de la funció que ens proporciona l'altura *y* a què arriba una pilota llançada des de terra verticalment cap amunt al buit amb una certa velocitat inicial. Naturalment, aquesta altura és funció del temps *t* transcorregut des de l'instant del llançament, $y = f(t)$.

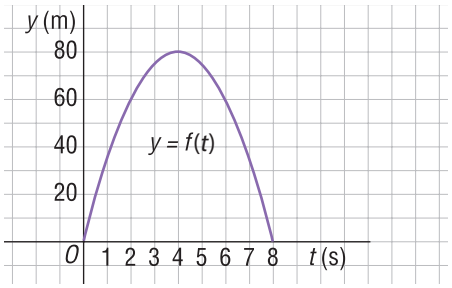


Fig. 3.30

a) **Indica el domini i el recorregut d'aquesta funció.**

b) **Quina és l'altura màxima a què arriba la pilota? Quanta estona triga a assolir-la?**

c) **Al cap de 4,5 s d'haver sigut llançada, segueix una trajectòria ascendent o descendent?**

d) **Quant triga a tornar al punt de partida?**

a) $D_f = [0, 8], R_f = [0, 80]$

b) L'altura màxima que assoleix la pilota és de 80 m. Assoleix aquesta altura 4 s després de ser llançada.

c) Quan $t = 4{,}5$ s la pilota es troba en trajectòria descendent.

d) Triga 8 s a tornar a la posició de partida.

29. Imagina que la pilota de l'activitat anterior no perd energia al moment de l'impacte amb el terra i surt rebotada amb la mateixa velocitat amb què s'ha llançat inicialment.

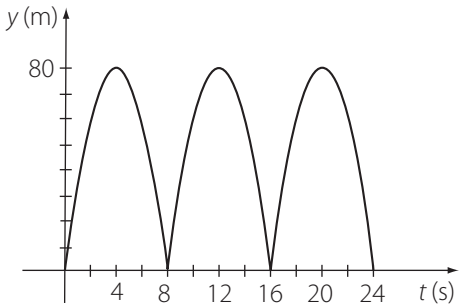
Suposant que aquesta situació es repeteixi cada vegada que la pilota rebota:

a) **Dibuixa la gràfica de la funció $y = f(t)$ que correspon a l'instant en què la pilota topa amb el terra per tercera vegada.**

b) **És una funció periòdica?**

c) **Si la resposta és afirmativa, quin és el valor del període?**

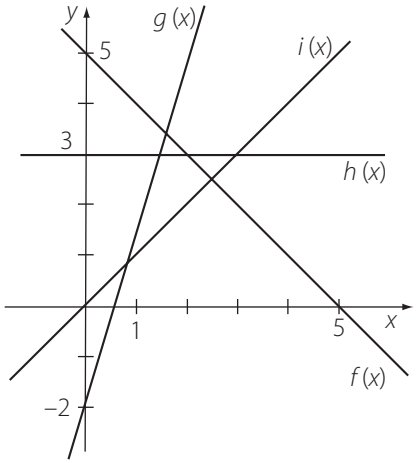
La funció és periòdica i el període és 8 s.



30. Representa gràficament les funcions següents:

a) $f(x) = -x + 5$ ***b)*** $g(x) = 4x - 2$

c) $h(x) = 3$ ***d)*** $i(x) = x$



31. Determina l'equació de la recta que passa pels punts $A(-4, 3)$ i $B(5, 2)$.

$$m = \frac{2-3}{5-(-4)} = -\frac{1}{9}$$

$$y - 3 = -\frac{1}{9}(x+4) \rightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{23}{9}$$

32. Les rectes que representen les funcions lineals $f(x) = -2x + 5$ i $g(x) = mx + n$ són paral·leles. Esbrina el valor de *m* i *n*. Hi ha més d'una solució?

Si les rectes $y = -2x + 5$ i $y = mx + n$ són paral·leles, cal que es verifiqui:

$m = -2, n \neq 5$

Per a cada valor real $n \neq 5$ s'obté una recta paral·lela a la recta $y = -2x + 5$. Hi ha, per tant, un nombre il·limitat de solucions.

33. Quin és el recorregut d'una funció lineal? No oblidis que és possible que *m* sigui zero.

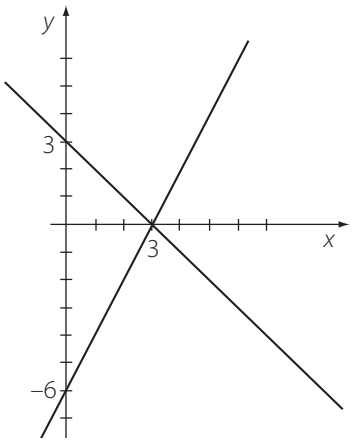
Si $f(x) = mx + n, m \neq 0, R_f = \mathbb{R}$

En cas que $m = 0 \rightarrow f(x) = n \rightarrow R_f = \{n\}$

34. Esbrina el punt d'intersecció de les rectes $y = -x + 3$ i $y = 2x - 6$. Comprova gràficament el resultat que obtinguis.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x + 3 \\ y = 2x - 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -x + 3 = 2x - 6 \rightarrow 9 = 3x \rightarrow x = 3 \rightarrow \\ y = 0 \rightarrow (3, 0) \end{array}$$

Les dues rectes es tallen en el punt (3, 0).



35. Una empresa de lloguer de cotxes ofereix dues opcions si contractem un model determinat:

Contracte *A*: 48,08 € per dia i quilometratge il·limitat.

Contracte *B*: 12,02 € per dia i 0,09 € per quilòmetre.

Un turista vol fer un viatge de cinc dies, però no sap quants quilòmetres ha de recórrer.

***a*) Determina quin dels dos contractes li resulta més avantatjós en funció dels quilòmetres recorreguts. Indica els intervals en què es produeix cada situació.**

***b*) Calcula per a quin quilometratge els dos contractes són igual d'econòmics.**

***c*) Elabora una representació gràfica i comprova geomètricament els resultats obtinguts. En quin punt es tallen les gràfiques de les dues funcions?**

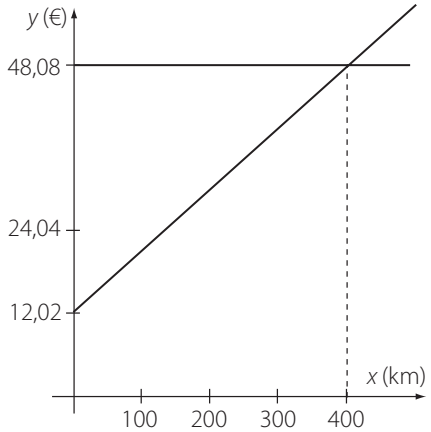
Contracte *A*: $y = 48{,}08$ (y en euros).

Contracte *B*: $y = 12{,}02 + 0{,}09x$ (y en euros i x en quilòmetres).

a) Per a $x < 400$ km és més avantatjós el contracte *B*, i per a $x > 400$ km és més avantatjós el contracte *A*.

b) $48{,}08 = 12{,}02 + 0{,}09x \rightarrow x = 400{,}67 \text{ km} \simeq 400 \text{ km}$

c) Les gràfiques de les dues funcions es tallen en el punt (400; 48,08). De fet, ho fan en el punt (400,67; 48,08).



36. Determina l'expressió algèbrica de la funció d'interpolació lineal $y = f(x)$ corresponent als parells de valors (3, 5) i (1, 2). Esbrina:

***a*) $f(2{,}5)$**

***b*) $f(1{,}5)$**

Equació de la recta que conté els punts (3, 5) i (1, 2).

$$m = \frac{2-5}{1-3} = \frac{3}{2}$$

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x-1) \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$f(2{,}5) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{15}{4} + \frac{1}{2} = \frac{17}{4} = 4{,}25$$

$$f(1{,}5) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} = 2{,}75$$

37. Un municipi tenia 2 540 habitants l'any 2004 i 3 260 l'any 2014.

***a*) Utilitza la interpolació lineal per estimar quants habitants tenia el municipi l'any 2010.**

***b*) En quin any va arribar previsiblement a 3 000 habitants?**

Busquem la funció d'interpolació lineal:

(2004, 2 540) i (2014, 3 260)

$$f(x) = mx + n$$

$$m = \frac{3\,260 - 2\,540}{2014 - 2004} = 72$$

$$f(2004) = 72 \cdot 2004 + n$$

$$n = 2540 - 72 \cdot 2004 = -141\,748$$

$$f(x) = 72x - 141\,748$$

a) $f(2010) = 2\,972 \rightarrow$ El municipi tenia 2 972 habitants l'any 2010.

b) $3\,000 = 72x - 141\,748 \rightarrow x = 2010{,}39$. Va arribar a 3 000 habitants durant l'any 2010.

38. La Taula 3.4 mostra la depreciació del preu d'un cotxe amb el temps.

Temps (anys)	2	5	10
Preu (€)	13 500	6 900	2 250

Taula 3.4

Mitjançant les interpolacions lineals corresponents, estima el preu d'aquest cotxe quan hagin transcorregut des de la seva adquisició:

***a*) 4 anys**

***b*) 7 anys**

a) (2, 13 500) i (5, 6 900)

$f(x) = mx + n$

$m = \dfrac{6\,900 - 13\,500}{5 - 2} = -2\,200$

$n = f(2) - m \cdot 2 = 17\,900$

$f(x) = -2\,200x + 17\,900$ (funció d'interpolació lineal)

$x = 4 \rightarrow f(4) = 9\,100$

El preu estimat del cotxe transcorreguts 4 anys és de 9 100 €.

b) (5, 6 900) i (10, 2 250)

$m = \dfrac{2\,250 - 6\,900}{10 - 5} = -930$

$n = f(5) - m \cdot 5 = 11\,550$

La funció d'interpolació lineal és:

$f(x) = -930x + 11\,550$

$f(7) = 5\,040$

Al cap de 7 anys, el preu estimat del cotxe és de 5 040 €.

39. Representa gràficament les funcions:

***a*) $f(x) = x^2 - 4$**

***b*) $g(x) = -x^2 + 2$**

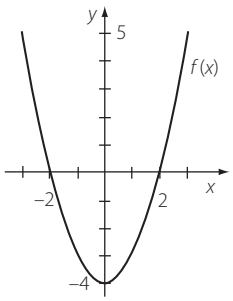
***c*) $h(x) = x^2 - 6x + 9$**

***d*) $i(x) = x - x^2$**

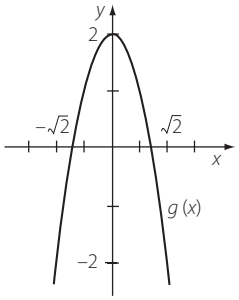
***e*) $j(x) = 8 - 2x^2$**

***f*) $k(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$**

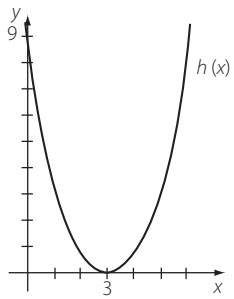
a)



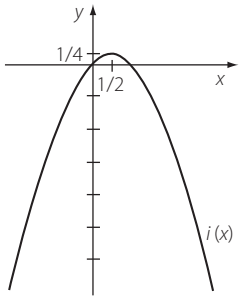
b)



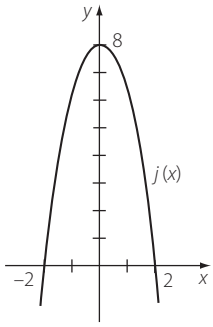
c)



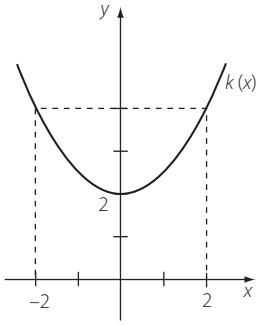
d)



e)



f)



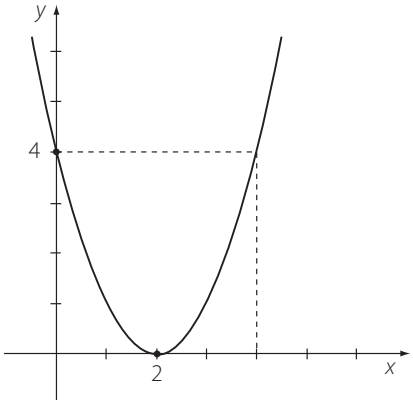
40. Donada la funció $f(x) = (2 - x)^2$, determina'n:

***a*) El domini i el recorregut.**

***b*) Els intervals de creixement i de decreixement.**

***c*) El màxim o el mínim absoluts.**

***d*) Els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades.**



a) $D_f = \mathbb{R}, R_f = [0, +\infty)$

b) La funció f decreix a l'interval $(-\infty, 2)$ i creix a l'interval $(2, +\infty)$.

c) Presenta un mínim absolut en el punt (2, 0).

d) Talla l'eix *OX* en el punt (2, 0) i l'eix *OY* en el punt (0, 4).

41. Expressa el recorregut de qualsevol funció quadràtica segons el signe de *a*.

Cal fer l'estudi segons el signe de *a*.

Si $a > 0$, $R_f = (y_v, +\infty) = \left(\dfrac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$

Si $a < 0$, $R_f = (-\infty, y_v) = \left(\dfrac{4ac - b^2}{4a}, -\infty\right)$

42. Esbrina l'equació de la paràbola que passa pels punts *A*(2, 0), *B*(0, –2) i *C*(5, 3). Comenta el resultat obtingut.

$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow y = ax^2 + bx + c$

$y = ax^2 + bx + c$

El punt del vértex és:

$x_v = -\dfrac{b}{2a} \qquad y_v = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

$$\left.\begin{array}{l} A(2,0) \rightarrow 0 = 4a + 2b + c \\ B(0,-2) \rightarrow -2 = c \rightarrow c = -2 \\ C(5,3) \rightarrow 3 = 25a + 5b + c \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 4a + 2b - 2 \\ 3 = 25a + 5b - 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4a + 2b = 2 \\ 25a + 5b = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a + b = 1 \\ 5a + b = 1 \end{array}\right\} \rightarrow a = 0, b = 1$$

$a = 0, b = 1, c = -2$

La funció és $f(x) = x - 2$, que no és quadràtica. Això significa que no hi ha cap paràbola que contingui els tres punts donats, ja que aquests punts estan alineats, i l'equació de la recta que els conté és $y = x - 2$.

43. Determina el valor de *c* per tal que la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 10x + c$ talli l'eix de les abscisses en un únic punt. Comprova que aquest punt coincideix amb el vèrtex de la paràbola.

Cal que l'equació $x^2 - 10x + c = 0$ tingui una sola solució real (solució doble). Per tant, $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 100 - 4c = 0 \rightarrow c = 25$.

$x^2 - 10x + 25 = 0 \rightarrow x = 5$. El punt de tall amb l'eix *OX* és (5, 0), que coincideix amb el vèrtex de la paràbola.

44. Dos mòbils descriuen la mateixa trajectòria rectilínia. Inicien el moviment al mateix temps i la seva posició respecte d'un punt de referència comú és donada, en funció del temps, per les expressions $f(t) = t^2$ i $g(t) = 48 - 2t^2$, en què $f(t)$ i $g(t)$ s'expressen en metres i *t*, en segons.

***a*) Quina és la distància que separa els dos mòbils a l'instant $t = 0$?**

***b*) Quant trigaran a trobar-se?**

***c*) On es trobaran?**

Comprova que els resultats que has obtingut són correctes representant gràficament les dues funcions en uns mateixos eixos de coordenades cartesianes.

a) $f(0) = 0$ i $g(0) = 48$

A l'instant $t = 0$ els separa una distància de 48 m.

b) Es troben quan $f(t) = g(t)$

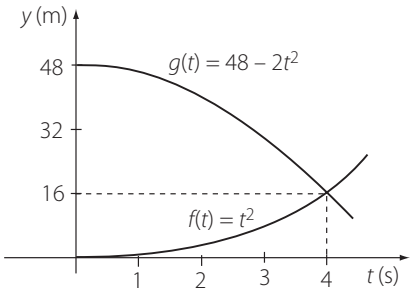
$$\left.\begin{array}{l} f(t) = t^2 \\ g(t) = 48 - 2t^2 \end{array}\right\} \rightarrow t^2 = 48 - 2t^2 \rightarrow 3t^2 = 48$$

$$t^2 = 16 \rightarrow t \begin{cases} \nearrow t_1 = 4 \\ \searrow t_2 = -4 \text{ (no té sentit físic)} \end{cases}$$

Trigaran 4 s a trobar-se.

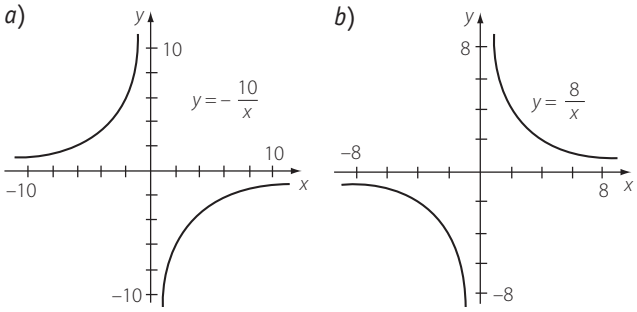
c) Per a $t = 4 \rightarrow f(4) = g(4) = 16$

Es trobaran a 16 m del punt de referència.



45. Representa gràficament aquestes funcions:

***a*) $f(x) = -\dfrac{10}{x}$ ***b*) $g(x) = \dfrac{8}{x}$**



46. La gràfica d'una funció de proporcionalitat inversa conté el punt (2, –3). A partir d'aquesta informació, determina el valor de *k*.

$f(x) = \dfrac{k}{x} \rightarrow$ expressió general d'una funció de proporcionalitat inversa.

$f(2) = -3 \rightarrow -3 = \dfrac{k}{2} \rightarrow k = -6$

47. Les funcions *f* i *g* de la Figura 3.41 tenen diferent comportament pel que fa referència a creixement i decreixement. Per què es produeix aquesta diferència? Pots establir un criteri general per al creixement o el decreixement d'aquest tipus de funcions?

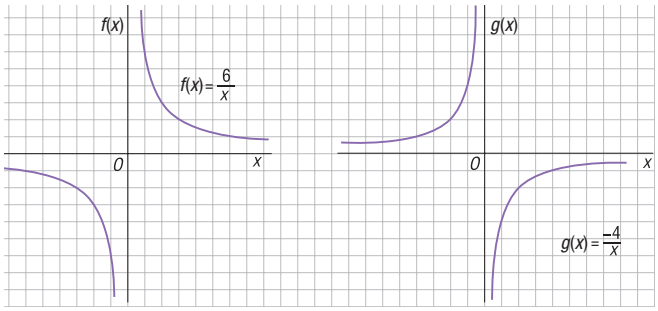


Fig. 3.41

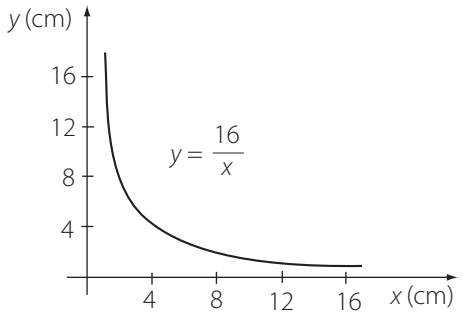
La diferència es produeix com a conseqüència del signe de la constant *k*. Si $k > 0$, la funció de proporcionalitat inversa és decreixent en tot el seu domini. En canvi, si $k < 0$, és creixent.

48. Escriu l'expressió algèbrica $y = f(x)$ de la funció que relaciona les longituds dels costats x i y d'un rectangle d'àrea 16 cm². Representa gràficament aquesta funció i indica'n el domini i el recorregut.

$x \cdot y = 16$, on x i y s'expressen en centímetres.

$y = \frac{16}{x} \rightarrow f(x) = \frac{16}{x}$

$D_f = (0, +\infty); R_f = (0, +\infty)$



49. La funció valor absolut, que s'expressa $f(x) = |x|$, es defineix:

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determina $f(2)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ i $f(0)$.

b) Representa-la gràficament i indica'n el domini i el recorregut.

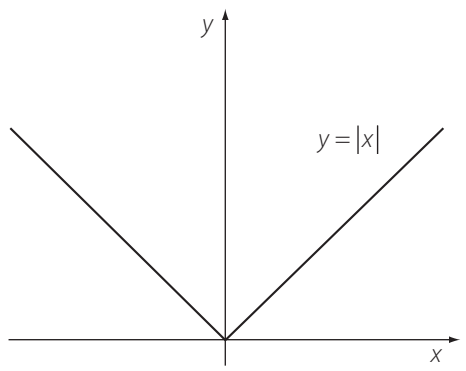
c) Per a quins valors de x és creixent? I decreixent?

d) Es tracta d'una funció contínua?

a) $f(2) = |2| = 2$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$;

$f(0) = |0| = 0$

b) $D_f = \mathbb{R}$; $R_f [0, +\infty)$



c) És creixent per a $x > 0$ i decreixent per a $x < 0$.

d) La funció és contínua per a qualsevol valor real de x.

50. Una companyia subministradora d'aigua cobra a 0,18 €/m³ els primers 20 m³ consumits i a 0,30 €/m³ la resta de l'aigua consumida.

a) Quant paga una família que consumeix 35 m³ d'aigua?

b) Quant li costa el metre cúbic d'aigua, a aquesta família?

c) Determina l'expressió algèbrica de la funció $f(x)$ que permet calcular l'import de l'aigua segons el consum x en metres cúbics.

d) Dibuixa la gràfica de $f(x)$.

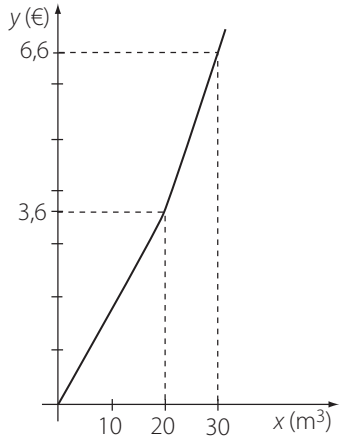
a) Si la família gasta 35 m³ d'aigua:

$$20\,\text{m}^3 \cdot 0,18\frac{€}{\text{m}^3} + (35 - 20)\,\text{m}^3 \cdot 0,30\frac{€}{\text{m}^3} = 8,10\ €$$

b) Li resulta a $\frac{8,10\ €}{35\ \text{m}^3} = 0,23\frac{€}{\text{m}^3}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0,18x & \text{si } x \leq 20 \\ 3,6 + 0,30\,(x - 20) & \text{si } x > 20 \end{cases}$

d)



Activitats finals

1. El manual d'usuari d'un refrigerador inclou un gràfic que indica el consum diari d'energia elèctrica en funció de la temperatura interior, que es controla mitjançant un termòstat (suposant que la temperatura de la cuina es mantingui al voltant dels 20 °C) (Fig. 3.44).

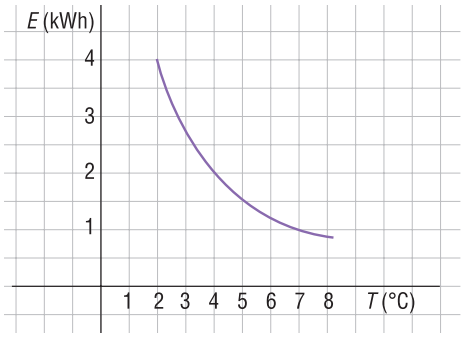


Fig. 3.44

a) Quin és el consum a 5 °C?

b) A quina temperatura es gasten 2,5 kWh per dia?

c) Per a quines temperatures el consum diari és inferior a 2 kWh?

d) Indica el domini i el recorregut d'aquesta funció.

a) 1,5 kWh

b) A poc més de 3 °C

c) Per a temperatures superiors a 4 °C.

d) $D = [2, 8); R \simeq (1, 4]$

2. Estableix el domini d'aquestes funcions:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x+6}$ **b)** $g(x) = x^2 + 5$

c) $h(x) = \dfrac{3}{x^2 - 16}$ **d)** $i(x) = 1 - 5x$

a) $D_f = \mathbb{R} - \{-6\}$

b) $D_g = \mathbb{R}$

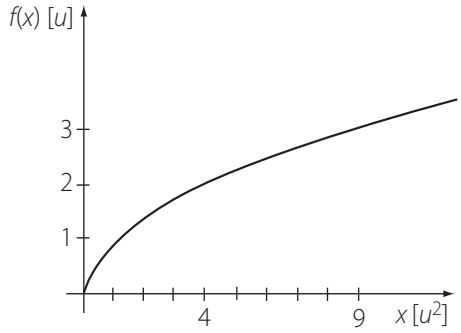
c) $D_h = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

d) $D_i = \mathbb{R}$

3. Determina l'expressió algèbrica de la funció que ens dóna el costat d'un quadrat a partir de la seva àrea. Elabora una taula de valors de la funció, fes-ne la representació gràfica aproximada i indica si és creixent o decreixent.

$f(x) = \sqrt{x}$, on x és la mesura de l'àrea en u^2 i $f(x)$ la mesura del costat del quadrat en unitats. El domini de la funció és $D_f = (0, +\infty)$ i es tracta d'una funció creixent en tot el seu domini.

x (m²)	1	2	4	6	9
$f(x)$ (m)	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$	3



4. A la gràfica (Fig. 3.45) s'indica la dosi diària d'un medicament en funció del pes del pacient.

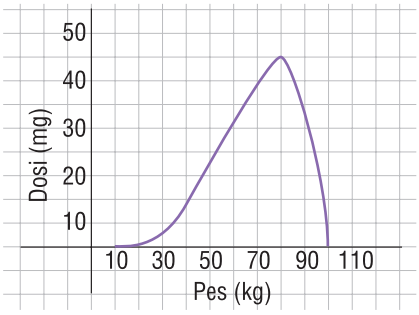


Fig. 3.45

a) Quina és la dosi màxima?

b) Indica els intervals de creixement i de decreixement de la funció.

c) Per a quins pacients està contraindicat el medicament?

a) La dosi màxima és d'uns 45 mg.

b) La funció és creixent per a pesos inferiors a 80 kg i decreixent per a pesos que superen els 80 kg.

c) El medicament està contraindicat per a nens i per a persones amb problemes d'obesitat.

5. Donades les funcions $f(x) = 4x - 2$ i $g(x) = x^2 - 5$, determina l'expressió algèbrica de les funcions $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ i $f^{-1}(x)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 5) = 4(x^2 - 5) - 2 = 4x^2 - 22$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x - 2) = (4x - 2)^2 - 5 =$

$= 16x^2 - 16x - 1$

$f(x) = 4x - 2 \rightarrow y = 4x - 2 \rightarrow x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} \rightarrow$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

6. En una ciutat, la quantitat de sofre que hi ha a l'atmosfera, expressada en parts per milió (ppm), evoluciona en els darrers anys segons la funció $f(t) = 2{,}1 - 0{,}2t + 0{,}03t^2$, en què t és el temps expressat en anys. Determina la contaminació per sofre al moment actual ($t = 0$) i els anys que han de passar per tal que es torni a arribar a aquest mateix valor.

$f(0) = 2{,}1$ ppm

$f(t) = 2{,}1 \rightarrow 2{,}1 = 2{,}1 - 0{,}2t + 0{,}03t^2 \rightarrow 0{,}03t^2 - 0{,}2t = 0 \rightarrow$

$t(0{,}03t - 0{,}2) = 0 \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \dfrac{0{,}2}{0{,}03} = \dfrac{20}{3} \end{cases}$

Han de transcórrer $\frac{20}{3}$ anys = 6 anys i 8 mesos per tal que la contaminació torni a assolir el valor actual.

7. Esbrina els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades de les gràfiques de les funcions $f(x) = 3x + 12$, $g(x) = (x - 2)(x + 3)$ i $h(x) = \frac{-2}{x}$. Comprova-ho gràficament.

$f(x) = 3x + 12$

eix $OX \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow 3x + 12 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow (-4, 0)$

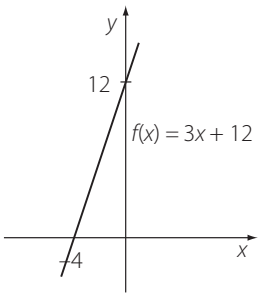
eix $OY \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 12 \rightarrow (0, 12)$

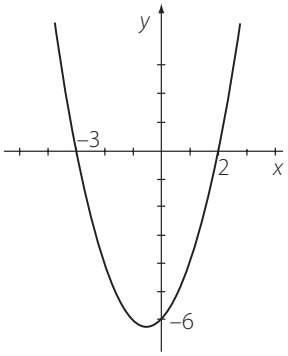
$g(x) = (x - 2)(x + 3)$

eix $OX \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow (2, 0) \\ x_2 = -3 \rightarrow (-3, 0) \end{cases}$

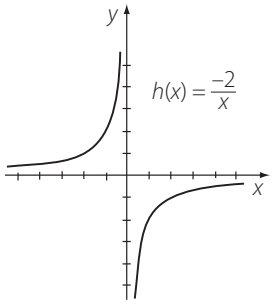
eix $OY \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = -6 \rightarrow (0, -6)$

$h(x) = \frac{-2}{x}$. Aquesta funció no talla els eixos de coordenades, ja que $x = 0$ no té imatge i $y = 0$ no té antiimatge.





$g(x) = (x - 2)(x + 3)$



8. Escriu l'expressió algèbrica de la funció que relaciona l'import d'una trucada telefònica amb la durada, suposant que la quota d'establiment de trucada sigui de 0,75 € i, a partir d'aquest moment, la tarifa sigui de 0,39 € per minut. Quin és l'import d'una trucada de 5 minuts? Quant duraria una trucada l'import de la qual fos de 5,05 €?

$f(x) = 0{,}75 + 0{,}39x$, on x s'expressa en minuts i $f(x)$ en euros.

$x = 5 \rightarrow f(5) = 0{,}75 + 0{,}39 \cdot 5 = 2{,}70$ €

$f(x) = 5{,}05 \rightarrow 5{,}05 = 0{,}75 + 0{,}39x \rightarrow x = 11{,}03$

Una trucada de 5 minuts costaria 2,70 €.

Una trucada que costés 5,05 € duraria poc més d'11 minuts.

9. El punt $P(a, 3)$ pertany a la recta que passa pels punts $Q(1, -4)$ i $R(5, 2)$. Calcula el valor de a.

Equació de la recta que passa pels punts Q i R:

$$m = \frac{2 - (-4)}{5 - 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$y + 4 = \frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow 2y + 8 = 3x - 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$$

El punt $P(a, 3)$ pertany a aquesta recta. Per tant:

$$3 = \frac{3}{2}a - \frac{11}{2} \rightarrow 6 = 3a - 11 \rightarrow a = \frac{17}{3}$$

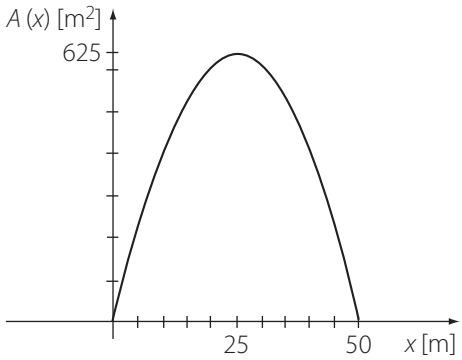
10. Amb 100 m de tanca es vol delimitar un terreny rectangular, un dels costats del qual representem per x. Escriu l'expressió de l'àrea A del camp en funció de x. Estableix, a partir de la gràfica, el domini i recorregut d'aquesta funció i indica per a quin valor de x serà màxima l'àrea del camp.

Representem per y la mesura de l'altre costat del rectangle.

$2x + 2y = 100 \rightarrow x + y = 50 \rightarrow y = 50 - x$

L'expressió de l'àrea del rectangle en funció de x és:

$A(x) = x(50 - x)$, on x s'expressa en m i $A(x)$ en m².



$D = (0, 50)$ $R = (0, 625]$

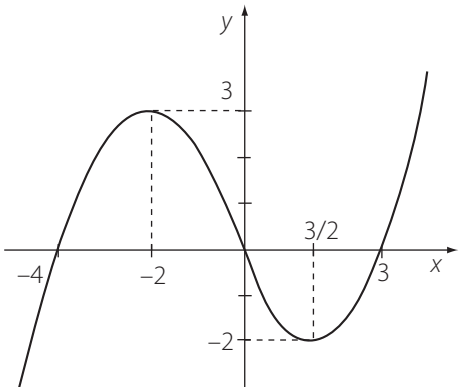
L'àrea del camp és màxima per a $x = 25$ m (terreny quadrat).

11. Dibuixa una gràfica d'una funció contínua que verifiqui les condicions següents:

- **Que talli els eixos de coordenades en els punts (–4, 0), (0, 0) i (3, 0).**
- **Que presenti un màxim relatiu en el punt (–2, 3) i un mínim relatiu en el punt $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$.**

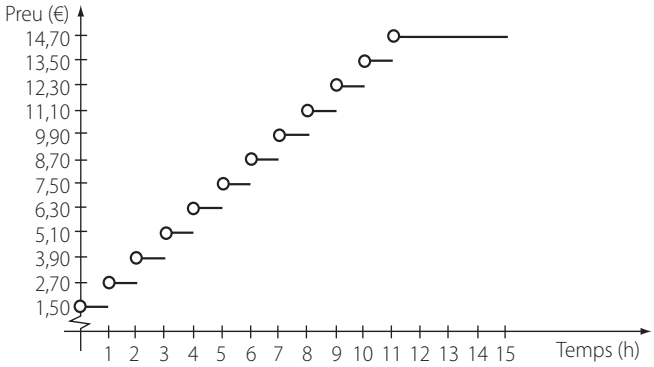
Determina els intervals de creixement i de decreixement d'aquesta funció.

Resposta oberta. Per exemple, la funció representada a la figura.



La funció és creixent en l'interval $(-\infty, -2)$ i en l'interval $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ i és decreixent en l'interval $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$.

12. La tarifa d'un aparcament és d'1,50 € la primera hora o fracció i d'1,20 € per a cadascuna de les hores (o fraccions d'hora) següents, fins un màxim de 14,72 € per dia. Dibuixa la gràfica de la funció preu-temps.



13. El rendiment en percentage d'un generador solar depèn de la temperatura segons una funció quadràtica. Determina l'expressió algèbrica d'aquesta funció, sabent que el rendiment és màxim a 40 °C i nul a 10 °C i a 70 °C. Quin és el rendiment màxim d'aquest generador?

La funció que ens demanen és del tipus $f(T) = aT^2 + bT + c$, on T s'expressa en °C i $f(T)$ en percentatge. La paràbola que la representa té un màxim i, per tant, $a < 0$.

Sabem que per a $T_1 = 10$ °C i per a $T_2 = 70$ °C, $f(T_1) = f(T_2) = 0$. Llavors:

$$f(T) = a(T-10)(T-70) = a(T^2 - 80T + 700) =$$

$$= a' \cdot (-1)(T^2 - 80T + 700) = a'(-T^2 + 80T - 700),$$

$$a' > 0 \ (a' = -a)$$

Tenint en compte que el rendiment no pot ser superior al 100 % i considerant que el rendiment màxim es produeix a 40 °C, s'ha de complir:

$$f(40) \leq 100 \rightarrow a'(-1\,600 + 3\,200 - 700) \leq 100 \rightarrow a' \leq \frac{1}{9}$$

En definitiva, la funció que ens demanen és:

$$f(T) = a'(-T^2 + 80T - 700) \text{ amb } 0 < a' \leq \frac{1}{9}$$

El rendiment màxim és $f(40) = 900 \cdot a'$

14. Esbrina l'expressió algèbrica d'una funció quadràtica sabent que la paràbola que la representa gràficament talla l'eix d'ordenades en el punt (0, 9) i té el vèrtex en el punt (3, 0).

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$(0, 9) \rightarrow f(0) = 9 \rightarrow c = 9$$

$$\left.\begin{array}{l}(3, 0) \rightarrow f(3) = 0 \rightarrow 9a + 3b + 9 = 0 \rightarrow 3a + b + 3 = 0 \\ \text{Vèrtex en } x = 3 \rightarrow -\frac{b}{2a} = 3 \rightarrow -b = 6a \rightarrow b = -6a\end{array}\right\}$$

$$a = 1, b = -6$$

La funció quadràtica que ens demanen té per expressió algèbrica: $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

15. En una ciutat, les equacions de l'oferta (f) i de la demanda (g) d'un article el preu del qual és de x € són donades per:

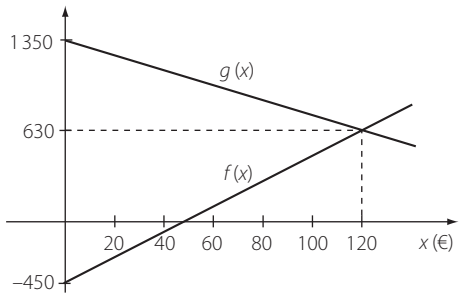
$$f(x) = -450 + 9x \text{ i } g(x) = 1\,350 - 6x$$

S'anomena *punt d'equilibri* el valor de x per al qual es verifica la igualtat $f = g$, coneguda com a llei de l'oferta i la demanda. Determina gràficament i analítica el punt d'equilibri al qual tendeix el mercat en el cas de l'article estudiat.

$$f(x) = g(x) \rightarrow -450 + 9x = 1\,350 - 6x \rightarrow$$

$$x = 120 \rightarrow f(x) = g(x) = 630$$

El punt d'equilibri és $x = 120$ €, $f(x) = 630$



16. Representa gràficament la funció següent:

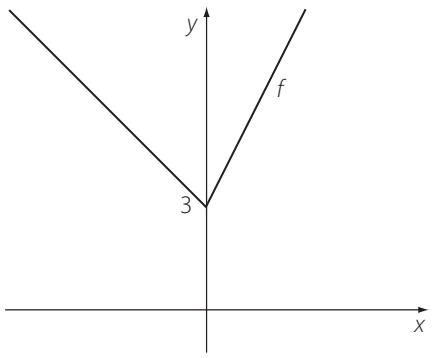
$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 + 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Indica'n el domini i el recorregut.

b) Estableix-ne els intervals de creixement i de decreixement.

c) Es tracta d'una funció contínua?

d) Determina l'antiimatge o les antiimatges de 9.



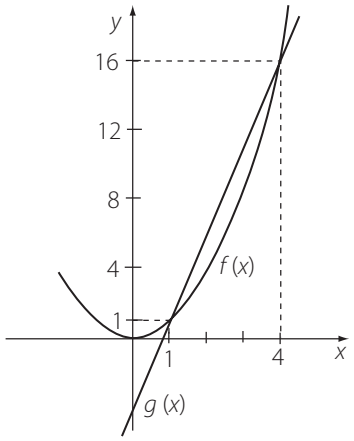
a) $D_f = \mathbb{R}; R_f = [3, +\infty)$

b) Decreixent: $(-\infty, 0)$; creixent: $(0, +\infty)$

c) La funció és contínua per a qualsevol valor de x.

d) A partir de la gràfica es pot observar que 9 té dues antiimatges: una per a un valor $x < 0$ i una altra per a un valor $x > 0$.
$9 = -x + 3 \rightarrow x = -6$
$9 = 3 + 2x \rightarrow x = 3$
Les antiimatges de 9 són –6 i 3.

17. Determina els punts d'intersecció de les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = 5x - 4$. Resol el problema analíticament i gràfica.



Les gràfiques de les funcions f i g es tallen en els punts (1, 1) i (4, 16).

$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 = 5x - 4 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{cases}$$

$f(4) = 4^2 = 16 \rightarrow (4, 16)$ i $f(1) = 1^2 = 1 \rightarrow (1, 1)$

Per tant, les gràfiques de les funcions f i g es tallen en els punts (4, 16) i (1, 1).

18. En un institut es van fer 1 500 fotocòpies en els cinc primers dies lectius d'un mes, i 5 400 en el decurs dels vint restants. Utilitza la interpolació lineal per estimar el nombre de fotocòpies fetes a l'institut quan havien transcorregut els dotze primers dies lectius d'aquell mes.

Determinem primerament la funció d'interpolació lineal $f(x) = mx + n$, on x representa el nombre de dies del mes transcorreguts i $f(x)$ les fotocòpies fetes.

$x = 5 \rightarrow f(5) = 1\,500$

$x = 25 \rightarrow f(25) = 6\,900$

$$m = \frac{6\,900 - 1\,500}{25 - 5} = 270$$

$f(x) = 270x + n \rightarrow 1\,500 = 1\,350 + n \rightarrow n = 150$

$f(x) = 270x + 1\,500 = 1\,350 + n \rightarrow n = 150$

Per a $x = 12 \rightarrow f(12) = 270 \cdot 12 + 150 = 3390$

Podem estimar que, en els 12 primers dies lectius del mes, s'havien fet 3 390 fotocòpies a l'institut.

19. Es calcula que el nombre d'habitants d'una comunitat urbana variarà durant els pròxims vint anys d'acord amb aquesta funció:

$$h(x) = 200\,000 + \frac{50\,000}{x}$$

on x expressa el temps en anys.

***a*) Pots determinar el nombre d'habitants que té aquesta comunitat actualment? Per què?**

***b*) Quants habitants tindrà quan finalitzi el període de validesa de la relació expressada a la funció?**

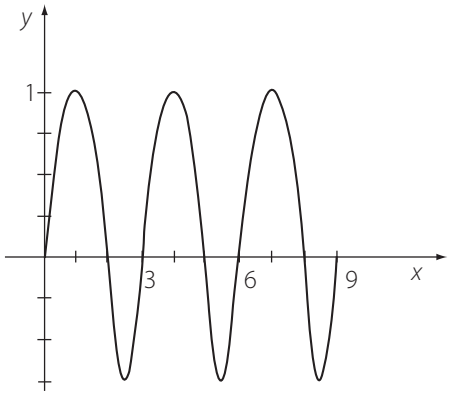
a) No, perquè no existeix $h(0)$.

b) $h(20) = 200\,000 + \frac{50\,000}{20} = 202\,500$

La comunitat urbana tindrà 202 500 habitants d'aquí a 20 anys.

20. Dibuixa en l'interval [0, 9] la gràfica d'una funció periòdica el període de la qual sigui 3.

Resposta oberta. Per exemple:



21. La cotització de les accions d'una empresa va seguir, aproximadament, aquesta evolució durant l'any 2014:

$$f(t) = 342 + 39t - 3t^2$$

on t és el temps expressat en mesos ($0 \leq t \leq 12$).

***a*) Dibuixa la gràfica aproximada d'aquesta funció.**

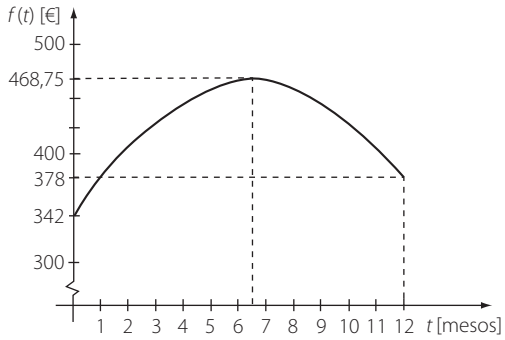
b) En quin mes es va arribar a la màxima cotització?

c) Calcula el percentatge de benefici que hauria obtingut un accionista que hagués comprat accions d'aquesta empresa al moment de mínima cotització i les hagués venut al de màxima.

a) $f(0) = 342$; $f(12) = 378$

Com que $a > 0$ (coeficient de t^2), la funció presentarà un màxim en el seu vèrtex.

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-39}{-6} = 6{,}5 \rightarrow f(t_v) = 468{,}75$$



b) Durant el mes de juny.

c) Benefici del 37 %.

22. Un cotxe triga 4 hores a recórrer un trajecte determinat a una velocitat mitjana de 25 km/h.

a) Quant trigaria a recórrer el mateix trajecte si la seva velocitat mitjana fos de 60 km/h?

b) Representant amb x el temps en hores utilitzat a recórrer el trajecte, i amb y la velocitat mitjana del cotxe en quilòmetres per hora, escriu l'equació de la funció $y = f(x)$.

a) $25\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 4\,\text{h} = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t \rightarrow t = 1{,}\widehat{6}\,\text{h}$

b) La velocitat mitjana i el temps són magnituds inversament proporcionals, sempre que la distància recorreguda sigui la mateixa.

Aleshores, la funció que ens demanen és del tipus $f(x) = \frac{k}{x}$ on k representa la distància recorreguda (100 km en aquest cas). Per tant, $y = f(x) = \frac{100}{x}$

23. Considera les funcions $f(x) = 3x + 9$ i $g(x) = x^2 - 1$.

a) Quins valors de x no pertanyen al domini de la funció $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$?

b) I al de la funció $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$?

a) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+9}{x^2-1}$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

Els valors $x = 1$ i $x = -1$ no pertanyen al $D_{\frac{f}{g}}$

b) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2-1}{3x+9}$

$3x + 9 = 0 \rightarrow x = -3$

El valor $x = -3$ no pertany al $D_{\frac{g}{f}}$

Unitat 4. Progressions i successions

Activitats

1. Intenta deduir l'expressió del terme general de cadascuna d'aquestes successions:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10} \ldots$

b) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \ldots$

c) 1, 4, 9, 16, 25, 36...

d) –1, 4, –8, 16, –32, 64, –128 ...

a) $\frac{1}{2n}$ b) $\frac{n+1}{n}$

c) n^2 d) $(-2)^n$

2. $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ és l'expressió del terme general d'una successió. Calcula els termes a_7 i a_{100}. Determina l'expressió del terme a_{n-1} en funció de n?

$a_7 = \frac{7^2}{7+1} = \frac{49}{8}$ $a_{100} = \frac{100^2}{100+1} = \frac{10\,000}{101}$

$a_{n-1} = \frac{(n-1)^2}{n-1+1} = \frac{(n-1)^2}{n}$

3. Suposem que l'expressió del terme general d'una successió és $a_n = 3n + 2$.

a) Escriu-ne els cinc primers termes.

b) Quin lloc ocupa en aquesta successió el número 47?

a) Els cinc primers termes són: 5, 8, 11, 14 i 17.

b) $3n + 2 = 47 \rightarrow 3n = 47 - 2 \rightarrow n = 15$.

El 47 ocupa la posició 15.

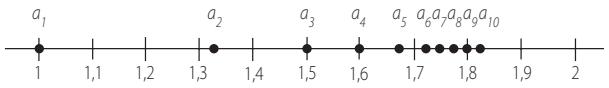
4. El terme general d'una successió és: $a_n = \frac{n+1}{n}$. Calcula els termes a_{100} i a_{1000}.

$a_{100} = \frac{101}{100} = 1{,}01$

$a_{1000} = \frac{1\,001}{1\,000} = 1{,}001$

5. Representa en la recta real els deu primers termes de la successió $a_n = \frac{2n}{n+1}$.

Són: $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \frac{7}{4}, \frac{16}{9}, \frac{9}{5}, \frac{20}{11}$



6. Estudia la monotonia de les successions següents:

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$ **b)** $b_n = n^3$

c) $c_n = \frac{n-1}{n}$ **d)** $d_n = \frac{n^2}{n+2}$

e) $p_n = n^2 - n^3$ **f)** $f_n = 2n - 25$

a) $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2} = \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2} < 0$, per a tot n.

Successió monòtona decreixent.

b) $(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 =$
$= 3n^2 + 3n + 1 > 0$, per a tot n.

Monòtona creixent.

c) $\frac{(n+1)-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{(n+1)n} = \frac{1}{(n+1)n} > 0$, per a tot n.

Monòtona creixent.

d) $\frac{(n+1)^2}{(n+1)+2} - \frac{n^2}{n+2} = \frac{n^2 + 5n + 2}{(n+3)(n+2)} > 0$, per a tot n.

Monòtona creixent.

e) $(n+1)^2 - (n+1)^3 - [n^2 - n^3] = -3n^2 - n < 0$, per a tot n.

Monòtona decreixent.

f) $2(n+1) - 25 - (2n - 25) = 2 > 0$, per a tot n.

Monòtona creixent.

7. Determina, si existeixen, les fites superior i inferior de cadascuna de les successions de l'activitat anterior.

a) Fites inferiors: $k \leq 0$. Fites superiors: $k \geq 1$.

b) Fites inferiors: $k \leq 1$. No té fita superior.

c) Fites inferiors: $k \leq 0$. Fites superiors: $k \geq 1$.

d) Fites inferiors: $k \leq \frac{1}{3}$. No té fita superior.

e) No té fita inferior. Fites superiors: $k \geq 0$.

f) Fites inferiors: $k \leq -23$. No té fita superior.

8. Escriu el terme general de la successió dels múltiples de 5. El nombre 6 000 és una fita superior d'aquesta successió? Raona la resposta. Està fitada inferiorment, aquesta successió?

$a_n = 5n; a_{1200} = 6000$

Amb $n > 1200$, $a_n > 6000$

No és una fita superior. La fita inferior és 5 i qualsevol $k < 5$.

9. Escriu els nous primers termes d'una progressió aritmètica en què $a_1 = -4$ i $d = 2$. Calcula'n la suma.

Els termes successius s'obtenen sumant 2 a partir de –4: –4, –2, 0, 2, 4, 6, 8, 10 i 12.

$S_9 = 36$

10. El tercer terme d'una progressió aritmètica és 9 i el cinquè, 17. Determina la diferència de la progressió i el valor del primer dels seus termes.

$17 - 9 = (5 - 3)d \rightarrow d = 4$

$a_3 = a_1 + 2d = 9 \rightarrow a_1 = 1$

11. Esbrina la suma dels trenta primers termes de la progressió aritmètica el primer terme de la qual és 50 i la diferència, –2.

$$s = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2}$$

$$a_{30} = 50 + 29 \cdot (-2) = -8$$

$$s = \frac{50 + (-8) \cdot 30}{2} = 630$$

12. Indica si les successions següents són progressions aritmètiques. En cas que ho siguin digues quina és la diferència i, si s'escau, esbrina'n el terme general.

a) $a_n = 3n + 1$ ***b)*** **1, 11, 21, 31...**

c) $a_n = 2^n$ ***d)*** $\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}$...

e) $a_n = n\sqrt{3}$ ***f)*** **Els vint primers múltiples de 5.**

a) $d = 3$ *b)* $d = 10$, $a_n = 10n - 9$

c) $d = 2$ *d)* $d = \frac{1}{3}$, $a_n = \frac{1}{3}n + 2$

e) $d = \sqrt{3}$ *f)* $d = 5$, $a_n = 5n$

13. En una progressió aritmètica se sap que $a_{21} = 87$ i $d = 4$. Calcula'n a_1 i S_{21}.

$a_1 = 7$

$S_{21} = 987$

14. Quina és la diferència d'una progressió aritmètica en què $a_1 = 3$ i $a_{14} = 42$? Calcula la suma dels catorze primers termes d'aquesta progressió.

$d = 3$

$S_{14} = 315$

15. En una progressió geomètrica es coneix $a_1 = \frac{1}{3}$ i $r = 3$. Esbrina'n els termes cinquè i dotzè.

$$a_5 = \frac{1}{3} \cdot 3^4 = 27$$

$$a_{12} = \frac{1}{3} \cdot 3^{11} = 3^{10} = 59\,049$$

16. Estableix l'expressió del terme general i esbrina la raó de la progressió geomètrica en què $a_1 = 3$ i $a_{11} = 81$.

$$a_{11} = a_1 r^{10} \rightarrow 81 = 3 \cdot r^{10} \rightarrow r^{10} = 27 \rightarrow r = \sqrt[10]{27}$$

$$a_n = 3\left(\sqrt[10]{27}\right)^{n-1}$$

17. Considera els quadrats de la Figura 4.1. Esbrina si la successió de les àrees i la dels perímetres són progressions geomètriques. En cas afirmatiu, calcula'n les raons.

Successió de les àrees: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$... És una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{2}$.

Successió dels perímetres: $4, 2\sqrt{2}, 2$... És una progressió geomètrica de raó $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

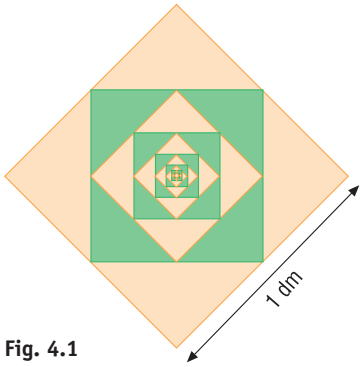


Fig. 4.1

18. Esbrina el producte de les sis primeres potències naturals de base 2.

$$P_6 = \sqrt{(2 \cdot 2^6)^6} = (2^7)^3 = 2^{21} = 2\,097\,152$$

19. En una botiga rebaixen els articles successivament el 10 % cada setmana. Quin serà d'aquí a cinc setmanes el cost d'un article pel qual hauríem de pagar 330,56 € aquesta setmana?

Per 1 €, d'aquí a 5 setmanes caldrà pagar $0{,}90^5$ €.

$330{,}56 \cdot 0{,}90^5 = 195{,}19$ €

20. Calcula la suma de les deu primeres potències naturals de base 10.

$$S_{10} = \frac{10\,(10^{10} - 1)}{10 - 1} = 11\,111\,111\,110$$

21. Calcula la suma $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + \ldots + 2^{10}$.

$$S_{13} = \frac{\frac{1}{4}(2^{13} - 1)}{2 - 1} = \frac{8\,191}{4} = 2047{,}75$$

22. Determina tres nombres en progressió geomètrica tals que la seva suma sigui 42 i el seu producte, 512.

Els tres nombres: x, xr, xr^2:

$$\left.\begin{array}{l} x + xr + xr^2 = 42 \\ x^3 r^3 = 512 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x(1 + r + r^2) = 42 \\ xr = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{8}{r}(1 + r + r^2) = 42$$

$$x = \frac{8}{r}$$

$$\frac{8}{r} + 8 + 8r = 42 \rightarrow 8r^2 - 34r + 8 = 0 \begin{array}{l} \nearrow r_1 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \\ \searrow r_2 = \frac{1}{4} \rightarrow x_2 = 32 \end{array}$$

Si $r = 4$ els nombres són: 2, 8 i 32.

Si $r = \frac{1}{4}$ els nombres són: 32, 8 i 2.

23. Calcula termes avançats d'aquestes successions per poder-ne establir el límit en cada cas:

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$ *b)* $b_n = \frac{n}{n+8}$

c) $c_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ *d)* $d_n = \frac{100}{n}$

e) $e_n = n^2 - 100$ *f)* $f_n = -n^3 + 100$

g) $g_n = n^2 - 50n + 125$ *h)* $h_n = \frac{2n^2-1}{n^2}$

En cadascun dels apartats cal calcular 2 o 3 termes avançats:

a) $a_{100} = 0,000\,1;\ a_{1000} = 0,000\,001 \to 0$

b) $b_{100} = \frac{100}{108};\ b_{1000} = \frac{1\,000}{1\,008} \to 1$

c) $c_{100} = \frac{9\,999}{10\,001};\ c_{1000} = \frac{999\,999}{1\,000\,001} = 0,999... \to 1$

d) $d_{1000} = \frac{100}{1\,000} = 0,1;\ d_{100\,000} = \frac{100}{100\,000} = 0,001 \to 0$

e) $e_{100} = 9\,900;\ e_{10\,000} = 99\,999\,900 \to \infty$

f) $f_{100} = -999\,900;\ f_{1000} = -999\,999\,900 \to -\infty$

g) $g_{100} = 5\,125;\ g_{10\,000} = 99\,950\,125 \to \infty$

h) $h_{100} = 1,999\,9;\ h_{1000} = 1,999\,999 \to 2$

24. Classifica les successions anteriors en convergents i divergents.

Són convergents les que tenen límit numèric:
a), *b)*, *c)*, *d)* i *h)*.

Són divergents les que tenen límit del tipus infinit:
e), *f)* i *g)*.

25. Esbrina els cinc primers termes de la successió següent: $a_n = (-2)^{n+1}$.

$a_1 = 4;\ a_2 = -8;\ a_3 = 16;\ a_4 = -32;\ a_5 = 64$

26. Escriu el terme general de dues successions divergents de límit $-\infty$.

Resposta oberta. Per exemple: $a_n = -n^2 + 100;\ b_n = n^2 - 3n^3$.

27. Calcula els termes que ocupen les posicions 100 i 1 000 en les successions de terme general:

a) $a_n = \frac{n+10}{n}$ *b)* $b_n = \frac{n^2+100}{n+10}$

a) $a_{100} = \frac{110}{100} = 1,1;\ a_{1000} = \frac{1\,010}{1\,000} = 1,01$

b) $b_{100} = \frac{10\,100}{110} = \frac{1\,010}{11};\ b_{1000} = \frac{1\,000\,100}{1\,010} = \frac{100\,010}{101}$

28. Considera les successions següents:

$\{a_n\}: 1, 4, 9, 16, 25...$ i $\{b_n\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

a) **Esbrina el terme general de a_n i el de b_n.**

b) **Determina els cinc primers termes i el terme general de cadascuna de les successions següents:**

$\{a_n + b_n\};\ \{a_n - b_n\};\ \{a_n \cdot b_n\};\ \{nb_n\};\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\};\ (b_n - a_n)$

a) $a_n = n^2;\ b_n = \frac{1}{n}$

b) $\{a_n + b_n\} = \frac{n^3+1}{n} \to 2, \frac{9}{2}, \frac{28}{3}, \frac{65}{4}, \frac{126}{5}$

$\{a_n - b_n\} = \frac{n^3-1}{n} \to 0, \frac{7}{2}, \frac{26}{3}, \frac{63}{4}, \frac{124}{5}$

$\{a_n \cdot b_n\} = n \to 1, 2, 3, 4, 5$

$\{n \cdot b_n\} = 1 \to 1, 1, 1, 1, 1$

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = n^3 \to 1, 8, 27, 64, 125$

29. Escriu els deu primers termes de la successió $\{a_n\}^n$, en què $a_n = \frac{n+1}{n}$.

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to 2;\ \frac{9}{4};\ \frac{64}{27};\ \frac{625}{256};\ \frac{7\,776}{3\,125};\ 2,521;\ 2,546;\ 2,566;\ 2,581;$ $2,594...$

30. Calcula el límit de cadascuna de les successions següents:

a) $a_n = \frac{2n+1}{n} + \frac{n}{n+1}$ *b)* $b_n = \frac{1}{n^2} : \frac{1}{n}$

c) $c_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ *d)* $d_n = 5 : \frac{1}{n}$

a) $\frac{2n+1}{n} + \frac{n}{n+1} \to 2 + 1 = 3$ (Suma de límits)

b) $\frac{1}{n^2} : \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$

c) $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = \frac{n-n^2}{n^3} = \frac{1-n}{n^2} \to 0$

d) $5 : \frac{1}{n} = 5n \to \infty$

31. Calcula la suma dels perímetres dels quadrats de la Figura 4.1.

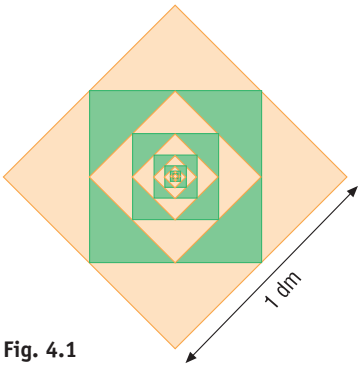


Fig. 4.1

En els perímetres: $a_1 = 4$ dm i $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. És una successió il·limitada decreixent:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 13,65 \text{ dm}$$

32. La suma dels termes d'una progressió geomètrica il·limitada de raó $\frac{1}{3}$ és 6. Esbrina'n el primer terme.

Aplicant la fórmula anterior:

$$6 = \frac{a_1}{1-\frac{1}{3}} \to a_1 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

33. Determina la fracció generatriu dels nombres decimals següents: $0,\widehat{2}$, $4,\widehat{16}$, $3,1\widehat{56}$.

$$a_1 = 0,2;\ r = 0,1 \to 0,\widehat{2} = \frac{0,2}{0,9} = \frac{2}{9}$$

$$a_1 = 0,16;\ r = 0,01 \to 0,\widehat{16} = \frac{0,16}{0,99} = \frac{16}{99}$$

$$4,\widehat{16} = 4 + \frac{16}{99} = \frac{412}{99}$$

Multipliquem $3,1\widehat{56}$ per 10 per passar-lo a periòdic pur:

$$10 \cdot 3,1\widehat{56} = 31,\widehat{56} = 31 + \frac{56}{99} = \frac{3\,125}{99}$$

$$3,1\widehat{56} = \frac{3\,125}{99} : 10 = \frac{3\,125}{990}$$

34. Escriu els termes generals de dues successions convergents el límit de les quals sigui zero. Calcula el límit de les dues possibles successions quocient.

Resposta oberta.

Per exemple: $a_n = \frac{2}{n}$ i $b_n = \frac{2n}{n^2+1}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n^2+2}{2n^2} \to 1;\ \frac{b_n}{a_n} = \frac{2n^2}{2n^2+2} \to 1$$

35. Donades $a_n = \frac{5\,000}{n}$ i $b_n = \frac{n+5\,000}{n+1}$, calcula: $\lim \frac{a_n}{b_n}$ i $\lim \frac{b_n}{a_n}$.

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{5\,000n + 5\,000}{n^2 + 5\,000n} = 0$, ja que el grau del polinomi del denominador és més gran que el del numerador.

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim \frac{n^2 + 5\,000n}{5\,000n + 5\,000} = +\infty$$

36. Comprova que les successions $a_n = n^2 + 1$ i $b_n = 35n$ són successions divergents.

Calcula el límit de cadascuna de les successions següents:

$\{a_n + b_n\}$ $\{a_n \cdot b_n\}$ $\{a_n - b_n\}$

$\{a_n : b_n\}$ $\{b_n - a_n\}$ $\{b_n : a_n\}$

$$\lim (n^2+1) = +\infty;\ \lim 35n = +\infty$$

$$\lim\{a_n + b_n\} = +\infty$$

$$\lim\{a_n \cdot b_n\} = +\infty$$

$$\lim\{a_n - b_n\} = \lim (n^2 + 1 - 35n) = +\infty$$

$$\lim\{a_n : b_n\} = \lim \frac{n^2+1}{35n} = +\infty$$

$$\lim\{b_n - a_n\} = \lim (35n - n^2 - 1) = -\infty$$

$$\lim\{b_n : a_n\} = \lim \frac{35n}{n^2+1} = 0$$

37. Calcula el límit d'aquestes successions: $a_n = \frac{3n}{150}$ i $b_n = \frac{-5n^2}{n+1}$. Són divergents? Calcula el límit de cadascuna de les successions següents:

$\{a_n + b_n\}$ $\{a_n \cdot b_n\}$ $\{a_n - b_n\}$

$\{a_n : b_n\}$ $\{b_n - a_n\}$ $\{b_n : a_n\}$

$$\lim a_n = \lim \frac{3n}{150} = +\infty;\ \lim b_n = \lim \frac{-5n^2}{n+1} = -\infty$$

Són divergents.

$$\lim\{a_n + b_n\} = \lim \frac{3n^2 + 3n - 750n^2}{150n + 150} = -\infty$$

$$\lim\{a_n \cdot b_n\} = \lim \frac{-15n^3}{150n + 150} = -\infty$$

$$\lim\{a_n - b_n\} = \lim \frac{3n^2 + 3n + 750n^2}{150n + 150} = +\infty$$

$$\lim\{a_n : b_n\} = \lim \frac{3n^2 + 3n}{-750n^2} = -\frac{3}{750} = -\frac{1}{250}$$

$$\lim\{b_n - a_n\} = \lim \frac{-750n^2 - 3n^2 - 3n}{150n + 150} = -\infty$$

$$\lim\{b_n : a_n\} = \lim \frac{-750n^2}{3n^2 + 3n} = -250$$

38. Calcula el límit de cadascuna de les successions següents:

a) $a_n = n^2 - n - n^3$ **b)** $b_n = \frac{1+\sqrt{n}}{n}$

c) $c_n = 100 + \frac{1}{n}$ **d)** $d_n = \frac{2n}{-3n+5}$

e) $e_n = \frac{800}{2n^3}$ **f)** $f_n = \frac{-n+1}{n^2}$

a) $\lim (n^2 - n - n^3) = \lim (-n^3) = -\infty$

b) $\lim \frac{1+\sqrt{n}}{n} = \lim \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

c) $\lim \left(100 + \frac{1}{n}\right) = 100 + \lim \frac{1}{n} = 100 + 0 = 100$

d) $\lim \frac{2n}{-3n+5} = \lim \frac{2n}{-3n} = -\frac{2}{3}$

e) $\lim \frac{800}{2n^3} = 0$

f) $\lim \frac{-n+1}{n^2} = \lim \frac{-n}{n^2} = \lim \frac{-1}{n} = 0$

39. Esbrina, si existeixen, els límits següents:

a) $\lim \frac{n^3}{2n+1}$ **b)** $\lim 2^n$

c) $\lim (-1)^n$ **d)** $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^{5n}$

e) $\lim \left(\frac{2n-2}{n+3}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ **f)** $\lim \left(\frac{n}{n+5}\right)^{\frac{1}{n}}$

a) $\lim \frac{n^3}{2n+1} = +\infty$

b) $\lim 2^n = +\infty$

c) $\lim (-1)^n$. No existeix, ja que és una successió oscil·lant.

d) $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^{5n} = \lim \frac{1}{3^{5n}} = 0$

e) $\lim \left(\frac{2n+2}{n+3}\right)^{\frac{n}{n+1}} = 2^1 = 2$, ja que:

$\lim \frac{2n+2}{n+3} = 2$ i $\lim \frac{n}{n+1} = 1$.

f) $\lim \left(\frac{n}{n+5}\right)^{\frac{1}{n}} = 1^0 = 1$, ja que $\lim \frac{n}{n+5} = 1$ i $\lim \frac{1}{n} = 0$.

40. Calcula els límits següents:

a) $\lim \frac{0,2^n}{n}$ **b)** $\lim \frac{3n^3 - n^2 + 1}{-2n^3 + n^2 + n + 1}$

c) $\lim \frac{2^n}{3^n}$ **d)** $\lim \frac{n+1}{\sqrt{n+10}}$

e) $\lim \left(\frac{n^2}{n+5} - \frac{n}{100}\right)$ **f)** $\lim (4n - \sqrt{n-1})$

a) $\lim \frac{0,2^n}{n} = \lim \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{n} = \lim \frac{1}{5^n \cdot n} = 0$

b) $\lim \frac{3n^3 - n^2 + 1}{-2n^3 + n^2 + n + 1} = \lim \frac{3n^3}{-2n^3} = -\frac{3}{2}$

c) $\lim \frac{2^n}{3^n} = 0$, ja que $3 > 2$.

d) $\lim \frac{n+1}{\sqrt{n+10}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim \sqrt{n} = +\infty$

e) $\lim \left(\frac{n^2}{n+5} - \frac{n}{100}\right) = \lim \frac{100n^2 - n^2 - 5n}{100n + 500} =$

$= \lim \frac{99n^2}{100n} = \lim \frac{99n}{100} = +\infty$

f) $\lim (4n - \sqrt{n-1}) =$

$= \lim \frac{(4n - \sqrt{n-1})(4n + \sqrt{n-1})}{4n + \sqrt{n-1}}$

$= \lim \frac{16n^2 - n + 1}{4n + \sqrt{n-1}} = \lim \frac{16n^2}{4n} = \lim 4n = +\infty$

41. Calcula:

a) $\lim \frac{(2n-1)(4n-3)}{(n+1)(5n-4)}$ **b)** $\lim \left(\frac{2n+3}{n+5}\right)^{\frac{3n}{n+1}}$

c) $\lim \left(\frac{3n}{5} - \frac{n^2+1}{n+2}\right)$ **d)** $\lim \left(\frac{5n+1}{n+5}\right)^{n+3}$

e) $\lim \frac{n+100}{\sqrt{n^2+2}}$ **f)** $\lim \frac{n^2 - n^3 - n^4}{n^4 + n^3 + n^2 + 1}$

a) $\lim \frac{8n^2 - 10n + 3}{5n^2 + n - 4} = \lim \frac{8n^2}{5n^2} = \frac{8}{5}$

b) $\lim \left(\frac{2n+3}{n+5}\right)^{\frac{3n}{n+1}} = 2^3 = 8$, ja que

$\lim \frac{2n+3}{n+5} = 2$ i $\lim \frac{3n}{n+1} = 3$

c) $\lim \frac{3n^2 + 6n - 5n^2 - 5}{5n + 10} = \lim \frac{-2n^2}{5n} =$

$= \lim \frac{-2n}{5} = -\infty$

d) $\lim \left(\frac{5n+1}{n+5}\right)^{n+3} = 5^\infty = +\infty$, ja que $\lim \frac{5n+1}{n+5} = 5$ i $\lim (n+3) = +\infty$

e) $\lim \frac{n+100}{\sqrt{n^2+2}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$

f) $\lim \frac{n^2 - n^3 - n^4}{n^4 + n^3 + n^2 + 1} = \lim \frac{-n^4}{n^4} = -1$

42. Calcula $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Tingues en compte que: $1 - \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{-n}$.

$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{\frac{n(-1)}{-1}} =$

$= \left[\lim \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

43. Determina els límits següents:

a) $\lim \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$ **b)** $\lim \left(2 - \frac{n+3}{n+1}\right)^{3n}$

c) $\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+1}$ **d)** $\lim \left(4 - \frac{3n}{n+5}\right)^{n^2}$

a) $\lim \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{n+2}{n+1} - 1\right)^n =$

$= \lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{n+1}} =$

$= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = e^1 = e$

b) $\lim \left(1 + 1 - \frac{n+3}{n+1}\right)^{3n} = \lim \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{3n} =$

$= \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{3n \cdot \frac{n+1}{-2} \cdot \frac{-2}{n+1}} =$

$= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right]^{\frac{-6n}{n+1}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$

c) $\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n(3n+1)}{2n}} =$

$= \lim\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{3n+1}{2n}} = e^{\frac{3}{2}}$

d) $\lim\left(1+3-\frac{3n}{n+5}\right)^{n^2} = \lim\left(1+\frac{15}{n+5}\right)^{n^2} =$

$= \lim\left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{15}}\right)^{\frac{n^2(n+5)}{15}\cdot\frac{15}{n+5}} =$

$= \lim\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{15}}\right)^{\frac{n+5}{15}}\right]^{\frac{15n^2}{n+5}} = e^{\infty} = +\infty$

Activitats finals

1. Cadascuna de les qüestions següents fa referència a progressions aritmètiques:

a) $a_3 = 15,\ a_7 = 27$**. Calcula** d **i** S_8**.**

b) $d = 4,\ a_5 = 9$**. Determina** a_n **i** a_{10}**.**

c) $a_1 = 4,\ S_4 = 46$**. Calcula** d **i** a_6**.**

d) $a_n = 3 - 2n$**. Determina** S_7**.**

a) $a_h = a_k + (h-k)d \rightarrow d = \frac{a_h - a_k}{h-k} = \frac{a_3 - a_7}{3-7} = \frac{15-27}{-4} = 3$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow$

$a_1 = a_n - (n-1)\cdot d = a_3 - (3-1)\cdot 3 = 9$

$a_8 = 9 - (8-1)\cdot 3 = 30$

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

$S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = \frac{8(9+30)}{2} = 156$

b) $a_1 = a_n + 4(n-1) = a_5 + 4(5-1) = 9 + 16 = 25$

$a_n = 25 - 4(n-1)$

$a_{10} = 15 - (10-1) = 6$

c) $S_4 = \frac{4(4+a_4)}{2} = 46 \rightarrow a_4 = 19$

$d = \frac{a_1 - a_4}{1-4} = \frac{4-19}{-3} = 5$

$a_n = 4 + 5(n-1)$

$a_6 = 4 + 5(6-1) = 29$

d) $a_n = 3 - 2n$

$a_1 = 3 - 2\cdot 1 = 1$

$a_7 = 3 - 14 = -11$

$S_4 = \frac{7(1-11)}{2} = -35$

2. En una progressió geomètrica, $a_2 = 3^{-\frac{1}{2}}$ **i** $a_6 = 3^{\frac{3}{2}}$**. Calcula** a_{10} **i** a_{13}**.**

$a^6 : a^2 = r^4 \rightarrow 3^{\frac{3}{2}} : 3^{-\frac{1}{2}} = 3^2 = r^4 \rightarrow r = \pm 3^{\frac{1}{2}}$

Si $r = +3^{\frac{1}{2}}$

$a_{10} = a_6 \cdot r^4 = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^2 = 3^{\frac{7}{2}}$

$a_{13} = a_{10} \cdot r^3 = 3^{\frac{7}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^5$

Si $r = -3^{\frac{1}{2}}$

$a_{10} = a_6 \cdot r^4 = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^2 = 3^{\frac{7}{2}}$

$a_{13} = a_{10} \cdot r^3 = 3^{\frac{7}{2}} \cdot (-3)^{\frac{3}{2}} = -3^5$

3. El primer terme d'una progressió geomètrica és –5 i el cinquè, –125. Esbrina'n la raó i indica si es tracta d'una successió decreixent o oscil·lant.

$a_1 = -5;\ a_5 = -125 \rightarrow -125 : (-5) = 25 = r^4$

$r = \pm 5^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{5}$

La progressió és decreixent si $r = +\sqrt{5}$.

És alternada si $r = -\sqrt{5}$

4. Determina el terme central d'una progressió geomètrica d'onze termes sabent que $P_{11} = 1$**.**

$P_{11} = \sqrt{(a_c^2)^{11}} = 1 \rightarrow a_c = 1$

5. Cadascuna de les qüestions següents fa referència a progressions geomètriques:

a) $a_2 = 2,\ a_5 = \frac{1}{4}$**. Calcula** r**,** S_6 **i** S**.**

b) $r = 3,\ a_3 = 9$**. Determina** a_n**,** a_7 **i** P_7**.**

c) $a_1 = -6,\ r = \frac{2}{3}$**. Calcula** S_4 **i** S**.**

d) $a_n = (-2)^{n-1}$**. Determina** S_5 **i** P_5**.**

a) $a_n = a_1 r^{n-1}$

$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 r = 2 \\ a_5 = a_1 r^4 = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow r = \frac{1}{2},\ a_1 = 4$

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_6 = \frac{4\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{63}{8}$

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$

b) $a_n = a_1 r^{n-1} = a_1 3^{n-1}$

$a_3 = a_1 3^2 = 9 \rightarrow a_1 = 1$

$a_n = 3^{n-1}$

$a_7 = 3^{7-1} = 729$

$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

$P_7 = \sqrt{(a_1 \cdot a_7)^7} = \sqrt{729^7} = 10\,460\,353\,203$

c) $S_4 = -\dfrac{130}{9}$

$S = -18$

d) $a_n = (-2)^{n-1} \rightarrow a_5 = (-2)^{5-1} = 16$

$S_5 = \dfrac{(1-(-2)^5)}{1-(-2)} = 11$

$P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{16^5} = 2^{10} = 1024$

6. Dedueix una expressió que permeti calcular aquesta suma: $1 + r + r^2 + \ldots + r^n$.

Són $n + 1$ termes d'una progressió geomètrica de raó r.

$S_{n+1} = \dfrac{r^n \cdot r - 1}{r - 1} = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$

7. Sabent que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2\,047$, indica el valor de n utilitzant l'expressió que has obtingut a l'activitat anterior.

Cas particular de l'anterior amb $r = 2$.

$\dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2047 \rightarrow 2^{n+1} = 2048 = 2^{11} \rightarrow n = 10$

8. Calcula la suma dels vint primers nombres múltiples de 3, i la suma i el producte de les sis primeres potències de 3.

$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + 3(n-1) = 3n$

$a_{20} = 60$

$S_{20} = \dfrac{20\,(3+60)}{2} = 630$

La suma dels 20 primers múltiples de 3 és 630.

$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$a_6 = 3^6$

$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_6 = \dfrac{1(1-3^6)}{1-3} = 364$

$P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{3^{30}} = 3^{15} = 14\,348\,907$

La suma de les 6 primeres potències de 3 és 364 i el producte, 14 348 907.

9. Interpola quatre termes entre els nombres 10 i 45, de manera que formin una progressió aritmètica. I tres termes entre 1 792 i 7 per tal que formin una progressió geomètrica.

Progressió aritmètica: 10, 17, 24, 31, 38, 45.

Progressió geomètrica: 1 792, 448, 112, 28, 7.

10. La suma dels termes de tres nombres naturals és 35, i el seu producte, 1 000. Esbrina aquests nombres sabent que són tres termes consecutius d'una progressió geomètrica.

Plantegem un sistema d'equacions:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 35 \\ a_1 \cdot a_1 r \cdot a_1 r^2 = a_1^3 r^3 = 1000 \rightarrow a_1 r = 10 \rightarrow a_1 = \dfrac{10}{r} \end{cases}$$

$\dfrac{10}{r}(1 + r + r^2) = 35 \rightarrow 10r^2 - 25r + 10 = 0 \rightarrow$

$r_1 = 2$ i $r_2 = \dfrac{1}{2}$.

Si $r = 2$, els termes: 5, 10 i 20 verifiquen l'enunciat del problema.

11. La suma dels termes d'una progressió geomètrica il·limitada decreixent és 10 i la diferència entre el primer i el segon terme és $\dfrac{5}{2}$. Determina'n el primer terme i la raó.

$\dfrac{a_1}{1-r} = 10$ i $a_1 - a_1 r = \dfrac{5}{2} \rightarrow$

$a_1(1-r) = \dfrac{5}{2} \rightarrow (1-r) = \dfrac{5}{2a_1}$

$\dfrac{a_1}{\dfrac{5}{2a_1}} = 10 \rightarrow a_1 = \dfrac{25}{a_1} \rightarrow a_1^2 = 25 \rightarrow a_1 = 5$

Substituïm: $1 - r = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \rightarrow r = \dfrac{1}{2}$

12. Si les mesures en centímetres dels costats d'un triangle rectangle estan en progressió aritmètica de diferència 3, calcula el perímetre i l'àrea del triangle.

$a_n = a_1 + 3(n-1)$

$P = a_1 + a_1 + 3 + a_1 + 6 = 3a_1 + 9 = 3 \cdot 3 + 9 = 18$ cm

$A = \dfrac{a_1(a_1+3)}{2} = \dfrac{3(3+3)}{2} = 9$ cm^2

13. Utilitzant la suma il·limitada dels termes d'una progressió geomètrica, determina la fracció generatriu dels nombres decimals periòdics: $2,\widehat{5}$ i $0,1\widehat{2}$.

$S = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{\dfrac{5}{10}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{5}{9}$

$2,\widehat{5} = 2 + \dfrac{5}{9} = \dfrac{23}{9}$

$$0,1\widehat{2}\cdot 10 = 1,\widehat{2} = 1 + \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$$

$$0,1\widehat{2} = \frac{11}{9} : 10 = \frac{11}{90}$$

14. Fa molts anys, un negociant va proposar a un ramader el tracte següent: «Li venc aquest cavall amb la condició que em pagui un cèntim pel primer clau de la seva ferradura, dos cèntims pel segon clau, quatre pel tercer i així successivament, fins a arribar al clau número 32, que és l'últim». A quin preu pretenia vendre-li el cavall?

El preu total és la suma: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{31}$. Procedint com en l'activitat 6, tenim:

$S_{32} = \frac{2^{32}-1}{2-1} = 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295$ cèntims. Gairebé 4 mil milions de cèntims.

15. La successió 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... és la successió de Fibonacci. Aquesta successió té una regla recurrent que permet, a partir d'un cert valor de *n*, determinar-ne qualsevol terme si es coneixen els anteriors. Escriu-ne cinc termes més i indica la recurrència enunciada.

A partir del segon, cada terme és la suma dels dos anteriors.

5 termes més: 55, 89, 144, 233, 377.

La llei de recurrència: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

16. La Maria i el Jordi arriben a un acord: durant vint dies, la Maria donarà al Jordi 10 € el primer dia, 20 € el segon, 30 € el tercer i així successivament. A canvi, el Jordi donarà a la Maria 1 € el primer dia, 2 € el segon, 4 € el tercer... Qui en surt guanyant?

La Maria dóna al Jordi:

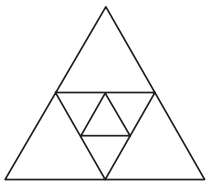
$10 + 20 + 30 + \ldots + 200 = \frac{(10+200)\cdot 20}{2} = 2\,100$

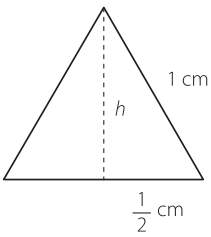
I el Jordi dóna a la Maria:

$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{19} = \frac{2^{20}-1}{2-1} = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575$

Per tant, surt guanyant la Maria.

17. Dibuixa triangles equilàters successius a partir dels punts mitjans del triangle equilàter immediatament anterior. Si el primer triangle mesura 1 cm de costat, comprova que la seva area és $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm². Calcula els termes a_2, a_4 i a_7 de la successió de les àrees. Pots escriure l'expressió del terme general a_n d'aquesta successió? Té límit la successió d'aquestes àrees? Quin és?





$h = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_1 = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} : 2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm² → àrea del primer triangle.

L'àrea dels triangles successius és $\frac{1}{4}$ de l'anterior:

$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{4^2}$; $a_4 = \frac{\sqrt{3}}{4^4}$; $a_7 = \frac{\sqrt{3}}{4^7}$

$\lim a_n = \lim \frac{\sqrt{3}}{4^n} = 0$

18. Esbrina quines de les successions següents són progressions, indica'n el tipus. Determina el terme general de cada successió, i calcula'n el límit:

a) **2, 0, – 2, – 4, ...**

b) **9, 16, 25, 36, ...**

c) **–1, 3, – 9, 27, ...**

d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \ldots$

e) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

f) $\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \ldots$

a) Progressió aritmètica de distància –2.

$a_n = 4 - 2n$

$\lim(4-2n) = -\infty$

b) No és progressió.

c) Progressió geomètrica de raó –3.

$a_n = (-1)\cdot(-3)^{n-1}$

El límit no existeix.

d) No és progressió.

e) Progressió aritmètica de distància $\frac{1}{2}$.

$a_n = \frac{n}{2}$

$\lim \frac{n}{2} = \infty$

f) Progressió geomètrica de raó $\frac{1}{2}$.

$a_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim\left(\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 0$

19. Esbrina si aquesta afirmació és certa:

«2 és una fita inferior de la successió $a_n = \frac{2n-1}{2}$.»

Quin és el límit d'aquesta successió?

2 no és una fita inferior de la successió, ja que $a_1 = 0 < 2$.

$$\lim \frac{2n-1}{2} = \lim \frac{2n}{2} = \lim n = +\infty$$

20. Considera la successió de terme general $a_n = (\sqrt{3})^n$. Té fites inferiors aquesta successió? A partir de quin terme tots el que el segueixen són més grans que 81? Té fita superior aquesta successió?

$a_1 = \sqrt{3}$ per tant, qualsevol $k \le \sqrt{3}$ és una fita inferior.

$\sqrt{3^n} > 81 \to 3^{\frac{n}{2}} > 3^4 \to \frac{n}{2} > 4 \to n > 8$

A partir del a_8, tots els termes que el segueixen són més grans que 81. Aquesta successió no té fita superior, ja que el seu límit és infinit.

21. Classifica les successions següents, segons la monotonia, les fites i el límit:

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

b) $a_n = \frac{2n}{3n+2}$

c) $\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{10}, \frac{9}{14}, \ldots$

d) $a_n = \frac{n^2}{2n+1}$

a) Monotonia: és una successió monòtona creixent.

Fites inferiors: $k \le \frac{2}{3}$. Fites superiors: $k \ge 1$.

És convergent amb límit 1.

b) Monotonia: és una successió monòtona creixent.

Fites inferiors: $k \le \frac{2}{5}$. Fites superiors: $k \ge \frac{2}{3}$.

És convergent amb límit $\frac{2}{3}$.

c) Monotonia: és una successió monòtona decreixent.

Fites inferiors: $k \le 0$. Fites superiors: $k \ge \frac{3}{2}$.

És convergent amb límit 0.

d) Monotonia: és una successió monòtona creixent.

Fites inferiors: $k \le \frac{1}{3}$. Fites superiors: no n'hi ha.

És divergent.

22. Calcula els límits següents:

a) $\lim [(3n-5)(2-3n)]$ *b)* $\lim \left(\frac{5}{n} - \sqrt{n}\right)$

c) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+n}}{2n+3}$ *d)* $\lim \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n}{2}\right)$

e) $\lim \frac{n-n^3}{n^2+5}$ *f)* $\lim \frac{3n^3+n^2}{3-n^3}$

a) $\lim [(3n-5)(2-3n)] = \lim (-9n^2+21n-10) =$
$= \lim (-9n^2) = -\infty$

b) $\lim \left(\frac{5}{n} - \sqrt{n}\right) = 0 - \infty = -\infty$

c) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+n}}{2n+3} = \lim \frac{2n}{2n} = 1$

d) $\lim \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n}{2}\right) = \lim \frac{n^2-n}{2n+2} = \lim \frac{n^2}{2n} = \lim \frac{n}{2} = +\infty$

Cal fer la resta prèviament al càlcul del límit, ja que el límit de la resta seria del tipus $\infty - \infty$, que és indeterminant.

e) $\lim \frac{n-n^3}{n^2+5} = \lim \frac{-n^3}{n^2} = \lim (-n) = -\infty$

f) $\lim \frac{3n^3+n^2}{3-n^3} = \lim \frac{3n^3}{-n3} = -3$

23. Calcula el valor de *k* en cada cas:

a) $\lim \frac{n^2+3n-5}{3-kn^2} = -3$

b) $\lim \frac{-kn}{3n+2} = -\frac{1}{3}$

c) $\lim \frac{1+kn^2}{2n^2+3} = 1$

d) $\lim \frac{kn-1}{5n+2} = \frac{1}{2}$

e) $\lim \frac{kn^2+3}{2-n^2} = 2$

f) $\lim \frac{2n}{\sqrt{kn^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\lim \frac{n^2+3n-5}{3-kn^2} = -\frac{1}{k} = 3 \to k = -\frac{1}{3}$

b) $\lim \frac{-kn}{3n+2} = \frac{-k}{3} = -\frac{1}{3} \to k = 1$

c) $\lim \frac{1+kn^2}{2n^2+3} = \frac{k}{2} = 1 \to k = 2$

d) $\lim \frac{kn-1}{5n+2} = \frac{k}{5} = \frac{1}{2} \to k = \frac{5}{2}$

e) $\lim \frac{kn^2+3}{2-n^2} = \frac{k}{-1} = 2 \to k = -2$

f) $\lim \frac{2n}{\sqrt{kn^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to k = 8$

24. Determina aquests límits:

a) $\lim \left(\frac{1}{5}\right)^{5n}$ *b)* $\lim \frac{n^3-3n^2+1}{n^5-2n}$

c) $\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}}$ *d)* $\lim \frac{\sqrt{5}\,n^3+3n^2}{\sqrt{n^3}+5n+1}$

e) $\lim (\sqrt{3n} - \sqrt{n})$ *f)* $\lim 300^{-n}$

a) $\lim\left(\frac{1}{5}\right)^{5n} = \lim\frac{1}{5^{5n}} = 0$

b) $\lim\frac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^5 - 2n} = \lim\frac{n^3}{n^5} = \lim\frac{1}{n^2} = 0$

c) $\lim\frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim\frac{n}{\sqrt{n}} = \lim\sqrt{n} = +\infty$

d) $\lim\frac{\sqrt{5}\,n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3} + 5n} = \lim\frac{\sqrt{5}\,n^3}{n^{\frac{3}{2}}} = +\infty$

e) $\lim(\sqrt{3n} - \sqrt{n}) = \lim\sqrt{n}\,(\sqrt{3} - 1) = +\infty$

f) $\lim 300^{-n} = \lim\frac{1}{300^n} = 0$

25. El límit d'una successió, el terme general de la qual és una fracció algèbrica, és 1. Explica la relació que hi ha entre els graus dels polinomis numerador i denominador, i entre els coeficients dels termes que determinen aquests graus.

Els polinomis numerador i denominador són del mateix grau i els coeficients dels respectius termes de grau més gran són iguals.

26. Calcula els límits següents:

a) $\lim\sqrt{\frac{4n^2+1}{9n^2-2}}$

b) $\lim\frac{2-n^{-1}}{n^{-2}+4}$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right)$

d) $\lim\left(\sqrt{2n^2+n+2} - \sqrt{2n^2-1}\right)$

e) $\lim\left(3n^2 - \sqrt{3n^4-2}\right)$

f) $\lim\left(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n}\right)$

g) $\lim\left(2 - \frac{n+1}{n}\right)^{-2n}$

h) $\lim\left(\frac{n^2+5}{2n^2+1}\right)^{5n}$

i) $\lim\left(\frac{3n}{n+1} - 2\right)^{n-1}$

j) $\lim\left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{1-n}$

a) $\lim\sqrt{\frac{4n^2+1}{9n^2-2}} = \frac{2}{3}$

b) $\lim\frac{2-n^{-1}}{n^{-2}+4} = \lim\frac{2n^2-n}{4n^2+1} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right) =$

$= \lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right)\left(\sqrt{n^2+2n+3} + n\right)}{\sqrt{n^2+2n+3} + n} = 1$

d) $\lim\left(\sqrt{2n^2+n+2} - \sqrt{2n^2-1}\right) =$

$= \lim\frac{\left(\sqrt{2n^2+n+2} - \sqrt{2n^2-1}\right)\left(\sqrt{2n^2+n+2} + \sqrt{2n^2-1}\right)}{\sqrt{2n^2+n+2} + \sqrt{2n^2-1}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $\lim\left(3n^2 - \sqrt{3n^4-2}\right) =$

$= \lim\frac{\left(3n^2 - \sqrt{3n^4-2}\right)\left(3n^2 + \sqrt{3n^4-2}\right)}{3n^2 + \sqrt{3n^4-2}} =$

$= \lim\frac{6n^4+2}{3n^2+\sqrt{3n^4-2}} = \infty$

f) $\lim\left(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n}\right) =$

$= \lim\frac{\left(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n}\right)\left(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n}\right)}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n}} =$

$= \lim\frac{2}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n}} = 0$

g) $\lim\left(2 - \frac{n+1}{n}\right)^{-2n} = \lim\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{2n\cdot\frac{n-1}{n-1}} =$

$= \lim\left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{2n}{n-1}} = e^2$

h) $\lim\left(\frac{n^2+5}{2n^2+1}\right)^{5n} = 0$

i) $\lim\left(\frac{3n}{n+1} - 2\right)^{n-1} = \lim\left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{n+1}{3}}\right)^{-\frac{n+1}{3}}\right]^{(n-1)\frac{-3}{n+1}} = e^{-3}$

j) $\lim\left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{1-n} = 0$

Unitat 5. Funcions exponencial i logarítmica

Activitats

1. Calcula les potències d'exponent racional següents:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$ ***b)*** $3{,}2^{4{,}5}$ ***c)*** $7^{-0{,}3}$ ***d)*** $10^{\frac{2}{5}}$ ***e)*** $e^{-\frac{1}{8}}$

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = 1{,}5^{0{,}75} = 1{,}355\,403$

b) $3{,}2^{4{,}5} = 187{,}574\,98$

c) $7^{-0{,}3} = \left(\frac{1}{7}\right)^{0{,}3} = \frac{1}{7^{0{,}3}} = \frac{1}{1{,}792\,79} = 0{,}557\,789\,8$

d) $10^{\frac{2}{5}} = 10^{0{,}4} = 2{,}511\,886\,4$

e) $e^{-\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{0{,}125} = \frac{1}{e^{0{,}125}} =$

$= \frac{1}{1{,}133\,148\,5} = 0{,}882\,496\,9$

2. Escriu i calcula els sis primers termes d'una successió que tingui per límit $4^{\sqrt{3}}$.

$4^{\sqrt{3}} = 4^{1{,}732\,050\,8}$

$4^1 = 4;\ 4^{1{,}7} = 10{,}556\,063;\ 4^{1{,}73} = 11{,}004\,335;$

$4^{1{,}732} = 11{,}034\,887$

$4^{1{,}7320} = 11{,}034\,887;\ 4^{1{,}73205} = 11{,}035\,652$

4; 10,556 063; 11,004 335; 11,034 887; 11,034 887; 11,035 652

3. Repeteix l'activitat anterior per a $3^{-\pi}$.

$3^{-\pi} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\pi} = \frac{1}{3^{\pi}} = \frac{1}{3^{3{,}141\,592\,7}}$

$\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} = 0{,}\widehat{037}$

$\frac{1}{3^{3{,}1}} = \frac{1}{30{,}135\,326} = 0{,}033\,183\,6$

$\frac{1}{3^{3{,}14}} = \frac{1}{31{,}489\,135} = 0{,}031\,756\,9$

$\frac{1}{3^{3{,}141}} = \frac{1}{31{,}523\,749} = 0{,}031\,722\,1$

$\frac{1}{3^{3{,}1415}} = \frac{1}{31{,}541\,06} = 0{,}031\,704\,69$

$\frac{1}{3^{3{,}141\,59}} = \frac{1}{31{,}544\,18} = 0{,}031\,701\,5$

$0{,}\widehat{037}$; 0,033 183 6; 0,031 756 9; 0,031 722 1; 0,031 704 6; 0,031 701 5

4. Esbrina les cinc primeres aproximacions per defecte d'aquestes potències:

a) 2e ***b)*** $3^{\sqrt{2}}$ ***c)*** $\left(\frac{5}{4}\right)^{\pi}$

a) $2^{e} = 2^{2{,}718\,281\,8}$

$2^2 = 4;\ 2^{2{,}7} = 6{,}498\,019\,2;\ 2^{2{,}71} = 6{,}543\,216\,5;$

$2^{2{,}718} = 6{,}579\,600\,6;\ 2^{2{,}718\,2} = 6{,}580\,512\,7$

4; 6,498 019 2; 6,543 216 5; 6,579 600 6; 6,580 512 7

b) $3^{\sqrt{2}} = 3^{1{,}414\,213\,6}$

$3^1 = 3;\ 3^{1{,}4} = 4{,}655\,536\,7;\ 3^{1{,}41} = 4{,}706\,965;$

$3^{1{,}414} = 4{,}727\,695;\ 3^{1{,}414\,2} = 4{,}728\,733\,9$

3; 4,655 536 7; 4,706 965; 4,727 695; 4,728 733 9

c) $\left(\frac{5}{4}\right)^{\pi} = 1{,}25^{3{,}141\,592\,7}$

$1{,}25^3 = 1{,}953\,125;\ 1{,}25^{3{,}1} = 1{,}997\,197\,6;$

$1{,}25^{3{,}14} = 2{,}015\,103\,9;\ 1{,}25^{3{,}141} = 2{,}015\,553\,6;$

$1{,}25^{3{,}1415} = 2{,}015\,778\,5$

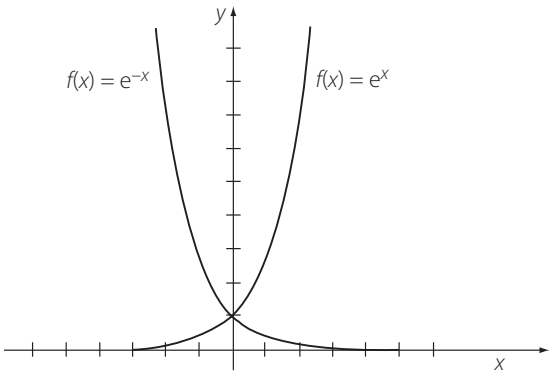
1,953 125; 1,997 197 6; 2,015 103 9; 2,015 553 6; 2,015 778 5

5. Representa de manera gràfica les funcions exponencials $f(x) = e^x$ i $g(x) = e^{-x}$.

$f(x) = e^x$

x	e^x
1	$e = 2{,}718\,281\,8$
2	$e^2 = 7{,}389\,056\,1$
0	1
−1	$e^{-1} = \frac{1}{e} = 0{,}367\,879\,4$

$f(x) = e^{-x}$, és simètrica respecte de l'eix *OY* de la funció $f(x) = e^x$.



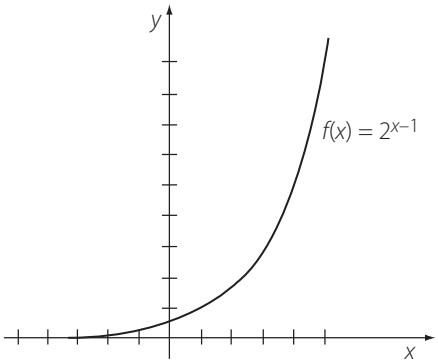
6. A partir de la gràfica $y = 2^x$, dibuixa, fent les translacions necessàries, les gràfiques següents:

a) $y = 2^{x-1}$ ***b)*** $y = 2^x + 1$ ***c)*** $y = 2^{x+1} - 1$

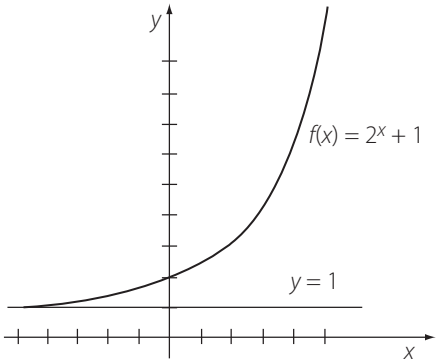
$y = 2^x$

x	2^x
1	2
2	4
0	1
–1	0,5

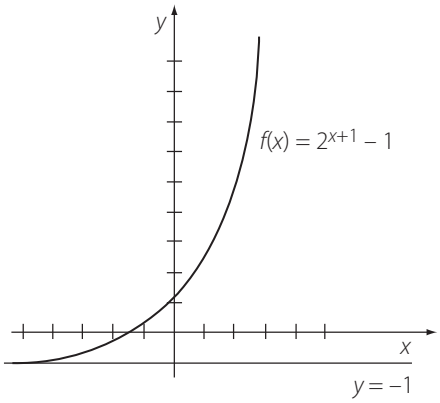
a) A partir de la gràfica de $y = 2^x$, es trasllada una unitat cap a la dreta.



b) A partir de la gràfica de $y = 2^x$, es trasllada una unitat cap amunt.



c) A partir de la gràfica de $y = 2^x$, es trasllada una unitat cap a l'esquerra i una unitat cap avall.



7. Determina les antiimatges de $\frac{1}{16}$; 0,125; 512 i $\sqrt[5]{8}$ en la funció $f(x) = 2^x$. Has d'expressar cadascun d'aquests nombres com una potència de base 2.

$2^x = \frac{1}{16} \rightarrow 2^x = \frac{1}{2^4} \rightarrow 2^x = 2^{-4} \rightarrow x = -4$

$2^x = 0,125 \rightarrow 2^x = \frac{1}{8} \rightarrow 2^x = \frac{1}{2^3} \rightarrow$

$\rightarrow 2^x = 2^{-3} \rightarrow x = -3$

$2^x = 512 \rightarrow 2^x = 2^9 \rightarrow x = 9$

$2^x = \sqrt[5]{8} \rightarrow 2^x = \sqrt[5]{2^3} \rightarrow 2^x = 2^{\frac{3}{5}} \rightarrow x = \frac{3}{5}$

8. Comprova que es verifiquen les propietats dels apartats *j*), *k*), *l*) i *m*) amb les funcions exponencials següents: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

j) $g(x) = 3^x$; $g(1) = 3$;

$g(2) = 3^2 = 9 \rightarrow g(1) < g(2)$

$p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $p(1) = \frac{1}{3}$;

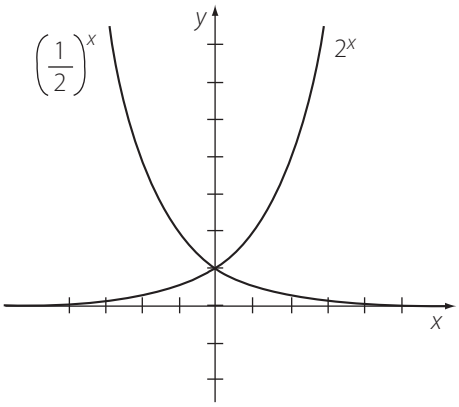
$p(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \rightarrow p(1) > p(2)$

k) $f(x) = 2^x$

x	2^x
1	2
2	4
0	1
–1	$\frac{1}{2}$
–2	$\frac{1}{4}$

$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
0	1
–1	2
–2	4



l) $f(x) = 2^x;\ f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4};\ f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

$f(1) = 2;\ f(2) = 2^2 = 4;\ f(3) = 2^3 = 8$

$p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x;\ p(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$

$p(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

$p(-3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$

$p(1) = \frac{1}{3};\ p(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$p(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

m) $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 3^x$

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ g(1) = 3 \end{array}\right\} \to g(1) > f(1)$

$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ g(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \to g(-1) < f(-1)$

9. La gràfica de la funció $f(x) = a^x$ passa pel punt $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$. Determina el valor de a.

$f(x) = a^x$

$\left.\begin{array}{l} f(-1) = \frac{1}{5} \\ f(-1) = a^{-1} = \frac{1}{a} \end{array}\right\} \to \frac{1}{a} = \frac{1}{5} \to a = 5$

10. Quan es defineix la funció exponencial de base a, per quin motiu s'imposa la condició que aquesta base sigui positiva?

Si $a < 0$, hi hauria valors de x que no tindrien imatge, per exemple: $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

11. Resol aquestes equacions exponencials:

a) $2^x \cdot 2^{x-1} \cdot 2^{x+1} = 64$

b) $7^{3x-2} = \sqrt{7^{x-1}}$

c) $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^x = 364$

d) $11^{x^2-3x+2} = 1$

e) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-x+3} = 32^{3x-2}$

f) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

g) $5^{x+1} + 5^{x-2} + 5^x = \frac{151}{25}$

h) $a^{x^2-2x+4} = \frac{a^{11}}{a^8}$

a) $2^x \cdot 2^{x-1} \cdot 2^{x+1} = 64 \to 2^{x+x-1+x+1} = 2^6 \to$

$\to 2^{3x} = 2^6 \to 3x = 6 \to x = 2$

b) $7^{3x-2} = \sqrt{7^{x-1}} \to 7^{3x-2} = 7^{\frac{x-1}{2}} \to$

$\to 3x - 2 = \frac{x-1}{2} \to x = \frac{3}{5}$

c) $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^x = 364$

$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$

$3^x = 243 \to 3^x = 3^5 \to x = 5$

d) $11^{x^2-3x+2} = 1 \to x^2 - 3x + 2 = 0 \to x_1 = 2, x_2 = 1$

e) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-x+3} = 32^{3x-2} \to \left(\frac{1}{2^4}\right)^{-x+3} = (2^5)^{3x-2} \to$

$\to (2^{-4})^{-x+3} = (2^5)^{3x-2}$

$2^{4x-12} = 2^{15x-10} \to 4x - 12 = 15x - 10 \to x = -\frac{2}{11}$

f) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \to (3^2)^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \to$

$\to (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

Si $3^x = t \to t^2 - 4t + 3 = 0 \to t_1 = 3, t_2 = 1 \to$

$\to x_1 = 1, x_2 = 0$

g) $5^{x+1} + 5^{x-2} + 5^x = \frac{151}{25} \to$

$\to 5 \cdot 5^x + \frac{5^x}{25} + 5^x = \frac{151}{25} \to$

$\to 5^x\left(5 + \frac{1}{25} + 1\right) = \frac{151}{25} \to 5^x \cdot \frac{151}{25} = \frac{151}{25} \to$

$\to 5^x = 1 \to x = 0$

h) $a^{x^2-2x+4} = \frac{a^{11}}{a^8} \to a^{x^2-2x+4} = a^3 \to$

$\to x^2 - 2x + 4 = 3 \to x^2 - 2x + 1 = 0 \to x = 1$

12. Calcula, aproximant-la fins a les centèsimes, la solució de cadascuna de les equacions:

a) $3^x = 17$ ***b)*** $5^x = 0{,}8$ ***c)*** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 7$

a) $3^x = 17$

$\left.\begin{array}{l} 3^{2,57} = 16{,}834\,554 \\ 3^{2,58} = 17{,}020\,521 \end{array}\right\} \to x \simeq 2{,}58$

b) $5^x = 0{,}8$

$\left.\begin{array}{l} 5^{-0,14} = 0{,}798\,259\,6 \\ 5^{-0,13} = 0{,}811\,211\,1 \end{array}\right\} \to x \simeq -0{,}14$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 7$

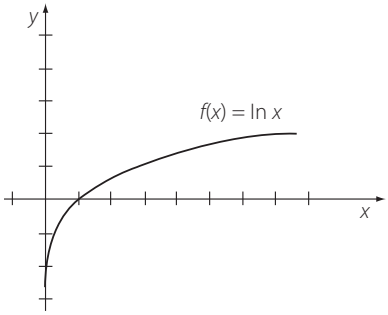
$\left.\begin{array}{l} 0{,}5^{-2,81} = 7{,}012\,845\,8 \\ 0{,}5^{-2,8} = 6{,}694\,404\,5 \end{array}\right\} \to x \simeq -2{,}81$

13. Elabora una taula de valors i dibuixa les gràfiques d'aquestes funcions:

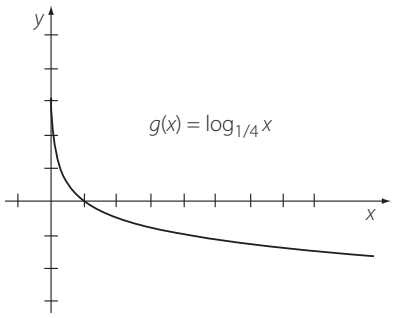
a) $f(x) = \ln x$ ***b)*** $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

a) $f(x) = \ln x$

x	$\ln x$
1	0
e	1
e^2	2
e^{-1}	−1



b) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



x	$\log_{\frac{1}{4}} x$
1	0
4	−1
$\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

14. Utilitzant les funcions logarítmiques en base 2, 3, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$, comprova les propietats dels apartats *i*), *j*) i *k*) de la funció logarítmica.

i) $f(x) = \log_2 x$, $f(2) = \log_2 2 = 1$,

$f(4) = \log_2 4 = 2 \rightarrow f(2) < f(4)$

$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$,

$g(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \rightarrow g(2) > g(4)$

j) $h(x) = \log_3 x$, $h(3) = \log_3 3 = 1$,

$h(9) = \log_3 9 = 2 \rightarrow h(3) < h(9)$, quan x augmenta, $h(x)$ augmenta.

$k(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$; $k\left(\frac{1}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$

$k\left(\frac{1}{9}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$

$k\left(\frac{1}{3}\right) < k\left(\frac{1}{9}\right)$, quan x s'acosta a 0, $k(x)$ augmenta.

$k(3) = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$, $k(9) = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

$k(3) > k(9)$ quan x augmenta, $k(x)$ disminueix.

k) $f(x) = \log_2 x$, $h(x) = \log_3 x$

$f(8) = \log_2 8 = 3$, $h(8) = \log_3 8 < 2 \rightarrow$

$\log_2 8 > \log_3 8$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_2 \frac{1}{3} < -1$, $h\left(\frac{1}{3}\right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1 \rightarrow$

$\log_2 \frac{1}{3} < \log_3 \frac{1}{3}$

$k(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$k(4) = \log_{\frac{1}{3}} 4 > -2$, $g(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \rightarrow$

$\log_{\frac{1}{3}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 4$

$k\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} < 1$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \rightarrow$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $f(x) = \log_2 x$

$g(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$, $f(2) = \log_2 2 = 1 \rightarrow$

$\log_{\frac{1}{2}} 2 < \log_2 2$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2 \rightarrow$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} > \log_2 \frac{1}{4}$

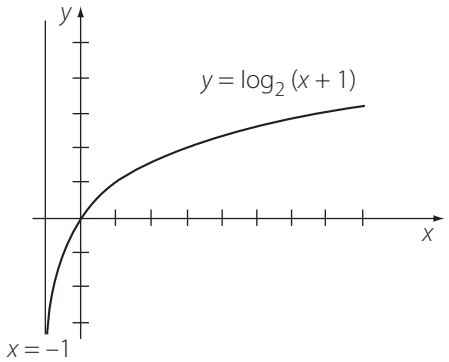
15. A partir de la gràfica de $y = \log_2 x$, dibuixa, aplicant-hi les translacions corresponents, les gràfiques de les funcions:

a) $y = \log_2 (x + 1)$ ***b)*** $y = \log_2 x - 1$

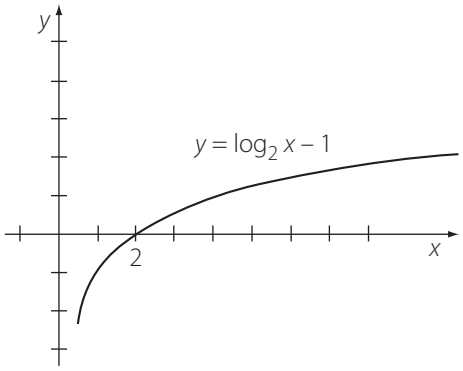
$y = \log_2 x$

x	$\log_2 x$
1	0
2	1
4	2
$\frac{1}{2}$	−1
$\frac{1}{4}$	−2

a) A partir de la gràfica de $y = \log_2 x$, es trasllada una unitat cap a l'esquerra.



b) A partir de la gràfica de $y = \log_2 x$, es trasllada una unitat cap avall.



16. Demostra les igualtats:

$$\log_a b = -\log_a \frac{1}{b} = -\log_{\frac{1}{a}} b$$

Suposem que $\log_a b = p \rightarrow a^p = b$

$$-\log_a \frac{1}{b} = -\log_a \frac{1}{a^p} = -\log_a \left(\frac{1}{a}\right)^p =$$

$$= -\log_a a^{-p} = -(-p) = p = \log_a b$$

$$-\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_{\frac{1}{a}} a^p = -\log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a}\right)^{-p} =$$

$$= -(-p) = p = \log_a b$$

17. Esbrina, sense utilitzar la calculadora, els logaritmes següents:

***a*)** $\log_7 49$ ***b*)** $\log_3 729$

***c*)** $\log_9 \frac{1}{9}$ ***d*)** $\log_{11} \sqrt[3]{121}$

***e*)** $\log_{234} 1$ ***f*)** $\log_{\frac{1}{3}} 27$

***g*)** $\log_{\frac{1}{5}} 125$ ***h*)** $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt[7]{216}$

***i*)** $\log_{225} 15$

a) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

b) $\log_3 729 = \log_3 3^6 = 6$

c) $\log_9 \frac{1}{9} = \log_9 9^{-1} = -1$

d) $\log_{11} \sqrt[3]{121} = \log_{11} \sqrt[3]{11^2} = \log_{11} 11^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

e) $\log_{234} 1 = 0$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} 3^3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3$

g) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = \log_{\frac{1}{5}} 5^3 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = -3$

h) $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt[7]{216} = \log_{\frac{1}{6}} \sqrt[7]{6^3} = \log_{\frac{1}{6}} 6^{\frac{3}{7}} =$

$= \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{3}{7}} = -\frac{3}{7}$

i) $\log_{225} 15 = \log_{225} \sqrt{225} = \log_{225} 225^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

18. Calcula *x* en cadascuna d'aquestes igualtats:

***a*)** $\log_3 x = -1$ ***b*)** $\log_x \frac{1}{25} = -2$

***c*)** $\log_x 6^3 = -3$ ***d*)** $\log x = \frac{1}{2}$

***e*)** $\ln x = -\frac{2}{3}$ ***f*)** $\log_{\sqrt{7}} x = -2$

a) $\log_3 x = -1 \rightarrow x = 3^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{3}$

b) $\log_x \frac{1}{25} = -2 \rightarrow x^{-2} = \frac{1}{25} \rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{25} \rightarrow$

$x^2 = 25 \rightarrow x = 5$

c) $\log_x 6^3 = -3 \rightarrow x^{-3} = 6^3 \rightarrow x^{-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-3} \rightarrow x = \frac{1}{6}$

d) $\log x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} \rightarrow x = \sqrt{10}$

e) $\ln x = -\frac{2}{3} \rightarrow x = e^{-\frac{2}{3}}$

f) $\log_{\sqrt{7}} x = -2 \rightarrow x = (\sqrt{7})^{-2} \rightarrow$

$x = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 \rightarrow x = \frac{1}{7}$

19. Si $\log 3 = m$, escriu en funció de *m*:

***a*)** $\log 8\,100$ ***b*)** $\log \sqrt{3\,000}$

***c*)** $\log \sqrt[7]{0{,}27}$ ***d*)** $\log \frac{1}{729}$

***e*)** $\log \left(\frac{1}{2{,}43}\right)^6$ ***f*)** $\log \frac{0{,}9}{7{,}29}$

***g*)** $\log 0{,}3$ ***h*)** $\log 0{,}\hat{3}$

***i*)** $\log \frac{10}{81}$

a) $\log 8\,100 = (\log 81 \cdot 100) = \log 81 + \log 100 =$

$= \log 3^4 + 2 = 4 \log 3 + 2 = 4m + 2$

b) $\log \sqrt{3\,000} = \frac{1}{2} \log 3\,000 = \frac{1}{2} \log (3 \cdot 1\,000) =$

$= \frac{1}{2}(\log 3 + \log 1\,000) = \frac{1}{2}(m + 3)$

c) $\log\sqrt[7]{0,27} = \frac{1}{7}\log 0,27 = \frac{1}{7}\log\frac{27}{100} =$

$= \frac{1}{7}(\log 27 - \log 100) = \frac{1}{7}(\log 3^3 - 2) =$

$= \frac{1}{7}(3\log 3 - 2) = \frac{1}{7}(3m - 2)$

d) $\log\frac{1}{729} = -\log 729 = -\log 3^6 = -6\log 3 = -6m$

e) $\log\left(\frac{1}{2,43}\right)^6 = 6\log\frac{1}{2,43} = 6(-\log 2,43) =$

$= 6\left(-\log\frac{243}{100}\right) = 6(-\log 243 + \log 100) =$

$= 6(-\log 3^5 + 2) = 6(-5\log 3 + 2) =$

$= 6(-5m + 2) = 12 - 30m$

f) $\log\frac{0,9}{7,29} = \log\frac{90}{729} = \log\frac{10}{81} = \log 10 - \log 81 =$

$= 1 - \log 3^4 = 1 - 4\log 3 = 1 - 4m$

g) $\log 0,3 = \log\frac{3}{10} = \log 3 - \log 10 = m - 1$

h) $\log 0,\widehat{3} = \log\frac{1}{3} = -\log 3 = -m$

i) $\log\frac{10}{81} = 1 - 4m$

20. *a)* Desenvolupa l'expressió següent aplicant logaritmes neperians als dos membres de la igualtat:

$$p = \frac{(a^2b^{-3}c)^{\frac{1}{3}}}{d^5m^{-2}}$$

***b)* Escriu sense logaritmes decimals:**

$$\log p = \frac{5}{2}(3\log a - 2\log b + \log c - 7\log d)$$

a) $\ln p = \ln\frac{(a^2b^{-3}c)^{\frac{1}{3}}}{d^5m^{-2}} = \ln(a^2b^{-3}c)^{\frac{1}{3}} - \ln(d^5m^{-2}) =$

$= \frac{1}{3}\ln(a^2b^{-3}c) - \ln(d^5m^{-2}) =$

$= \frac{1}{3}(\ln a^2 + \ln b^{-3} + \ln c) - (\ln d^5 + \ln m^{-2}) =$

$= \frac{1}{3}(2\ln a - 3\ln b + \ln c) - (5\ln d - 2\ln m) =$

$= \frac{2}{3}\ln a - \ln b + \frac{1}{3}\ln c - 5\ln d + 2\ln m$

b) $\log p = \frac{5}{2}(\log a^3 - \log b^2 + \log c - \log d^7) =$

$= \frac{5}{2}\log\frac{a^3c}{b^2d^7} = \log\left(\frac{a^3c}{b^2d^7}\right)^{\frac{5}{2}} \to p = \left(\frac{a^3c}{b^2d^7}\right)^{\frac{5}{2}}$

21. Expressa la relació que hi ha entre log 2 i ln 2.

$\log 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} \to \ln 2 = \ln 10 \cdot \log 2$

o $\ln 2 = \frac{\log 2}{\log e} \to \log 2 = \log e \cdot \ln 2$

22. Utilitza la calculadora per esbrinar $\log_{5,2}12,45$, $\log_{13}87$, $\log_{0,3}0,675$, $\ln\pi$, $\log e$.

$\log_{5,2}12,45 = \frac{\log 12,45}{\log 5,2} = \frac{1,095\,169\,4}{0,716\,003\,3} = 1,529\,559$

$\log_{13}87 = \frac{\log 87}{\log 13} = \frac{1,939\,519\,3}{1,113\,943\,4} = 1,741\,129\,2$

$\log_{0,3}0,675 = \frac{\log 0,675}{\log 0,3} = \frac{-0,170\,696\,2}{-0,522\,878\,7} = 0,326\,454\,7$

$\ln\pi = 1,144\,729\,9$

$\log e = 0,434\,294\,5$

23. Quina relació hi ha entre $\log_a b$ i $\log_b a$?

$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \to \log_a b \cdot \log_b a = 1$

24. Donats els nombres $\sqrt{21}$; $\frac{1}{3}$; 2; 0,2 i 12^3, ordena del més petit al més gran:

***a)* Els seus logaritmes en base 7.**

***b)* Els seus logaritmes en base $\frac{1}{3}$.**

a) $\log_7 0,2 < \log_7\frac{1}{3} < \log_7 2 < \log_7\sqrt{21} < \log_7 12^3$

b) $\log_{\frac{1}{3}}12^3 < \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{21} < \log_{\frac{1}{3}}2 < \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}}0,2$

25. Per què $\log_1 x$ no és una funció?

$\log_1 x = \frac{\log x}{\log 1} = \frac{\log x}{0} \notin \mathbb{R}$

26. Dues de les quatre expressions següents són equivalents. Indica quines són i demostra-ho.

***a)* $\ln(a \cdot b) + \ln(a \cdot c)$** ***b)* $\ln(a \cdot b) \cdot \ln(a \cdot c)$**

***c)* $\ln(a \cdot b + a \cdot c)$** ***d)* $\ln a + \ln(b + c)$**

$\ln(a \cdot b + a \cdot c) = \ln a + \ln(b + c)$, perquè:

$\ln(a \cdot b + a \cdot c) = \ln[a(b + c)] = \ln a + \ln(b + c)$

27. Determina la solució de les equacions logarítmiques següents:

***a)* $\log_2 x^2 - \log_2\left(x - \frac{3}{4}\right) = 2$**

***b)* $2[1 - \log(2x + 3)] = 4\log\sqrt{5x - 3}$**

***c)* $\frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$**

a) $\log_2 x^2 - \log_2\left(x - \frac{3}{4}\right) = 2$

$\log_2\frac{x^2}{x - \frac{3}{4}} = \log_2 4 \to \frac{x^2}{x - \frac{3}{4}} = 4 \to x^2 = 4x - 3 \to$

$\to x^2 - 4x + 3 = 0 \to x_1 = 3,\ x_2 = 1$

b) $2[1 - \log(2x+3)] = 4\log\sqrt{5x-3}$

$1 - \log(2x+3) = 2\log\sqrt{5x-3}$

$\log 10 - \log(2x+3) = 2\log\sqrt{5x-3}$

$\log\dfrac{10}{2x+3} = \log\left(\sqrt{5x-3}\right)^2$

$\dfrac{10}{2x+3} = 5x-3$

$10 = 10x^2 + 9x - 9$

$10x^2 + 9x - 19 = 0 \rightarrow x = 1$

c) $\dfrac{\log 2 + \log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2$

$\log 2 + \log(11-x^2) = 2\log(5-x)$

$\log[2(11-x^2)] = \log(5-x)^2$

$2(11-x^2) = (5-x)^2$

$22 - 2x^2 = 25 - 10x + x^2$

$3x^2 - 10x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{1}{3}$

28. Resol aquests sistemes:

a) $\left.\begin{array}{l}\log x + \log y = 2\\ x - y = 15\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}2\log y - 3\log x = 1\\ \log x + \log y = 3\end{array}\right\}$

Soluciona el sistema *b)* de dues maneres diferents.

a) $\left.\begin{array}{l}\log x + \log y = 2\\ x - y = 15\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\log(xy) = \log 100 \rightarrow xy = 100\\ x = 15 + y\end{array}\right\}$

$(15+y)y = 100 \rightarrow 15y + y^2 = 100 \rightarrow$

$y^2 + 15y - 100 = 0 \rightarrow y = 5$

$x = 15 + y = 15 + 5 = 20 \rightarrow x = 20$

b) $\left.\begin{array}{l}2\log y - 3\log x = 1\\ \log x + \log y = 3\end{array}\right\}$

b$_1$)
$$\begin{array}{rl} 2\log y - 3\log x & = 1\\ 3\log y + 3\log x & = 9\\ \hline 5\log y & = 10\end{array}$$

$\log y = 2 \rightarrow y = 100$

$\log x + \log y = 3 \rightarrow \log x = 3 - \log y = 3 - 2 = 1 \rightarrow$

$x = 10$

b$_2$) $\left.\begin{array}{l}2\log y - 3\log x = 1\\ \log x + \log y = 3\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\log\dfrac{y^2}{x^3} = \log 10\\ \log(xy) = \log 1000\end{array}\right\} \rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{x^3} = 10\\ xy = 1000\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{x^3} = 10\\ y = \dfrac{1000}{x}\end{array}\right\}$

$\dfrac{\left(\dfrac{1000}{x}\right)^2}{x^3} = 10 \rightarrow \dfrac{\dfrac{10^6}{x^2}}{x^3} = 10 \rightarrow \dfrac{10^6}{x^5} = 10 \rightarrow$

$x^5 = 10^5 \rightarrow x = 10$

$y = \dfrac{1000}{x} = \dfrac{1000}{10} = 100 \rightarrow y = 100$

29. Aplicant logaritmes, resol l'equació exponencial $5^{3x-1} = 17$.

$5^{3x-1} = 17 \rightarrow 3x - 1 = \log_5 17 \rightarrow 3x = \log_5 17 + 1$

$x = \dfrac{1}{3}(\log_5 17 + 1) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\log 17}{\log 5} + 1\right) =$

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1,230\,448\,9}{0,698\,97} + 1\right) = \dfrac{1}{3}(1,760\,374\,4 + 1) =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 2,760\,374\,4 = 0,920\,124\,8$

$x = 0,920\,124\,8$

30. En una entitat bancària es dipositen al 3 % d'interès compost anual 15 025 €. Quin és el benefici que s'obtindrà al cap de 5 anys? Repeteix el problema suposant que l'interès sigui continu. Compara'n els resultats obtinguts.

Interès compost: $C_t = C_0(1+r)^t$

$C_t = 15\,025 \cdot (1+0,03)^5 = 15\,025 \cdot 1,03^5 = 17\,418,09$ €

Benefici: 17 418,09 – 15 025 = 2 393,09 €

Interès continu: $C_t = C_0 e^{rt}$

$C_t = 15\,025 \cdot e^{0,03 \cdot 5} = 15\,025 \cdot e^{0,15} = 17\,456,56$ €

Benefici: 17 456,56 – 15 025 = 2 431,56 €

31. Després de ser utilitzades durant *x* anys, el percentatge de bateries d'automòbil que es mantenen en funcionament sense necessitat de ser carregades és donat per l'expressió: $f(x) = 100 \cdot 0,8^x$.

a) **Quin percentatge de bateries està en bon estat després de tres anys de funcionament?**

b) **Quin tant per cent es deteriora durant el tercer any?**

c) **Quants anys han de transcórrer per tal que es deteriorin el 75 % de les bateries?**

a) $f(3) = 100 \cdot 0,8^3 = 51,2$ %

b) $f(2) = 100 \cdot 0,8^2 = 64$ %

64 % - 51,2 % = 12,8 %

c) $25 = 100 \cdot 0,8^x$

$\log_{0,8} 0,25 = x$

$\dfrac{\log 0,25}{\log 0,8} = 6,27$ anys

32. El radi és un element radioactiu. Una mostra de radi es descompon per emissió de radiacions d'acord amb l'equació:

$$m = 10 \cdot e^{-4{,}36 \cdot 10^{-4} t}$$

on m és la massa de la mostra expressada en grams i t el temps expressat en anys.

a) Quina és la massa de radi que hi ha inicialment a la mostra?

b) Indica quants grams de radi hi haurà d'aquí a 1 000 anys.

a) Només cal substituir per $t = 0$:

$t = 0 \rightarrow m = 10 \cdot e^{-4{,}36 \cdot 10^{-4} \cdot 0} = 10 \cdot e^0 = 10 \rightarrow m = 10$ g

b) Substituïm per:

$t = 1\,000 = 10^3 \rightarrow m = 10 \cdot e^{-4{,}36 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3} = 10 \cdot e^{\frac{-4{,}36}{10}} = 10 \cdot e^{-0{,}436} =$

$= 6{,}466\,177 \rightarrow m = 6{,}466\,617\,7$ g

33. Invertim 4 500 € en una entitat bancària al 4,25 % d'interès continu. Calcula:

a) Els interessos que obtindrem d'aquí a 4 anys.

b) Els anys que han de passar per acumular 5 800 €.

a) $C_t = C_0 e^{rt} = 4\,500\ € \cdot e^{0{,}0425 \cdot 4} = 4\,500\ € \cdot e^{0{,}17} = 5\,333{,}87\ € \rightarrow$

$I = 5\,333{,}87\ € - 4\,500\ € = 833{,}87\ €$

b) $5\,800\ € = 4\,500\ € \cdot e^{0{,}0425t} \rightarrow e^{0{,}0425t} = \dfrac{5\,800\ €}{4\,500\ €} \rightarrow$

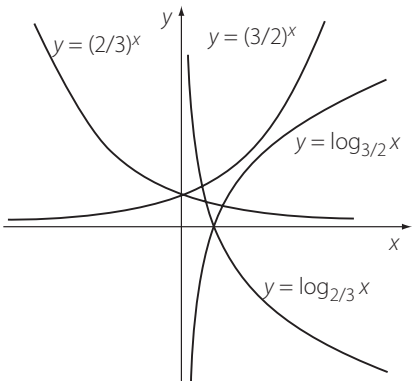
$e^{0{,}0425t} = 1{,}2\widehat{8} \rightarrow 0{,}0425t = \ln 1{,}2\widehat{8}$

$0{,}0425t = 0{,}25378 \rightarrow t = \dfrac{0{,}25378}{0{,}0425} = 5{,}9713 \rightarrow t = 6$ anys

Activitats finals

1. Dibuixa en uns mateixos eixos de coordenades les funcions exponencials $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ i les funcions logarítmiques $\log_{\frac{3}{2}} x$ i $\log_{\frac{2}{3}} x$.

$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$



x	$\left(\frac{3}{2}\right)^x$
0	1
1	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{9}{4}$
−1	$\frac{2}{3}$

A partir de la taula de valors, es dibuixa la gràfica de la funció $\left(\frac{3}{2}\right)^x$; a partir d'aquesta, per simetria amb l'eix OY, es dibuixa la de $\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Per dibuixar les logarítmiques, n'hi ha prou amb la simetria de les dues exponencials respecte de la recta $y = x$.

2. Es considera la funció exponencial $f(x) = a^x$. Demostra que si el punt (p, q) és un punt de la seva gràfica, també ho és el punt $\left(-p, \frac{1}{q}\right)$.

$f(x) = a^x$

Sabem que $f(p) = q$, per tant $a^p = q$

$f(-p) = a^{-p} = \dfrac{1}{a^p} = \dfrac{1}{q} \rightarrow \left(-p, \dfrac{1}{q}\right)$ també és de la gràfica.

3. Determina el punt en què la gràfica de cadascuna de les funcions següents talla l'eix de les ordenades:

a) $f(x) = 5e^x$ **b)** $h(x) = -3 + 2a^{-x}$

c) $g(x) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ **d)** $p(x) = 1 - 3^{2x}$

a) $f(0) = 5e^0 = 5 \rightarrow (0, 5)$

b) $h(0) = -3 + 2a^0 = -3 + 2 = -1 \rightarrow (0, -1)$

c) $g(0) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^{0+1} = -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \rightarrow \left(0, -\frac{2}{3}\right)$

d) $p(0) = 1 - 3^0 = 1 - 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$

4. Resol aquestes equacions:

a) $x^{-4} = 256$ **b)** $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$

c) $3^x \cdot 5^{x-1} = 10\,125$ **d)** $\sqrt{\sqrt{7} + 6\sqrt{7}} = 49^{\frac{x}{2}}$

e) $27x^3 = \frac{1}{125}$ **f)** $5^{4x} - 3 \cdot 5^{2x} - 10 = 0$

g) $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$ **h)** $(a^{x-3})^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-2x}$

i) $(2x)^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^4}$ **j)** $7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2\,793$

a) $x^{-4} = 256 \rightarrow x^{-4} = 4^4 \rightarrow x^{-4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-4} \rightarrow x = \frac{1}{4}$

b) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \rightarrow 3^{\frac{15}{16}} = 3^{x-1} \rightarrow$

$\frac{15}{16} = x - 1 \rightarrow x = \frac{31}{16}$

c) $3^x \cdot 5^{x-1} = 10\,125 \rightarrow \dfrac{3^x \cdot 5^x}{5} = 10\,125 \rightarrow$

$3^x \cdot 5^x = 10\,125 \cdot 5$

$3^x \cdot 5^x = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 5 \rightarrow 3^x \cdot 5^x = 3^4 \cdot 5^4 \rightarrow$

$15^x = 15^4 \rightarrow x = 4$

d) $\sqrt{\sqrt{7} + 6\sqrt{7}} = 49^{\frac{x}{2}} \rightarrow \sqrt{7\sqrt{7}} = 49^{\frac{x}{2}} \rightarrow$

$7^{\frac{3}{4}} = 7^x \rightarrow x = \frac{3}{4}$

e) $27x^3 = \dfrac{1}{125} \rightarrow x^3 = \dfrac{1}{27 \cdot 125} \rightarrow x^3 = \dfrac{1}{3^3 \cdot 5^3} \rightarrow$

$x^3 = \dfrac{1}{15^3} \rightarrow x^3 = \left(\dfrac{1}{15}\right)^3 \rightarrow x = \dfrac{1}{15}$

f) $5^{4x} - 3 \cdot 5^{2x} - 10 = 0 \rightarrow (5^{2x})^2 - 3 \cdot 5^{2x} - 10 = 0$

$t = 5^{2x}$, $t^2 - 3t - 10 = 0 \rightarrow t = 5$

$5^{2x} = 5 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

g) $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}} \to \frac{5^x}{5} = 2 + \frac{3 \cdot 5^2}{5^x}$

$(5^x)^2 = 10 \cdot 5^x + 375 \to (5^x)^2 - 10 \cdot 5^x - 375 = 0$

$t = 5^x,\ t^2 - 10t - 375 = 0 \to t = 25$

$5^x = 25 \to 5^x = 5^2 \to x = 2$

h) $(a^{x-3})^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-2x} \to a^{x^2-3x} = a^{2x} \to$

$x^2 - 3x = 2x \to x^2 - 5x = 0 \to x(x-5) = 0 \to$

$x_1 = 0,\ x_2 = 5$

i) $(2x)^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^4} \to (2x)^{-\frac{2}{5}} = e^{\frac{4}{5}} \to 2x = e^{\frac{4}{5}\left(-\frac{5}{2}\right)}$

$2x = e^{-2} \to 2x = \frac{1}{e^2} \to x = \frac{1}{2e^2}$

j) $7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2\,793 \to$

$7^x + 7 \cdot 7^x + 49 \cdot 7^x = 2\,793 \to$

$7^x(1 + 7 + 49) = 2\,793 \to 57 \cdot 7^x = 2\,793 \to$

$7^x = \frac{2\,793}{57} = 49 \to$

$7^x = 49 \to 7^x = 7^2 \to x = 2$

5. Demostra que si $f(x) = 3^{-x}$, aleshores $f(x+2) = \frac{f(x)}{9}$ i $f(x-3) = 27 \cdot f(x)$.

$f(x) = 3^{-x}$

$f(x+2) = 3^{-(x+2)} = 3^{-x-2} = \frac{3^{-x}}{3^2} = \frac{3^{-x}}{9} = \frac{f(x)}{9}$

$f(x-3) = 3^{-(x-3)} = 3^{-x+3} =$

$= 3^{-x} \cdot 3^3 = 27 \cdot 3^{-x} = 27 \cdot f(x)$

6. Hem rebut a casa una carta que ens augura bona sort si n'enviem una fotocòpia a cinc persones. En cas contrari, si trenquem la cadena, la sort se'ns girarà en contra. Quina funció expressa el nombre de persones que rebran la carta successivament, si la cadena no es trenca?

$5^0, 5^1, 5^2, \ldots, 5^x$

$f(x) = 5^x$

7. Determina el punt en què la gràfica de cadascuna d'aquestes funcions talla l'eix de les abscisses:

a) $f(x) = \log(x+3)$ ***b)*** $g(x) = \ln(2x-5)$

c) $h(x) = \log_3 \sqrt{3x}$ ***d)*** $p(x) = \log_5 \frac{5}{x}$

a) $f(x) = 0 \to \log(x+3) = 0 \to$

$x + 3 = 1 \to x = -2 \to (-2, 0)$

b) $g(x) = 0 \to \ln(2x-5) = 0 \to$

$2x - 5 = 1 \to 2x = 6 \to x = 3 \to (3, 0)$

c) $h(x) = 0 \to \log_3 \sqrt{3x} = 0 \to$

$\sqrt{3x} = 1 \to 3x = 1 \to x = \frac{1}{3} \to \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

d) $p(x) = 0 \to \log_5 \frac{5}{x} = 0 \to \frac{5}{x} = 1 \to x = 5 \to (5, 0)$

8. Calcula els logaritmes següents sense utilitzar la calculadora:

a) $\log_4 \frac{1}{16}$ ***b)*** $\log_5 \sqrt[3]{25}$

c) $\log_{\frac{1}{a}} a^{\sqrt{3}}$ ***d)*** $\log \frac{1}{\sqrt{10}}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ ***f)*** $\log_9 \frac{1}{3}$

g) $\log_{0,001} 0,1$

a) $\log_4 \frac{1}{16} = \log_4 \frac{1}{4^2} = \log_4 4^{-2} = -2$

b) $\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 \sqrt[3]{5^2} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

c) $\log_{\frac{1}{a}} a^{\sqrt{3}} = \log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a}\right)^{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

d) $\log \frac{1}{\sqrt{10}} = \log \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \log \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = \log 10^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

f) $\log_9 \frac{1}{3} = \log_9 \frac{1}{\sqrt{9}} = \log_9 \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \log_9 \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \log_9 9^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

g) $\log_{0,001} 0,1 = \log_{0,001} \sqrt[3]{0,001} = \log_{0,001} 0,001^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

9. Calcula:

a) $\log_a b \cdot \log_b a$ ***b)*** $\log_{\frac{1}{a}} a + \log_b \frac{1}{b}$

a) $\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log_b b}{\log_b a} \cdot \log_b a =$

$= \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b a = 1$

b) $\log_{\frac{1}{a}} a + \log_b \frac{1}{b} = \log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} + \log_b b^{-1} =$

$= -1 - 1 = -2$

10. Si $\log 2 = m$, expressa en funció de m:

a) $\log 1\,600$ ***b)*** $\log \sqrt[5]{0,000\,2}$

c) $\log \sqrt{0,006\,4}$ ***d)*** $\log \left(\frac{1}{1,28}\right)^{-3}$

e) $\log 12,5$ ***f)*** $\log 0,8^7$

a) $\log 1\,600 = \log(16 \cdot 100) = \log 16 + \log 100 =$

$= \log 2^4 + 2 = 4 \log 2 + 2 = 4m + 2$

b) $\log \sqrt[5]{0,000\,2} = \frac{1}{5}\log 0,000\,2 = \frac{1}{5}\log \frac{2}{10\,000} =$

$= \frac{1}{5}(\log 2 - \log 10\,000) = \frac{1}{5}(m-4)$

c) $\log \sqrt{0,006\,4} = \frac{1}{2}\log 0,006\,4 = \frac{1}{2}\log \frac{64}{10\,000} =$

$= \frac{1}{2}(\log 64 - \log 10\,000) = \frac{1}{2}(\log 2^6 - 4) =$

$= \frac{1}{2}(6\log 2 - 4) = \frac{1}{2}(6m-4) = 3m-2$

d) $\log\left(\frac{1}{1,28}\right)^{-3} = -3\log\frac{1}{1,28} = -3(-\log 1,28) =$

$= 3\log 1,28 = 3\log\frac{128}{100} = 3(\log 128 - \log 100) =$

$= 3(\log 2^7 - 2) = 3(7\log 2 - 2) = 3(7m-2) =$

$= 21m - 6$

e) $\log 12,5 = \log\frac{100}{8} = \log 100 - \log 8 =$

$= 2 - \log 2^3 = 2 - 3\log 2 = 2 - 3m$

f) $\log 0,8^7 = 7\log 0,8 = 7\log\frac{8}{10} =$

$= 7(\log 8 - \log 10) = 7(\log 2^3 - 1) =$

$= 7(3\log 2 - 1) = 7(3m-1) = 21m - 7$

11. Determina l'expressió de $\log x$ que correspon a cadascuna de les igualtats següents:

a) $x = \left(\frac{3a^2b}{c^3d}\right)^2$ ***b)*** $x = \sqrt[4]{\frac{a(b+c)}{d^5}}$

c) $x = \frac{a^3b^4c^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{2}{3}}n\sqrt{p}}$ ***d)*** $x = \frac{h}{mnpqr}$

a) $\log x = \log\left(\frac{3a^2b}{c^3d}\right)^2 = 2\log\frac{3a^2b}{c^3d} =$

$= 2[\log(3a^2b) - \log(c^3d)] =$

$= 2[\log 3 + \log a^2 + \log b - (\log c^3 + \log d)] =$

$= 2[\log 3 + 2\log a + \log b - (3\log c + \log d)] =$

$= 2\log 3 + 4\log a + 2\log b - 6\log c - 2\log d$

b) $\log x = \log\sqrt[4]{\frac{a(b+c)}{d^5}} = \frac{1}{4}\log\frac{a(b+c)}{d^5} =$

$= \frac{1}{4}\{\log[a(b+c)] - \log d^5\} =$

$= \frac{1}{4}[\log a + \log(b+c) - 5\log d] =$

$= \frac{1}{4}\log a + \frac{1}{4}\log(b+c) - \frac{5}{4}\log d$

c) $\log x = \log\frac{a^3b^4c^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{2}{3}}n\sqrt{p}} = \log\left(a^3b^4c^{\frac{1}{6}}\right) - \log\left(m^{\frac{2}{3}}n\sqrt{p}\right) =$

$= \log a^3 + \log b^4 + \log c^{\frac{1}{6}} - \left(\log m^{\frac{2}{3}} + \log n + \log\sqrt{p}\right) =$

$= 3\log a + 4\log b + \frac{1}{6}\log c - \left(\frac{2}{3}\log m + \log n + \frac{1}{2}\log p\right) =$

$= 3\log a + 4\log b + \frac{1}{6}\log c - \frac{2}{3}\log m - \log n - \frac{1}{2}\log p$

d) $\log x = \log\frac{h}{mnpqr} = \log h - \log(mnpqr) =$

$= \log h - (\log m + \log n + \log p + \log q + \log r) =$

$= \log h - \log m - \log n - \log p - \log q - \log r$

12. Estableix l'expressió de x corresponent a:

a) $\ln x = 3\ln a + 2\ln b - \frac{1}{2}\ln c$

b) $\log x = \frac{1}{5}(3\log a - 2\log b) - 7(\log c + 4\log d)$

c) $\log_4 x = 3\log_4 a + 2\log_4 b - \frac{\log_4 c + \log_4 d}{3}$

d) $\ln x = \frac{1}{2}(3\ln a + \ln b - \ln c - 5\ln d)$

a) $\ln x = \ln a^3 + \ln b^2 - \ln\sqrt{c} = \ln(a^3b^2) - \ln\sqrt{c} =$

$= \ln\frac{a^3b^2}{\sqrt{c}} \to x = \frac{a^3b^2}{\sqrt{c}}$

b) $\log x = \frac{1}{5}(\log a^3 - \log b^2) - 7(\log c + \log d^4) =$

$= \frac{1}{5}\log\frac{a^3}{b^2} - 7\log(cd^4) = \log\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}} - \log(cd^4)^7 =$

$= \log\frac{\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}}{(cd^4)^7} = \log\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{b^2}\,c^7d^{28}} \to x = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{b^2}\,c^7d^{28}}$

c) $\log_4 x = \log_4 a^3 + \log_4 b^2 - \frac{1}{3}(\log_4 c + \log_4 d) =$

$= \log_4(a^3b^2) - \frac{1}{3}\log_4(cd) =$

$= \log_4(a^3b^2) - \log_4\sqrt[3]{cd} = \log_4\frac{a^3b^2}{\sqrt[3]{cd}} \to x = \frac{a^3b^2}{\sqrt[3]{cd}}$

d) $\ln x = \frac{1}{2}(\ln a^3 + \ln b - \ln c - \ln d^5) =$

$= \frac{1}{2}[\ln a^3 + \ln b - (\ln c + \ln d^5)] =$

$= \frac{1}{2}[\ln(a^3b) - \ln(cd^5)] = \frac{1}{2}\ln\frac{a^3b}{cd^5} =$

$= \ln\sqrt{\frac{a^3b}{cd^5}} \to x = \sqrt{\frac{a^3b}{cd^5}}$

13. Calcula $\log_x\left(\log_x x^{\sqrt{x}}\right)$.

$\log_x\left(\log_x x^{\sqrt{x}}\right) = \log_x\sqrt{x} = \log_x x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

14. Tenim les quatre expressions següents:

$\log_a (p^2 - q^2)$

$2\log_a p - 2\log_a q$

$2\log_a (p - q)$

$\log_a (p + q) + \log_a (p - q)$

En totes es verifica que $p > q > 0$.

a) Demostra que dues d'aquestes expressions són equivalents.

b) Calcula el valor de la primera expressió per a $a = 2$, $p = 3$ i $q = 1$.

a) $\log_a (p^2 - q^2) = \log_a [(p - q)(p + q)] =$

$= \log_a (p - q) + \log_a (p + q)$

b) $\log_a (p^2 - q^2) = \log_2 (3^2 - 1) = \log_2 (9 - 1) =$

$= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

15. Resol aquestes equacions:

a) $2\log x - 4\log 2 = 3\log x$

b) $3\log_2 x - 2\log_2 \frac{x}{3} = 2\log_2 3 + 1$

c) $3\ln x - \ln 32 = \frac{\ln x}{2}$

d) $\ln 2 + \ln (11 - x^2) = 2\ln (5 - x)$

e) $\frac{10^{\log x}}{1 + 10^{2\log x}} = \frac{1}{2}$

f) $2\log x = 3 + \log \frac{x}{10}$

g) $7^{3x+2} = 140$

a) $\log \frac{x^2}{2^4} = \log x^3 \to \frac{x^2}{16} = x^3 \to x^2 = 16x^3 \to 16x^3 - x^2 = 0 \to$

$x^2 (16x - 1) = 0 \xrightarrow[x \neq 0]{} 16x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{16}$

b) $\log_2 \frac{x^3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \log_2 (3^2 \cdot 2) \to \frac{x^3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} = 18 \to \frac{x^3}{\frac{x^2}{9}} = 18$

$\frac{9x^3}{x^2} = 18 \xrightarrow[x \neq 0]{} 9x = 18 \to x = 2$

c) $\ln \frac{x^3}{32} = \ln \sqrt{x} \to \frac{x^3}{32} = \sqrt{x} \to \frac{x^3}{\sqrt{x}} = 32 \to x^{\frac{5}{2}} = 32$

$x = 32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4 \to x = 4$

d) $\ln [2(11 - x^2)] = \ln (5 - x)^2 \to 2(11 - x^2) =$

$= (5 - x)^2 \to 22 - 2x^2 = 25 - 10x + x^2 \to$

$3x^2 - 10x + 3 = 0 \to x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$

e) $\frac{x}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \to 2x = 1 + x^2 \to x^2 - 2x + 1 = 0 \to x = 1$

f) $\log x^2 = \log \left(1\,000 \cdot \frac{x}{10}\right) \to x^2 = 1\,000 \cdot \frac{x}{10} \to x^2 = 100x$

$x^2 - 100x = 0 \to x(x - 100) = 0 \xrightarrow[x \neq 0]{} x - 100 = 0 \to$

$x = 100$

g) $3x + 2 = \log_7 140 \to 3x = \log_7 140 - 2 \to$

$x = \frac{1}{3}(\log_7 140 - 2) =$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{\log 140}{\log 7} - 2\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2{,}146128}{0{,}845098} - 2\right) =$

$= \frac{1}{3} \cdot (2{,}5395018 - 2) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5395018 =$

$= 0{,}1798339 \to x = 0{,}1798339$

16. Calcula x en cadascuna de les igualtats següents:

a) $\log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{2}$ **b)** $\log_x 2x = 2$ **c)** $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2}$

d) $\log_x \sqrt{2} = 3$ **e)** $\log_x \frac{1}{2\sqrt{2}} = -3$ **f)** $\log_4 x = \frac{3}{2}$

a) $\log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \to \sqrt{x} = 3^{\frac{1}{2}} \to x^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \to x = 3$

b) $\log_x 2x = 2 \to x^2 = 2x \to x^2 - 2x = 0 \to$

$x(x - 2) = 0 \xrightarrow[x \neq 0]{} x - 2 = 0 \to x = 2$

c) $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2} \to x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \to x = \sqrt{3}$

d) $\log_x \sqrt{2} = 3 \to x^3 = \sqrt{2} \to x^3 = 2^{\frac{1}{2}} \to$

$x = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2} \to x = \sqrt[6]{2}$

e) $\log_x \frac{1}{2\sqrt{2}} = -3 \to x^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \to$

$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} \to \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \to x = \sqrt{2}$

f) $\log_4 x = \frac{3}{2} \to x = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8 \to x = 8$

17. Determina el valor de a per tal que quan incrementem en tres unitats el logaritme de base a de 6, obtinguem el logaritme de base a de 48.

$\log_a 6 + 3 = \log_a 48 \to \log_a 6 + \log_a a^3 = \log_a 48$

$\log_a (6 \cdot a^3) = \log_a 48 \to 6a^3 = 48 \to a^3 = 8 \to a = 2$

18. Al país dels nombres es poden sentir converses molt estranyes. Fixa't en aquesta i intenta identificar-ne els dos personatges.

***y:* Sóc el teu logaritme decimal.**

***x:* Ep! Sóc deu vegades més gran que tu.**

$x = 10, \; y = 1$

19. Resol els sistemes d'equacions següents:

a) $\left.\begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} \log x - \log y = 1 \\ 3x + 5y = 35 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} \log x + 3\log y = 5 \\ \log \frac{x^2}{y} = 3 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} 2\log y - 3\log x = 1 \\ \log(xy) = 3 \end{array}\right\}$ *f)* $\left.\begin{array}{l} \log_x(y-18) = 2 \\ \log_y(x+3) = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$

a) $4\log x = 5 \to \log x = \frac{5}{4} \to x = 10^{\frac{5}{4}}$

$-4\log y = -7 \to \log y = \frac{7}{4} \to y = 10^{\frac{7}{4}}$

b) $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{y} = 10 \\ 3x + 5y = 35 \end{array}\right\} \to x = 10,\ y = 1$

c) $7\log x = 14 \to \log x = 2 \to x = 100$

$-7\log y = -7 \to \log y = 1 \to y = 10$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 11 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{array}\right\} \to x = \frac{10}{3},\ y = \frac{1}{3}$

e) $-5\log x = -5 \to \log x = 1 \to x = 10$

$5\log y = 10 \to \log y = 2 \to y = 100$

f) $\left.\begin{array}{l} x^2 = y - 18 \\ \sqrt{y} = x + 3 \end{array}\right\} \to x = \frac{3}{2},\ y = \frac{81}{4}$

20. Sabent que ln 5 = *a* i ln 7 = *b*, expressa en funció de *a* i *b*:

a) **ln 35** ***b)*** **ln 1,4** ***c)*** **$\ln\frac{125}{49}$** ***d)*** **$\ln(175e)^3$**

e) **$\ln\sqrt{9{,}8}$** ***f)*** **$\log_5 7$** ***g)*** **$\ln\sqrt[3]{35^2}$** ***h)*** **$\log_7 5$**

a) $\ln 35 = \ln(5\cdot 7) = \ln 5 + \ln 7 = a + b$

b) $\ln 1{,}4 = \ln\frac{7}{5} = \ln 7 - \ln 5 = b - a$

c) $\ln\frac{125}{49} = \ln 125 - \ln 49 = \ln 5^3 = \ln 7^2 = 3\ln 5 - 2\ln 7 = 3a - 2b$

d) $\ln(175e)^3 = 3\ln(25\cdot 7\cdot e) = 3(\ln 5^2 + \ln 7 + 1) =$

$= 3(2\ln 5 + \ln 7 + 1) = 6a + 3b + 3$

e) $\ln\sqrt{9{,}8} = \frac{1}{2}\ln\frac{49}{5} = \frac{1}{2}(\ln 49 - \ln 5) = \frac{1}{2}(\ln 7^2 - \ln 5) =$

$= \frac{1}{2}(2\ln 7 - \ln 5) = b - \frac{a}{2}$

f) $\log_5 7 = \frac{\ln 7}{\ln 5} = \frac{b}{a}$

g) $\ln\sqrt[3]{35^2} = \frac{2}{3}\ln(5\cdot 7) = \frac{2}{3}(\ln 5 + \ln 7) = \frac{2}{3}(a + b)$

h) $\log_7 5 = \frac{\ln 5}{\ln 7} = \frac{a}{b}$

21. El pare de l'Albert i el Jordi és matemàtic. Quan li pregunten les edats dels fills, respon: «La potència de base 2 i exponent l'edat del Jordi és igual a la potència de base 8 i exponent 5 menys l'edat de l'Albert. D'altra banda, el logaritme de base l'edat de l'Albert de 64 és igual a l'edat del Jordi». Quina és l'edat de cadascun dels dos nois?

x: edat de l'Albert, *y:* edat del Jordi; *x*, *y* naturals.

$\left.\begin{array}{l} 2^y = 8^{5-x} \\ \log_x 64 = y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 2^y = (2^3)^{5-x} \\ x^y = 64 \end{array}\right\} \to$

$\left.\begin{array}{l} 2^y = 2^{15-3x} \\ x^y = 64 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = 15 - 3x \\ x^y = 64 \end{array}\right\} \to$

$x = 4$ anys, $y = 3$ anys

22. La taxa de despoblació d'una ciutat és del 5 % anual.

a) **Suposant que aquesta taxa no es modifica, quants anys hauran de transcórrer perquè la població actual es redueixi a la meitat?**

b) **Si actualment aquesta ciutat té 100 000 habitants, quants en tindrà d'aquí a set anys?**

a) $h = h_0(1-r)^t \to \frac{1}{2}h_0 = h_0 \cdot 0{,}95^t \to 0{,}5 = 0{,}95^t \to$

$t = \log_{0{,}95} 0{,}5 = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}95} = \frac{-0{,}301\,03}{-0{,}022\,276\,3} = 13{,}513\,407 \to$

$t = 13{,}5$ anys

b) $H = H_0(1-r)^t = 100\,000(1-0{,}05)^7 =$

$= 100\,000 \cdot 0{,}95^7 = 69\,834$ habitants

23. Escriu l'enunciat d'un problema relatiu a diners o població, de manera que la seva resolució condueixi a l'equació:

$$150\,000 \cdot 1{,}08^x = 200\,000$$

a) **Situa, raonadament, entre dos nombres enters consecutius el valor de *x* que és la solució de l'equació.**

b) **Aïlla *x*, utilitzant el tipus de funció matemàtica que consideris adient.**

c) **Calcula el valor de *x*.**

Resposta oberta. Per exemple:

«Quants anys hauran de passar perquè un capital de 150 000 € al 8 % anual es converteixi en 200 000 €?»

a) $150\,000 \cdot 1{,}08^x = 200\,000 \to 1{,}08^x = \frac{200\,000}{150\,000} = 1{,}\widehat{3}$

$1{,}08^x = 1{,}\widehat{3};\ 1{,}08^3 = 1{,}259712;$

$1{,}08^4 = 1{,}360489;\ 3 < x < 4$

b) $1{,}08^x = 1{,}\widehat{3} \to x = \log_{1{,}08} 1{,}\widehat{3}$

c) $x = \log_{1{,}08} 1{,}\widehat{3} = \frac{\log 1{,}\widehat{3}}{\log 1{,}08} = \frac{0{,}124\,938\,7}{0{,}033\,423\,7} = 3{,}738\,022\,1$

24. La població d'un estat, en milions d'habitants, és donada per l'expressió:

$$f(x) = \frac{20}{4e^{-\frac{x}{100}} + 1}$$

on *x* és el temps expressat en anys. Quina és la població actual?

4 milions d'habitants

25. Es fa un estudi psicològic amb nens i nenes de sis anys. Aquest estudi consisteix a mostrar-los, durant un temps de *x* minuts, un conjunt d'objectes *y*. Després de retirar-los, se'ls demana que els identifiquin dins un conjunt d'objectes molt més ampli. Els resultats obtinguts s'ajusten a l'expressió:

$$f(x) = 15\,(1 - e^{-0,2x})$$

en què $f(x)$ és el nombre d'objectes identificats per cada nen o nena després de ser observats durant *x* minuts.

***a*) Quants objectes pot recordar cada nen o nena després de cinc minuts d'observació?**

***b*) I al cap d'una hora i quaranta minuts?**

***c*) I al cap de setze hores i mitja d'observació ininterrompuda?**

***d*) A partir dels resultats obtinguts, quines conclusions pots extreure'n?**

a) $f(5) = 15\,(1 - e^{-0,2\cdot 5}) = 15\,(1 - e^{-1}) =$

$= 15 \cdot 0,632\,120\,5 = 9,481\,808\,4 \simeq 9$ objectes

b) $f(100) = 15\,(1 - e^{-0,2\cdot 100}) = 15\,(1 - e^{-20}) \simeq 15$ objectes

c) $f(990) = 15\,(1 - e^{-0,2\cdot 990}) = 15\,(1 - e^{-198}) \simeq 15$ objectes

d) $f(10) \simeq 13$ objectes, $f(20) \simeq 15$ objectes

A partir de 20 minuts d'observació, el nombre d'objectes que pot memoritzar és, com a màxim, 15.

26. Una empresa considera que la seva evolució econòmica s'ajustarà a la funció:

$$f(x) = \ln(x + 1) - (x - 2)$$

en què *x* representa el nombre d'anys que han passat des de la seva fundació i $f(x)$, els beneficis o pèrdues de l'empresa en milers d'euros.

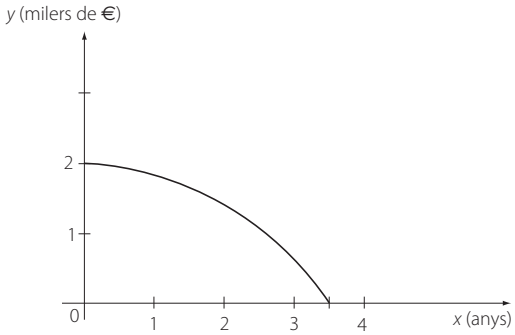
***a*) Quina és la situació econòmica de l'empresa al moment de la seva fundació?**

***b*) Dibuixa un gràfic aproximat de la funció per saber si d'aquí a deu anys l'empresa tindrà beneficis o pèrdues.**

***c*) Seria aconsellable comprar accions d'aquesta empresa? Per què?**

a) $f(0) = \ln(0 + 1) - (0 - 2) = \ln 1 - (-2) = 2$ milers d'euros.

b)



c) No, perquè al llarg del temps, l'evolució econòmica de l'empresa és negativa.

27. Es dipositen 10 000 € en una entitat bancària al 2,5 % d'interès compost anual. Escriu l'expressió algèbrica de la funció $c(t)$, que dóna el capital acumulat en funció del temps expressat en anys. Després calcula:

***a*) El capital acumulat al cap de 10 anys.**

***b*) Els anys que han de passar per obtenir un benefici de 6 000 €.**

a) Primer de tot cal determinar l'expressió de la funció:

$c(t) = 10\,000 \cdot 1,025^t =$

$= c(10) = 10\,000 \cdot 1,025^{10} = 10\,000 \cdot 1,280\,085 =$

$= 12\,800,85 \rightarrow c = 12\,800,85$ €

b) $16\,000 = 10\,000 \cdot 1,025^t \rightarrow 1,025^t = 1,6 \rightarrow$

$t = \log_{1,025} 1,6 = 19,0342 \rightarrow t = 19$ anys

28. El nivell d'intensitat del so es mesura en decibels segons l'expressió:

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0}, \text{ on } I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$$

és la intensitat del so anomenada *llindar d'audició* i I és la intensitat del so de la qual volem determinar el nivell. Calcula:

***a*) Els decibels (dB) que corresponen a la intensitat del llindar d'audició.**

***b*) El nivell d'intensitat del so que produeix un reactor de $I = 8 \cdot 10^2$ W/m².**

***c*) La intensitat del so que es coneix com a llindar de dolor, si hi corresponen 120 dB.**

a) $I = I_0 \rightarrow D = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log 1 = 0 \rightarrow D = 0$ dB

b) $D = 10 \log \frac{8 \cdot 10^2}{10^{-12}} = 10 \log(8 \cdot 10^{14}) = 10\ (\log 8 + 14) =$

$= 10\ (0,9031 + 14) = 10 \cdot 14,9031 = 149,031 \rightarrow$

$D = 149,031$ dB

c) $120 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow 12 = \log(I \cdot 10^{12}) \rightarrow \log I + 12 = 12 \rightarrow$

$\log I = 0 \rightarrow I = 1$ W/m²

Unitat 6. Matemàtica financera

Activitats

1. S'ingressen 6 300 € al 3,4 % anual d'interès simple durant 48 mesos.

a) Quins interessos produiran?

b) Quin és el valor del capital final?

48 mesos = 4 anys

a) $I = C_0 it = 6\,300 \cdot 0{,}034 \cdot 4 = 856{,}80$ €

b) $C_t = C_0 + I = 6\,300 + 856{,}80 = 7\,156{,}80$ €

2. Calcula el temps durant el qual s'han invertit 12 500 € a una taxa d'interès simple anual del 4,5 %, si el capital final generat ha estat de 14 187 €.

$$C_t = C_0 + C_0\, i\, t \rightarrow t = \frac{C_t - C_0}{C_0 i} = \frac{14\,187 - 12\,500}{12\,500 \cdot 0{,}045} = 3 \text{ anys}$$

3. El Banc de Gandesa t'assegura uns interessos de 780 € si obres una llibreta a termini amb 24 000 €, des del 15 de juny fins a final d'any. Quina és la taxa d'interès anual pactada si l'operació s'efectua a interès simple?

$$I = C_0\, i\, t \rightarrow i = \frac{I}{C_0 t} = \frac{780}{24\,000 \cdot \frac{6{,}5}{12}} = 0{,}06 \rightarrow 6\,\%$$

4. Calcula el temps que triga a duplicar-se un capital dipositat al 5 % d'interès simple anual.

$$C_t = C_0 + I = 2C_0 \rightarrow I = C_0 \rightarrow C_0 it = C_0 \rightarrow$$

$$i\, t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{i} = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ anys}$$

5. Esbrina els interessos generats per 9 000 € invertits:

a) Al 5,4 % anual durant 5 mesos.

b) Al 2,4 % semestral durant 3 anys.

c) A l'1,2 % trimestral durant 150 dies.

Totes tres operacions s'efectuen a interès simple.

a) $I = C_0\, i\, t = 9\,000 \cdot 0{,}054 \cdot \frac{5}{12} = 202{,}5$ €

b) $I = 9\,000 \cdot 0{,}024 \cdot 6 = 1\,296$ €

c) $I = 9\,000 \cdot 0{,}012 \cdot \frac{5}{3} = 180$ €

6. A interès simple, quants diners has d'invertir al 4 % anual perquè en 45 dies produeixin uns interessos de 4,5 €?

$$I = C_0\, i\, t \rightarrow C_0 = \frac{I}{it} = \frac{4{,}5}{0{,}04 \cdot \frac{45}{360}} = 900 \text{ €}$$

7. Una lletra de canvi de 1 250 € es descompta al 8 % 60 dies abans del seu venciment. Calcula'n el descompte i l'efectiu.

$$D = N\, i\, t = 1\,250 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{60}{360} = 16{,}67 \text{ €}$$

$$E = N - D = 1\,250 - 16{,}67 = 1\,233{,}33 \text{ €}$$

8. Per una lletra de canvi de 7 500 € amb venciment al cap de 30 dies s'abonen 7 425 €. Quina taxa d'interès s'ha cobrat?

D = 7 500 – 7 425 = 75 €

$$D = Nit \rightarrow i = \frac{D}{Nt} = \frac{75}{7\,500 \cdot \frac{30}{360}} = 0{,}12 \rightarrow 12\% \text{ anual}$$

9. Si ingresses 900 € en una llibreta d'estalvi al 5 % d'interès compost anual.

a) Quin és el capital que hi haurà acumulat al cap de 5 anys?

b) Quant de temps hauran d'estar ingressats aquests 900 € en aquestes mateixes condicions perquè el capital final superi els 1 466 €?

a) $C_t = C_0(1+i)^t \rightarrow C_5 = 900(1+0{,}05)^5 = 1\,148{,}65$ €

b) $$t = \frac{\log \frac{C_t}{C_0}}{\log(1+i)} = \frac{\log \frac{1\,466}{900}}{\log 1{,}05} = 10 \text{ anys}$$

Hauran d'estar ingressats més de 10 anys.

10. A interès compost, quant de temps triga a duplicar-se un capital que s'inverteix al 5 % anual?

Compara el resultat amb el que has obtingut en resoldre l'activitat 4 i justifica'n les diferències.

$$C_t = 2C_0 \rightarrow 2C_0 = C_0(1+i)^t \rightarrow$$

$$2 = (1+i)^t \rightarrow 2 = 1{,}05^t \rightarrow$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14{,}21 \text{ anys} \simeq 14 \text{ anys, 2 mesos i 14 dies.}$$

A interès compost es necessita menys temps per assolir el mateix capital final que genera una operació a interès simple.

11. Indica quin capital has d'invertir a interès compost amb una taxa d'interès anual del 4,3 % perquè després de 8 anys es converteixi en una quantitat final de 1 750,59 €?

$$C_t = C_0(1+i)^t \rightarrow C_0 = \frac{C_t}{(1+i)^t} = \frac{1\,750{,}59}{1{,}043^8} = 1\,250 \text{ €}$$

12. A quina taxa d'interès compost anual s'han d'invertir 6 500 € perquè en 6 anys produeixin uns interessos de 1 630,13 €?

$$C_6 = C_0 + I = 8\,130{,}13 \text{ €}$$

$$C_6 = C_0(1+i)^6 \rightarrow i = \sqrt[6]{\frac{C_6}{C_0}} - 1 =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{8\,130{,}13}{6\,500}} - 1 = 0{,}038 \rightarrow 3{,}8\,\%$$

13. Ingresses 1 800 € al 5 % d'interès compost anual durant 8 anys. Quina quantitat hauries hagut d'invertir a interès simple per tal d'obtenir-ne el mateix interès en el mateix temps?

$C_8 = C_0(1+i)^8 = 1\,800 \cdot 1{,}05^8 = 2\,659{,}42$ €

$I = C_8 - C_0 = 859{,}42$ €

A interès simple:

$I = C_0' i\, t \rightarrow C_0' = \dfrac{I}{i\, t} = \dfrac{859{,}42}{0{,}05 \cdot 8} = 2\,148{,}55$ €

14. Un producte de neteja costa avui 6,5 €. Quin serà el preu d'aquest producte d'aquí a 5 anys, suposant que cada any s'incrementi un 2,5 %?

Representem per P_0 el preu actual de l'article.

$P_5 = P_0(1+i)^5 \rightarrow P_5 = 6{,}5 \cdot 1{,}025^5 = 7{,}35$ €

15. Calcula la taxa d'interès semestral que equival a una taxa d'interès anual del 12 %. Considera les dues possibilitats:

a) **A interès simple.**

b) **A interès compost.**

a) $i_f = \dfrac{i}{f} = \dfrac{0{,}12}{2} = 0{,}06 \rightarrow 6\,\%$

b) $i_f = \sqrt[f]{1+i} - 1 = \sqrt{1{,}12} - 1 = 0{,}0583 \rightarrow 5{,}83\,\%$

16. Calcula la taxa d'interès quadrimestral equivalent a un 2,4 % trimestral:

a) **A interès simple.**

b) **A interès compost.**

a) A interès simple:

$i_4 = \dfrac{i}{4} \rightarrow i = 4 \cdot i_4 = 4 \cdot 0{,}024 = 0{,}096$

$i_3 = \dfrac{i}{3} = \dfrac{0{,}096}{3} = 0{,}032 \rightarrow 3{,}2\,\%$

b) A interès compost:

$i = (1+i_f)^f - 1 \rightarrow i = (1+i_4)^4 - 1 =$

$= 1{,}024^4 - 1 = 0{,}0995$

$i_3 = \sqrt[3]{1+i} - 1 = \sqrt[3]{1{,}0995} - 1 = 0{,}0321 \rightarrow 3{,}21\,\%$

17. Un compte d'estalvi produeix un 4,28 % d'interès anual. Fins ara el banc abonava els interessos a final d'any, però ara es voldrien cobrar trimestralment.

Quina és la taxa d'interès trimestral equivalent que ha de pagar el banc?

$i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1 = \sqrt[4]{1{,}0428} - 1 = 0{,}0105 \rightarrow 1{,}05\,\%$

18. Calcula la taxa anual equivalent a un 0,5 % mensual:

a) **A interès compost.**

b) **A interès simple.**

a) A interès compost:

$i = (1+i_{12})^{12} - 1 = 1{,}005^{12} - 1 = 0{,}0617 \rightarrow 6{,}17\,\%$

b) A interès simple:

$i = i_f\, f = 0{,}005 \cdot 12 = 0{,}06 \rightarrow 6\,\%$

19. Calcula els interessos que produeixen 750 € que s'inverteixen al 3,6 % anual durant 6 anys i que es capitalitzen semestralment.

$C_t = C_0\left(1+\dfrac{i}{f}\right)^{ft} \rightarrow C_6 = 750\left(1+\dfrac{0{,}036}{2}\right)^{2\cdot 6} =$

$= 750 \cdot 1{,}018^{12} = 929{,}04$ €

$I = C_t - C_0 = C_6 - C_0 = 929{,}04 - 750 = 179{,}04$ €

20. Ingresses 5 000 € en una llibreta a termini durant 4 anys amb una capitalització mensual. Si es transformen en 6 056,03 €, quina és la taxa d'interès anual de l'operació?

$C_4 = C_0\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{48} \rightarrow \dfrac{C_4}{C_0} = \left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{48} \rightarrow$

$\dfrac{i}{12} = \sqrt[48]{\dfrac{C_4}{C_0}} - 1 \rightarrow i = 12\left(\sqrt[48]{\dfrac{C_4}{C_0}} - 1\right) =$

$= 12\left(\sqrt[48]{\dfrac{6\,056{,}03}{5\,000}} - 1\right) = 12 \cdot 0{,}004 = 0{,}048 \rightarrow i = 4{,}8\,\%$

21. Un client inverteix 600 € a un 6 % d'interès anual, amb un període de capitalització quadrimestral, i obté uns interessos de 117,06 €. Determina el temps del procés.

$C_t = C_0 + I = 600 + 117{,}06 = 717{,}06$ €

$C_t = C_0\left(1+\dfrac{i}{f}\right)^{ft} \rightarrow C_t = C_0\left(1+\dfrac{0{,}06}{3}\right)^{3t} =$

$= C_0 \cdot 1{,}02^{3t} \rightarrow \dfrac{C_t}{C_0} = 1{,}02^{3t} \rightarrow$

$t = \dfrac{\log \dfrac{C_t}{C_0}}{3 \log 1{,}02} = \dfrac{\log \dfrac{717{,}06}{600}}{3 \log 1{,}02} = 3$ anys

22. Quin és el capital que s'ha d'invertir durant 5 anys al 4,2 % anual, convertible trimestralment, perquè produeixi un total de 4 621,23 €?

$C_5 = C_0\left(1+\dfrac{0{,}042}{4}\right)^{20} \rightarrow C_0 = \dfrac{C_5}{1{,}0105^{20}} =$

$= \dfrac{4\,621{,}23}{1{,}0105^{20}} = 3\,750$ €

23. Quins interessos generen 540 € invertits al 2,4 % anual durant 5 anys amb capitalització mensual?

$C_5 = C_0\left(1+\dfrac{0{,}024}{12}\right)^{60} = 540 \cdot 1{,}002^{60} = 608{,}78$ €

$I = C_5 - C_0 = 608{,}78 - 540 = 68{,}78$ €

24. Determina els interessos que produeixen en un any 1 000 € col·locats al 6 % anual amb els períodes de capitalització següents: anual, semestral, quadrimestral, trimestral i mensual.

Expressa els resultats obtinguts en forma de taula (Taula 6.4) i extreu-ne conclusions.

Període de capitalització	Capital al cap d'un any (€)	Interessos en un any (€)
Anual	1 060	60
Semestral	1 060,90	60,90
Quadrimestral	1 061,21	61,21
Trimestral	1 061,36	61,36
Mensual	1 061,68	61,68

$$C_1 = C_0\left(1+\frac{i}{f}\right)^f \qquad I = C_1 - C_0$$

En augmentar la freqüència de capitalització, augmenten els interessos generats per un mateix capital invertit a un mateix rèdit anual.

25. Calcula la TAE de les taxes nominals següents:

a) 7 % amb període de conversió mensual.

b) 6,3 % amb període de conversió semestral.

c) 7,2 % amb període de conversió quadrimestral.

a) $\text{TAE} = \left(1+\frac{i}{f}\right)^f - 1 = \left(1+\frac{0{,}07}{12}\right)^{12} - 1 =$

$= 0{,}0723 \rightarrow 7{,}23\,\%$

b) $\text{TAE} = \left(1+\frac{0{,}063}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}0640 \rightarrow 6{,}40\,\%$

c) $\text{TAE} = \left(1+\frac{0{,}072}{3}\right)^3 - 1 = 0{,}0737 \rightarrow 7{,}37\,\%$

26. Una entitat bancària ofereix un producte financer que inclou una TAE del 5,46 %. Digues quina és la taxa d'interès nominal si la capitalització que s'efectua és trimestral.

$$0{,}0546 = \left(1+\frac{i}{4}\right)^4 - 1 \rightarrow \sqrt[4]{1{,}0546} = 1 + \frac{i}{4} \rightarrow$$

$$i = 4\left(\sqrt[4]{1{,}0546} - 1\right) = 0{,}0535 \rightarrow 5{,}35\,\%$$

27. Un banc ofereix dues possibilitats als clients per cobrar els interessos. La primera opció estableix un 2,4 % anual amb capitalització mensual i la segona, un 2,5 % anual amb abonament semestral dels interessos. Quina de les dues opcions creus que és més avantatjosa per als clients? Justifica la teva resposta.

Primera opció:

$$\text{TAE} = \left(1+\frac{0{,}024}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}0243 \rightarrow 2{,}43\,\%$$

Segona opció:

$$\text{TAE} = \left(1+\frac{0{,}025}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}0252 \rightarrow 2{,}52\,\%$$

És més avantatjosa la segona opció.

28. Dedueix l'expressió que permet fer el càlcul general de la TAE, a partir de la definició de taxes d'interès equivalents.

Taxa d'interès anual i amb freqüència de capitalització f durant 1 any. Si suposem que s'inverteix un capital C_0, s'ha de verificar:

$$C_0(1+\text{TAE}) = C_0\left(1+\frac{i}{f}\right)^f$$

Per tant, $(1+\text{TAE}) = \left(1+\frac{i}{f}\right)^f \rightarrow \text{TAE} = \left(1+\frac{i}{f}\right)^f - 1$

29. L'Elvira contracta un pla de pensions. El dia 1 de gener de cada any ingressa en una caixa d'estalvis 3 600 € al 4,5 % d'interès anual. Quin capital haurà acumulat quan es jubili si ara té 30 anys? Fixem l'edat de jubilació a 65 anys.

Ingressarà l'anualitat durant 35 anys.

$$C = A(1+i)\frac{(1+i)^t - 1}{i} =$$

$$= 3\,600 \cdot 1{,}045 \cdot \frac{1{,}045^{35} - 1}{0{,}045} = 306\,590{,}28\ €$$

30. Una persona és molt aficionada a la loteria i s'hi gasta 250 € cada any. Al cap de 15 anys d'intentar-ho, obté un premi de 4 500 €. Té motius per estar contenta si el banc que té més a prop de casa seva ofereix un interès del 4 % a les llibretes d'estalvi?

Si hagués ingressat els diners que va gastar en la loteria al banc, hauria acumulat un capital de:

$$C = 250 \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04} = 5\,206{,}13\ €$$

Per tant, no té motius per estar contenta, ja que aquest capital supera el premi que ha obtingut gràcies a la loteria.

31. Durant quants anys cal ingressar al principi de cada any una quantitat de 2 750 € al 5,4 % anual per acumular un capital de 37 144,94 €?

$$C = A(1+i)\frac{(1+i)^t - 1}{i} \rightarrow \frac{C \cdot i}{A(1+i)} + 1 = (1+i)^t \rightarrow$$

$$\frac{37\,144{,}94 \cdot 0{,}054}{2\,750 \cdot 1{,}054} + 1 = 1{,}054^t \rightarrow$$

$$1{,}69202 = 1{,}054^t \rightarrow$$

$$t = \frac{\log 1{,}69202}{\log 1{,}054} = 10 \text{ anys}$$

Cal fer l'ingrés durant un període de 10 anys.

32. En Ramon va néixer l'1 de gener de 1999. Els seus pares li van obrir una llibreta d'estalvi amb 250 € i van decidir ingressar-hi aquesta mateixa quantitat al principi de cada any, fins que fos major d'edat. De quin capital podrà disposar en Ramon quan compleixi 18 anys, si l'operació es va pactar al 6 % anual?

$$C = 250 \cdot 1{,}06\,\frac{1{,}06^{18} - 1}{0{,}06} = 8\,190\ €$$

En Ramon podrà disposar de 8 190 € quan arribi a la majoria d'edat.

33. D'aquí a 4 anys, l'Eulàlia té la intenció de comprar un cotxe el preu del qual no superi els 27 500 €. Quina quantitat haurà d'ingressar com a màxim al principi de cada trimestre en una llibreta d'estalvi que ofereix un 4,8 % anual?

$$C = A\left(1+\frac{i}{f}\right)\frac{\left(1+\frac{i}{f}\right)^{ft}-1}{\frac{i}{f}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 27\,500 = A\left(1+\frac{0,048}{4}\right)\frac{\left(1+\frac{0,048}{4}\right)^{16}-1}{\frac{0,048}{4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 27\,500 = A\,1,012\frac{1,012^{16}-1}{0,012} \rightarrow A = 1\,550,68 \text{ €}$$

L'Eulàlia haurà d'ingressar al principi de cada trimestre un màxim de 1 550,68 €.

34. Una esportista professional pretén retirar-se d'aquí a 8 anys. Guanya força diners, però és previsora i quan deixi l'esport té la intenció de muntar un negoci que li suposaria una descapitalització important, concretament, de 500 000 €. Quina quantitat ha d'ingressar anualment en una entitat bancària que li ofereixi un 5 % anual per poder acumular aquesta quantitat de diners quan hagi arribat el moment de retirar-los?

$$500\,000 = A \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^8-1}{0,05} \rightarrow A = 49\,867,53 \text{ €}$$

Ha d'ingressar anualment 49 867,53 € a l'entitat bancària.

35. Un comerciant inicia un pla d'estalvis en una entitat bancària que li garanteix un rendiment del 10 % anual. Si ingressa 150 € al principi de cada mes, de quin capital podrà disposar quan hagin transcorregut 10 anys? I quan n'hagin transcorregut 20?

Quan hagin transcorregut 10 anys:

$$C = 150 \cdot \left(1+\frac{0,1}{12}\right)\frac{\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{120}-1}{\frac{0,1}{12}} = 30\,982,80 \text{ €}$$

Quan hagin transcorregut 20 anys:

$$C = 150 \cdot \left(1+\frac{0,1}{12}\right)\frac{\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{240}-1}{\frac{0,1}{12}} = 114\,854,54 \text{ €}$$

36. Un treballador complirà 40 anys d'aquí a tres setmanes i es pensa jubilar anticipadament, quan en compleixi 60. Un amic seu li ha parlat d'un pla de jubilació en què garanteixen una rendibilitat del 6,5 %. Esbrina quant haurà de pagar cada any el dia del seu aniversari perquè quan es jubili hagi acumulat un capital de 275 000 €. Digues també quants euros haurà pagat en total durant aquest període de temps? Quins interessos li hauran produït?

$$275\,000 = A \cdot 1,065 \cdot \frac{1,065^{20}-1}{0,065} \rightarrow A = 6\,650,71 \text{ €}$$

Cada any haurà de pagar 6 650,71 € el dia del seu aniversari.

Durant els 20 anys que encara li falten per jubilar-se haurà pagat un total de:

$$20 \text{ anys} \cdot 6\,650,71\frac{\text{€}}{\text{any}} = 133\,014,25 \text{ €}$$

Haurà obtingut uns interessos de:

$$275\,000 - 133\,014,25 = 141\,985,75 \text{ €}$$

37. En una empresa han decidit comprar un ordinador i una impressora el preu al comptat dels quals és de 2 535,20 € més IVA. El representant de l'empresa ha arribat a l'acord següent amb el venedor: al moment d'efectuar la compra, l'empresa ha d'abonar 500 € i la resta s'ha de pagar en quatre pagaments iguals durant cadascun dels quatre anys següents. A més, tot el que no es pagui al comptat tindrà un recàrrec del 10,5 % anual. Si s'hi aplica un IVA del 21 %, determina:

***a*) L'import de la compra si s'hagués fet efectiva al comptat.**

***b*) El preu que es paga realment quan s'hagi saldat el deute.**

a) Tenint en compte que s'aplica el 21 % d'IVA, l'import de la compra al comptat hauria estat de:

$$2\,535,20 \cdot 1,21 = 3\,067,59 \text{ €}$$

b) Si es paguen 500 € en el moment de la compra, quedarien pendents:

$$3\,067,59 - 500 = 2\,567,59 \text{ €}$$

Aquests 2 567,59 € es paguen en 4 anualitats al 10,5 % anual.

L'import de cada anualitat, serà de:

$$a = \frac{D\,i(1+i)^t}{(1+i)^t-1} = \frac{2\,567,59 \cdot 1,105^4 \cdot 0,105}{1,105^4-1} = 818,29 \text{ €}$$

Quan s'hagi saldat el deute, s'hauran pagat realment:

$$500 + 3\,273,16 = 3\,773,16 \text{ €}$$

38. Un equip estèreo professional que costa 3 574,50 € es paga en 11 terminis trimestrals a una taxa d'interès anual del 9,3 %. Calcula l'import de cada pagament i la quantitat total que s'ha pagat per l'equip.

Import de cada pagament:

$$a = \frac{D\frac{i}{f}\left(1+\frac{i}{f}\right)^{ft}}{\left(1+\frac{i}{f}\right)^{ft}-1} = \frac{3\,574,50 \cdot \frac{0,093}{4}\left(1+\frac{0,093}{4}\right)^{11}}{\left(1+\frac{0,093}{4}\right)^{11}-1} = 372,02 \text{ €}$$

Quantitat total que s'ha de pagar per l'equip:

$$11 \cdot 372,02 = 4\,092,22 \text{ €}$$

39. Elabora el quadre d'amortització del préstec següent: 18 000 € a retornar en 8 anys a una taxa d'interès anual del 9 %. Imagina't que, quan s'ha satisfet la cinquena anualitat, es decideix liquidar el deute. Quina quantitat s'ha de pagar?

Calculem primerament el valor de cada anualitat:

$$a = \frac{18\,000 \cdot 0,09 \cdot 1,09^8}{1,09^8-1} = 3\,252,14 \text{ €}$$

Temps	Anualitat	Quota interès	Quota amortització	Capital amortitzat	Capital pendent
0	–	–	–	–	18 000
1	3 252,14	1 620	1 632,14	1 632,14	16 367,86
2	3 252,14	1 473,11	1 779,03	3 411,17	14 588,83
3	3 252,14	1 312,99	1 939,15	5 350,32	12 649,68
4	3 252,14	1 138,47	2 113,67	7 463,99	10 536,01
5	3 252,14	948,24	2 303,90	9 767,89	8 232,11

Per liquidar el deute després de la cinquena anualitat cal pagar 8 232,11 €.

40. Un cotxe es paga amb les condicions següents: 2 500 € d'entrada i la resta, en 14 pagaments iguals de 457,50 € amb venciment quadrimestral. Si l'interès aplicat en aquesta operació és del 10,8 % anual, quin és el preu de venda al comptat d'aquest cotxe?

Calculem primerament l'import ajornat:

$$D = \frac{a\left[\left(1+\frac{i}{f}\right)^{ft} - 1\right]}{\frac{i}{f}\left(1+\frac{i}{f}\right)^{ft}} =$$

$$= \frac{457{,}50\left[\left(1+\frac{0{,}108}{3}\right)^{14} - 1\right]}{\frac{0{,}108}{3}\left(1+\frac{0{,}108}{3}\right)^{14}} =$$

$$= \frac{457{,}50(1{,}036^{14} - 1)}{0{,}036 \cdot 1{,}036^{14}} = 4\,962{,}79 \text{ €}$$

El preu de venda al comptat del cotxe és de:

$2\,500 + 4\,962{,}79 = 7\,462{,}79$ €

41. Una persona ha d'amortitzar un crèdit hipotecari de 54 000 € amb un interès del 9,5 % anual i la seva situació econòmica no li permet pagar una quantitat superior a 8 250 € cada any. Determina:

***a)* Quants pagaments ha de fer?**

***b)* Serà complet l'últim d'aquests pagaments?**

a) Hem de calcular el temps de *t:*

$$(1+i)^t = \frac{a}{a - D \cdot i} \rightarrow$$

$$1{,}095^t = \frac{8\,250}{8\,250 - 54\,000 \cdot 0{,}095} \rightarrow t = 10{,}71 \text{ anys}$$

b) Haurà de fer 11 pagaments, l'últim dels quals no serà complet.

42. La publicitat d'una immobiliària anuncia que els pisos que acaba de construir costen 350 000 €. Una de les diferents maneres de pagament que ofereix és la següent: 70 000 € al moment d'entregar les claus, i la resta, caldrà pagar-la en un termini de 20 anys amb interès del 9,5 %. Suposant que els pagaments es fan al final de cada any, calcula:

***a)* Quina quantitat caldria abonar anualment?**

***b)* Quant s'hauria pagat per aquest pis un cop es fes efectiva l'última anualitat?**

a) Quantitat pendent:

350 000 – 70 000 = 280 000 €

Calculem el valor de cada anualitat:

$$a = \frac{280\,000 \cdot 0{,}095 \cdot 1{,}095^{20}}{1{,}095^{20} - 1} = 31\,773{,}47 \text{ €}$$

b) En aquestes condicions el pis haurà costat un total de:

$70\,000 + 20 \cdot 31\,773{,}47 = 705\,469{,}49$ €

Activitats finals

1. Entre dos amics disposen de 7 500 €. El primer ingressa el seu capital al 4 % anual durant 1 any i el segon també, però al 5 % anual. Si al final de l'any la suma dels interessos de les dues quantitats és de 335 €, calcula els diners que té cadascun d'ells.

Representem per C_1 i C_2 els capitals dels dos amics. Es compleix que:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 7\,500 \\ 0{,}04C_1 + 0{,}05C_2 = 335 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 4\,000 \text{ €} \\ C_2 = 3\,500 \text{ €} \end{array}$$

El primer amic té 4 000 € i el segon, 3 500 €.

2. En una operació a interès simple, a quina taxa anual s'ha d'invertir un capital perquè es tripliqui en 20 anys? I si l'operació és a interès compost?

A interès simple:

$I = 2C_0 \rightarrow C_0 i\, t = 2C_0 \rightarrow$

$i\, t = 2 \rightarrow i = \frac{2}{t} = \frac{2}{20} = 0{,}1 \rightarrow 10\,\%$

A interès compost:

$3C_0 = C_0(1+i)^t \rightarrow 3 = (1+i)^{20} \rightarrow$

$\log 3 = 20 \log(1+i) \rightarrow \log(1+i) = \frac{\log 3}{20} \rightarrow$

$(1+i) = 10^{\frac{\log 3}{20}} \rightarrow$

$i = 10^{\frac{\log 3}{20}} - 1 \rightarrow i = 0{,}0565 \rightarrow 5{,}65\,\%$

3. Un capital s'inverteix durant 1 any al 6 % anual. Després, el capital inicial, juntament amb l'interès produït, es col·loca al 4 % anual. Si sabem que el capital final és de 8 268 €, determina la quantitat de diners inicial.

Representem per C_0 el capital inicial.

En acabar el primer any, es transformaran en $C_0(1+i)$, i en acabar el segon, es transformarà en $C_0(1+i)(1+i')$. Per tant:

$C_0 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}04 = 8\,268 \rightarrow C_0 = 7\,500$ €

4. Esbrina el temps que triga un capital a produir, a interès simple, uns interessos iguals a la quarta part d'aquest capital, si la taxa d'interès aplicada és del 2,5 % semestral.

$I = \frac{C_0}{4} \rightarrow C_0 i t = \frac{C_0}{4} \rightarrow$

$4 i t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{4i} = \frac{1}{4 \cdot 0{,}05} = 5$ anys

Cal tenir en compte que, a interès simple, un 2,5 % semestral equival a un 5 % anual.

5. Calcula el valor efectiu d'una lletra de canvi de 2 400 € de nominal que es descompta en un banc al 9,5 % d'interès 45 dies abans del venciment.

$E = N(1 - i t) \rightarrow$

$E = 2\,400\left(1 - 0{,}095 \cdot \frac{45}{360}\right) = 2\,371{,}50$ €

6. A interès simple, a quina taxa d'interès s'han d'invertir 3 750 € durant 7 anys perquè produeixin una suma de capital més interessos igual a 5 981,25 €?

Els interessos són de:

$5\,981{,}25 - 3\,750 = 2\,231{,}25$ €

$I = C_0 i t \rightarrow i = \frac{I}{C_0 t} = \frac{2\,231{,}25}{3\,750 \cdot 7} = 0{,}085 \rightarrow 8{,}5\,\%$

7. Dos capitals que sumen 1 200 € s'inverteixen al 4 % d'interès simple semestral, el primer 9 mesos menys que el segon. Si sabem que durant aquest temps cadascun produeix uns interessos de 48 €, determina'n el valor.

A interès simple, un 4 % semestral equival a un 8 % anual i a un $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ % mensual. Per tant, $i = \frac{2}{3} : 100 = \frac{1}{150}$ (el temps caldrà expressar-lo en mesos).

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1\,200 \\ C_1 i t = C_2 i (t+9) \\ C_1 i t = 48 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1\,200 \\ C_1 t = C_2 (t+9) \\ C_1 \frac{1}{150} t = 48 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1\,200 \\ C_1 t = C_2 (t+9) \\ C_1 t = 7\,200 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 t = (1\,200 - C_1)(t+9) \\ C_1 t = 7\,200 \end{array}\right\}$$

$C_1 = 800$ €, $t = 9$ mesos $\rightarrow C_2 = 400$ €

El primer capital de 800 € s'ha invertit durant 9 mesos, el segon capital de 400 € s'ha invertit durant 18 mesos.

8. S'han invertit 4 000 € al 4 % d'interès compost anual durant 6 anys. Quina quantitat hauríem d'invertir a interès simple i sense modificar la taxa d'interès anual per obtenir els mateixos interessos en el mateix temps?

Calculem els interessos a interès compost:

$C_6 = C_0\,(1+i)^6 = 4\,000 \cdot 1{,}04^6 = 5\,061{,}28$ €

$I = 5\,061{,}28 - 4\,000 = 1\,061{,}28$ €

A interès simple:

$I = C_0 i t \rightarrow C_0 = \frac{I}{i t} = \frac{1\,061{,}28}{0{,}04 \cdot 6} = 4\,421{,}98$ €

Hauríem d'invertir 4 421,98 €

9. Calcula els interessos que produeixen 950 € al 6 % anual d'interès compost durant 15 mesos.

$t = 15$ mesos $= \frac{15}{12}$ anys $= 1{,}25$ anys

Capital final: $C_t = 950 \cdot 1{,}06^{1{,}25} = 1\,021{,}78$ €

$I = 1\,021{,}78 - 950 = 71{,}78$ €

10. Compara l'evolució que experimenta una inversió de 1 000 € al 10 % anual durant 10 anys a interès simple i a interès compost. Representa els resultats en una taula (Taula 6.9) i en una gràfica (Fig. 6.2). Quines conclusions pots extreure'n?

Any	C_t (simple) (€)	C_t (compost) (€)
0	1 000	1 000
1	1 100	1 100
2	1 200	1 210
3	1 300	1 331
4	1 400	1 464,10
5	1 500	1 610,51
6	1 600	1 771,56
7	1 700	1 948,72
8	1 800	2 143,59
9	1 900	2 357,95
10	2 000	2 593,74

Taula 6.9

$C_t(\text{simple}) = C_0(1 + i t)$

$C_t(\text{compost}) = C_0(1+i)^t$ amb $i = 0{,}1$

Conclusions:

Per a una mateixa taxa d'interès i el mateix temps, l'interès compost proporciona més beneficis.

A la gràfica es pot observar que, a interès simple, segueix un creixement lineal, mentre que a interès compost el creixement és exponencial.

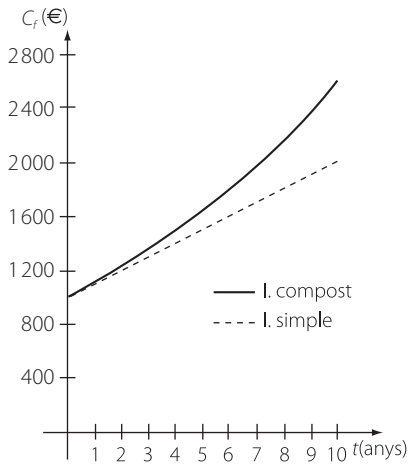


Fig. 6.2

11. A quina taxa anual d'interès compost s'han d'ingressar 250 € perquè en 6 anys produeixin uns interessos de 59,10 €?

$C_t = C_0 + I = 250 + 59{,}10 = 309{,}10$ €

(capital acumulat)

$C_t = C_0(1+i)^t \rightarrow 309{,}10 = 250(1+i)^6 \rightarrow$

$(1+i)^6 = \dfrac{309{,}10}{250} \rightarrow (1+i)^6 = 1{,}2364 \rightarrow$

$1 + i = \sqrt[6]{1{,}2364} \rightarrow i = 0{,}036 \rightarrow 3{,}6\,\%$

12. Per un préstec de 3 000 € al 5 % d'interès compost anual, se'n tornen 4 432,37. Determina el temps que s'ha trigat a pagar el préstec.

$C_t = C_0(1+i)^t \rightarrow 4\,432{,}37 = 3\,000 \cdot 1{,}05^t \rightarrow$

$\dfrac{4\,432{,}37}{3\,000} = 1{,}05^t \rightarrow t = \dfrac{\log \dfrac{4\,432{,}37}{3\,000}}{\log 1{,}05} = 8$ anys

El préstec s'ha retornat en 8 anys.

13. Una persona no recorda quant fa que va ingressar 100 € al banc ni l'interès compost anual acordat. Un dia va al banc i li diuen que si vol retirar els diners en aquell moment, li donaran 133,10 €; pero si espera 2 anys més, li'n donaran 161,05. Calcula la taxa d'interès compost que li paga el banc i els anys que han transcorregut des que va fer-hi l'ingrés. Determina també quina taxa d'interès compost mensual equivalent li hauria de pagar el banc a partir d'aquest moment si sol·licita que li abonin els interessos cada mes.

Taxa d'interès anual: i

Temps: t anys

$$\left.\begin{aligned} 133{,}10 &= 100(1+i)^t \\ 161{,}05 &= 100(1+i)^{t+2} \end{aligned}\right\}$$

Dividim membre a membre la segona igualtat entre la primera:

$\dfrac{161{,}05}{133{,}10} = (1+i)^2 \rightarrow i = \sqrt{\dfrac{161{,}05}{133{,}10}} - 1 = 0{,}1 \rightarrow 10\,\%$

$133{,}10 = 100 \cdot 1{,}1^t \rightarrow t = 3$ anys

El banc li paga el 10 % d'interès compost i han transcorregut 3 anys des que va fer-hi l'ingrés.

Taxa d'interès mensual equivalent a un 10 % anual:

$i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0{,}1} - 1 = 0{,}008 \rightarrow 0{,}8\,\%$

14. Esbrina el capital final generat per 630 € invertits 6 anys a interès compost amb una taxa anual del 4,8 %, si la capitalització és: *a*) anual; *b*) semestral; *c*) quadrimestal; *d*) trimestral; *e*) mensual.

a) $C_6 = 630 \cdot 1{,}048^6 = 834{,}66$ €

b) $C_6 = 630\left(1 + \dfrac{0{,}048}{2}\right)^{12} = 837{,}41$ €

c) $C_6 = 630\left(1 + \dfrac{0{,}48}{3}\right)^{18} = 838{,}35$ €

d) $C_6 = 630\left(1 + \dfrac{0{,}048}{4}\right)^{24} = 838{,}83$ €

e) $C_6 = 630\left(1 + \dfrac{0{,}048}{12}\right)^{72} = 839{,}78$ €

15. A interès compost, calcula la taxa trimestral equivalent a: *a*) el 6 % anual; *b*) el 3 % semestral; *c*) l'1 % mensual.

a) $i_4 = \sqrt[4]{1{,}06} - 1 = 0{,}0147 \rightarrow 1{,}47\,\%$

b) $i = 1{,}03^2 - 1 = 0{,}0609 \rightarrow 6{,}09\,\%$ anual

$i_4 = \sqrt[4]{1{,}0609} - 1 = 0{,}0149 \rightarrow 1{,}49\,\%$

c) $i = 1{,}03^{12} - 1 = 0{,}1268 \rightarrow 12{,}68\,\%$ anual

$i_4 = \sqrt[4]{1{,}1268} - 1 = 0{,}0303 \rightarrow 3{,}03\,\%$

16. Calcula el temps durant el qual s'ha d'invertir un capital al 5,4 % d'interès compost perquè es dupliqui en aquestes condicions: *a*) la capitalització és anual; *b*) la capitalització és mensual.

a) Capitalització anual:

Si el capital es duplica, $C_t = 2C_0$

$2C_0 = C_0(1+i)^t \rightarrow 2 = 1{,}054^t \rightarrow$

$t = 13{,}18$ anys $\simeq$ 13 anys i 2 mesos

b) Capitalització mensual:

$2C_0 = C_0\left(1 + \dfrac{0{,}054}{12}\right)^{12t} \rightarrow 2 = 1{,}0045^{12t} \rightarrow$

$t = 12{,}86$ anys $\simeq$ 12 anys i 10 mesos

17. S'ingressen 25 000 € en una llibreta a termini durant 3 anys a un 4,25 % anual d'interès compost. Si al moment de retirar els diners l'entitat financera descompta el 25 % dels interessos en concepte d'IRPF, quina és la taxa anual d'interès real de l'operació?

Calculem els interessos que s'obtindran:

$C_3 = 25\,000 \cdot 1{,}0425^3 = 28\,324{,}89$ €

$I = 28\,324{,}89 - 25\,000 = 3\,324{,}89$ €

Només es cobra el 75 % d'aquests interessos:

$I' = 0{,}75 \cdot I = 0{,}75 \cdot 3\,324{,}89 = 2\,493{,}67$ €

Llavors, el capital final real serà de:

$25\,000 + 2\,493{,}67 = 27\,493{,}67$ €

Representem per i' la taxa d'interès real:

$27\,493{,}67 = 25\,000(1 + i')^3 \rightarrow$

$i' = \sqrt[3]{\dfrac{27\,493{,}67}{25\,000}} - 1 \rightarrow i' = 0{,}0322 \rightarrow 3{,}22\,\%$

La taxa real d'interès de l'operació és del 3,22 %.

18. Un banc ofereix dues alternatives per contractar un préstec: el 4,8 % anual, convertible semestralment, o el 4,5 % anual convertible trimestralment. Quina és l'opció que resulta més favorable? Justifica la resposta.

Calculem la TAE de cada opció:

a) $\text{TAE} = \left(1 + \dfrac{i}{f}\right)^f - 1 = \left(1 + \dfrac{0{,}048}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}0486 \rightarrow 4{,}86\%$

b) $\text{TAE} = \left(1 + \dfrac{0{,}045}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}0458 \rightarrow 4{,}58\,\%$

La segona opció és més favorable, ja que la taxa anual equivalent és menor (per la qual cosa caldrà pagar menys interessos pel préstec).

19. El preu del lloguer d'un apartament és de 900 € per mes. Si el propietari l'incrementa en un 2,5 % cada any, quina quantitat mensual haurà de pagar el llogater d'aquí a 5 anys? Quant haurà pagat en total pel lloguer de l'apartament en aquest temps?

El preu al cap de 5 anys serà de:

$P_5 = 900 \cdot 1{,}025^4 = 993{,}43$ € cada mes

L'any en què es va establir l'acord el llogater va pagar un total de $900 \cdot 12 = 10\,800$ €.

Segon any $\rightarrow 10\,800 \cdot 1{,}025 = 11\,070$ €

Tercer any $\rightarrow 11\,070 \cdot 1{,}025 = 11\,346{,}75$ €

Quart any $\rightarrow 11\,346{,}75 \cdot 1{,}025 = 11\,630{,}42$ €

Cinquè any $\rightarrow 11\,630{,}42 \cdot 1{,}025 = 11\,921{,}18$ €

En el decurs de 5 anys va pagar pel lloguer de l'apartament un total de:

$10\,800 + 11\,070 + 11\,346{,}75 + 11\,630{,}42 + 11\,921{,}18 =$

$= 56\,768{,}35$ €

20. Per obtenir una TAE del 6,12 % amb capitalització quadrimestral, quin ha de ser el nominal?

$\text{TAE} = \left(1 + \dfrac{i}{f}\right)^f - 1 \rightarrow$

$0{,}0612 = \left(1 + \dfrac{i}{3}\right)^3 - 1 \rightarrow 1{,}0612 = \left(1 + \dfrac{i}{3}\right)^3 \rightarrow$

$\sqrt[3]{1{,}0612} - 1 = \dfrac{i}{3} \rightarrow i = 0{,}06 \rightarrow 6\,\%$

El nominal ha de ser del 6 %.

21. S'inverteix un capital *A* al 2 % quadrimestral d'interès compost durant 5 anys. Un altre capital *B*, que supera el primer en 1 000 €, s'inverteix durant el mateix temps al 4 % nominal amb capitalització semestral. Determina el valor de cada capital sabent que en totes dues operacions s'obtenen els mateixos interessos.

Els capitals són A i $B = A + 1000$.

Un 2 % quadrimestral equival a un 6,12 % anual, i un 4 % anual amb capitalització semestral equival a un 4,04 %.

Els interessos dels dos capitals són iguals:

$A(1 + i)^t - A = (A + 1000)(1 + i')^t - (A + 1000)$

$A[1{,}0612^5 - 1] = (A + 1000)(1{,}0404^5 - 1)$

$A = \dfrac{1000(1{,}0404^5 - 1)}{1{,}0612^5 - 1{,}0404^5} = 1726{,}77$ €

Els capitals són: $A = 1726{,}77$ € i $B = 2726{,}77$ €

22. En obrir una llibreta d'estalvis s'ofereixen dues possibilitats: un nominal del 3,6 % convertible bimensualment o una TAE del 3,63 %. Quina de les dues resulta més avantatjosa?

Calculem la TAE de la primera opció: un nominal del 3,6 % convertible bimensualment:

$\text{TAE} = \left(1 + \dfrac{i}{f}\right)^f - 1 = \left(1 + \dfrac{0{,}036}{6}\right)^6 - 1 =$

$= 0{,}0365 \rightarrow 3{,}65\,\%$

Per al client, la primera opció és més avantatjosa ja que la taxa anual equivalent és més gran (3,65 > 3,63).

23. Si el dia 1 de gener de cada any es dipositen 500 € en una llibreta d'estalvis que proporciona un 3,6 % anual, quin capital s'acumularà al cap de 25 anys?

$C = A(1 + i)\dfrac{(1 + i)^t - 1}{i} =$

$= 500 \cdot 1{,}036 \cdot \dfrac{1{,}036^{25} - 1}{0{,}036} = 20\,446{,}54$ €

En 25 anys s'acumularà un capital de 20 446,54 €.

24. Quina prima anual haurà de pagar a una companyia asseguradora una persona que té 40 anys perquè quan es jubili pugui disposar d'un capital de 60 000 €? La companyia li garanteix una taxa anual del 4,2 %.

$A = \dfrac{C_0 \cdot i}{(1 + i)[(1 + i)^t - 1]} = \dfrac{60\,000 \cdot 0{,}042}{1{,}042(1{,}042^{25} - 1)} =$

$= 1\,345{,}81$ €

Suposant que la jubilació es produeixi a 65 anys, cal pagar cada any 1 345,81 € a la companyia asseguradora.

25. Calcula les anualitats que s'han d'abonar per amortitzar en 10 anys un préstec de 24 000 € al 8,75 % anual.

$$a = \frac{Di(1+i)^t}{(1+i)^t - 1} = \frac{24\,000 \cdot 0{,}0875 \cdot 1{,}0875^{10}}{1{,}0875^{10} - 1} =$$

$$= 3\,698{,}63 \text{ €}$$

Cal abonar 3 698,63 € cada any durant els 10 anys que dura el préstec.

26. Un treballador decideix ingressar en un compte d'estalvi 2 400 € a principi d'any durant 10 anys. En el transcurs dels 6 primers anys, la llibreta dóna un interès del 4,6 % anual i a partir del setè, l'interès disminueix fins al 4,2 % anual. Quin és el saldo final de la llibreta?

Saldo acumulat durant els sis primers anys:

$$C_1 = A(1+i)\frac{(1+i)^t - 1}{i} =$$

$$= 2\,400 \cdot 1{,}046 \cdot \frac{1{,}046^6 - 1}{0{,}046} = 16\,904{,}55 \text{ €}$$

Saldo acumulat durant els 4 darrers anys:

$$C_2 = 2\,400 \cdot 1{,}042 \cdot \frac{1{,}042^4 - 1}{0{,}042} = 10\,651{,}23 \text{ €}$$

A més, el capital C_1 està invertit al 4,2 % durant els 4 últims anys. S'haurà transformat en:

$$C_1' = 16\,904{,}55 \cdot 1{,}042^4 = 19\,928{,}49 \text{ €}$$

En definitiva, el saldo final de la llibreta és de:

$$C_1' + C_2 = 19\,928{,}49 + 10\,651{,}23 = 30\,579{,}72 \text{ €}$$

27. Quants anys calen per cancel·lar un préstec de 10 000 € al 9 % anual si es paguen 207,58 € cada mes?

$$a = \frac{Di(1+i)^t}{(1+i)^t - 1} \rightarrow (1+i)^t = \frac{a}{a - D \cdot i} \rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{i}{f}\right)^{ft} = \frac{a}{a - D \cdot \frac{i}{f}} \rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{0{,}09}{12}\right)^{12t} = \frac{207{,}58}{207{,}58 - \frac{0{,}09}{12} \cdot 10\,000} \rightarrow$$

$$1{,}0075^{12t} = 1{,}5657 \rightarrow t = \frac{\log 1{,}5657}{12 \log 1{,}0075} = 5 \text{ anys}$$

Es necessiten 5 anys per cancel·lar el préstec.

28. Una família té un préstec hipotecari de 48 000 € al 8 % anual que s'ha de tornar en 10 anys. Si decideix cancel·lar-lo i els pagaments són mensuals, quina quantitat haurà d'abonar al final de cada mes a l'entitat que li ha concedit el préstec?

$$a = \frac{D \cdot \frac{i}{f} \cdot \left(1 + \frac{i}{f}\right)^{ft}}{\left(1 + \frac{i}{f}\right)^{ft} - 1} =$$

$$= \frac{48\,000 \cdot \frac{0{,}08}{12} \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right)^{120}}{\left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right)^{120} - 1} = 582{,}37 \text{ €}$$

Al final de cada mes haurà d'abonar 582,37 € a l'entitat que li ha concedit el préstec.

29. L'entitat financera *X* presta un cert capital al 10 % anual amortitzable en 10 anys i l'entitat *Y* ho fa al 12 % anual per ser retornat en 9 anys. A quina entitat són més assequibles les anualitats? I la quantitat total que s'ha de tornar?

L'entitat *X* i l'entitat *Y* concedeixen el mateix préstec *D*.

Anualitats que cal pagar a l'entitat *X:*

$$a = \frac{Di(1+i)^t}{(1+i)^t - 1} = \frac{D \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}1^{10}}{1{,}1^{10} - 1} = 0{,}16D$$

Anualitats que cal pagar a l'entitat *Y:*

$$a' = \frac{Di'(1+i')^t}{(1+i')^{t'} - 1} = \frac{D \cdot 0{,}12 \cdot 1{,}12^9}{1{,}12^9 - 1} = 0{,}19D$$

$a < a'$, ja que $0{,}16 < 0{,}19$. Les anualitats són més assequibles a l'entitat *X*.

Quantitat total a retornar:

Entitat *X:* $D(1+i)^t = 1{,}1^{10} \cdot D = 2{,}59\,D$

Entitat *Y:* $D(1+i')^{t'} = 1{,}12^9 \cdot D = 2{,}77\,D$

Com que 2,59 < 2,77, la quantitat total a retornar també és més petita a l'entitat *X*.

Unitat 7. Estadística descriptiva

Activitats

1. Elabora la taula de freqüències i de percentatges de la Taula 7.1.

x_i	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
2	2	0,08	8 %	2	0,08	8 %
3	2	0,08	8 %	4	0,16	16 %
4	3	0,12	12 %	7	0,28	28 %
5	5	0,20	20 %	12	0,48	48 %
6	4	0,16	16 %	16	0,64	64 %
7	3	0,12	12 %	19	0,76	76 %
8	3	0,12	12 %	22	0,88	88 %
9	2	0,08	8 %	24	0,96	96 %
10	1	0,04	4 %	25	1	100 %
	$\sum = 25$	$\sum = 1$	$\sum = 100$ %			

2. En una població de 25 famílies s'ha estudiat la variable *X:* «nombre de cotxes que té la familia», i s'han obtingut les dades següents:

0, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 1

***a*) Calcula'n les freqüències absolutes, les freqüències relatives, els tants per cent, les freqüències absolutes acumulades, les freqüències relatives acumulades i, finalment, els tants per cent acumulats.**

***b*) Presenta els resultats obtinguts a l'apartat anterior en una taula.**

x_i	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
0	2	0,08	8 %	2	0,08	8 %
1	12	0,48	48 %	14	0,56	56 %
2	8	0,32	32 %	22	0,88	88 %
3	3	0,12	12 %	25	1	100 %
	$\sum = 25$	$\sum = 1$	$\sum = 100$ %			

3. La Taula 7.3, que està incompleta, representa les qualificacions obtingudes per 80 alumnes de 1r de Batxillerat d'un institut.

Qualificació	Freqüència absoluta	Freqüència relativa
Suspens	—	0,375
Aprovat	20	—
Notable	16	—
Excel·lent	—	—

Taula 7.3

***a*) Completa la taula amb les freqüències absolutes i relatives que hi falten.**

***b*) Elabora la taula de freqüències i de percentatges corresponent.**

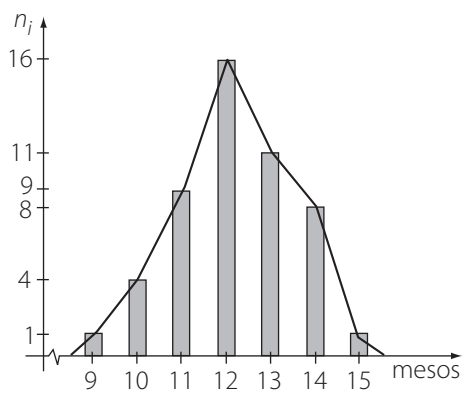
Qualificació	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
S	30	0,375	37,5 %	30	0,375	37,5 %
A	20	0,25	25 %	50	0,625	62,5 %
N	16	0,2	20 %	66	0,825	82,5 %
E	14	0,175	17,5 %	80	1	100 %
	$\sum = 80$	$\sum = 1$	$\sum = 100$ %			

4. Un pediatre ha dut a terme un estudi sobre l'edat a a la qual van començar a caminar 50 nens i nenes de la seva consulta. Les dades que va obtenir que va obtenir es resumeixen a la taula següent:

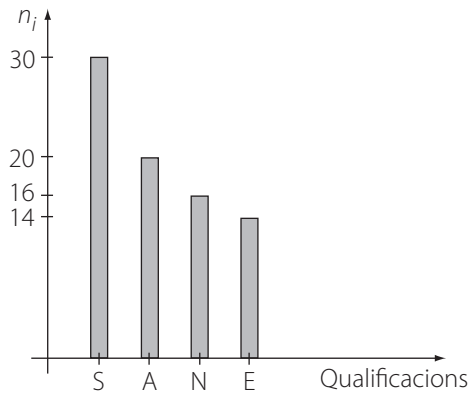
Mesos	9	10	11	12	13	14	15
Nens/nenes	1	4	9	16	11	8	1

Taula 7.4

Dibuixa el diagrama de barres i el polígon de freqüències corresponents.



5. Confecciona un gràfic estadístic que sigui adient per a la distribució de freqüències de la Taula 7.3 de l'activitat 3.



És un diagrama de barres.

6. D'una mostra de 75 piles s'han obtingut les dades següents sobre la duració en hores (Taula 7.5):

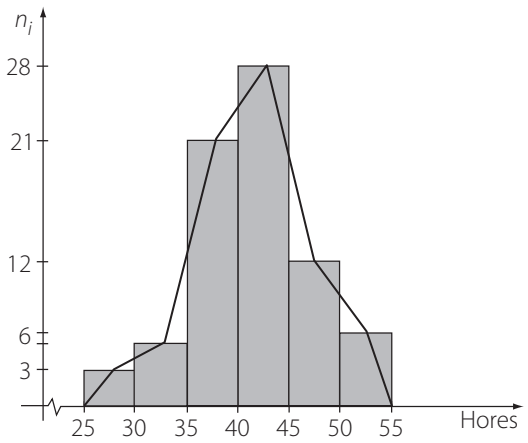
Duració (hores)	Nre. de piles
(25, 30]	3
(30, 35]	5
(35, 40]	21
(40, 45]	28
(45, 50]	12
(50, 55]	6

Taula 7.5

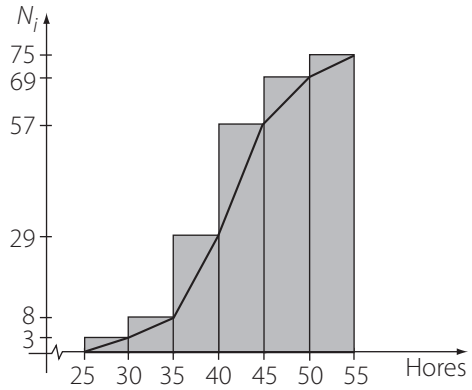
a) **Representa els histogrames corresponents, el de freqüències i l'acumulat.**

b) **A partir dels histogrames de l'apartat anterior, construeix els dos polígons de freqüències.**

a)



b)



7. Amb les dades de la Taula 7.2 calcula:

a) **La mitjana, utilitzant les freqüències relatives.**

b) **La mitjana, a partir dels percentatges.**

c) **La variància, utilitzant la segona expressió que en permet el càlcul.**

x_i	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
0	10	0,2	20 %	10	0,2	20 %
1	15	0,3	30 %	25	0,5	50 %
2	13	0,26	26 %	38	0,76	76 %
3	8	0,16	16 %	46	0,92	92 %
4	4	0,08	8 %	50	1	100 %
	50	1	100 %			

Taula 7.2

a) $\overline{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 1{,}62$

b) $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i p_i}{100} = \dfrac{162}{100} = 1{,}62$

c) $\sigma_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 n_i}{n} - \overline{x}^2 = \dfrac{203}{50} - 2{,}62 = 1{,}44$

8. De les dades de la Taula 7.7, calcula'n la mitjana, la mediana, la variància i la desviació típica.

Número de calçat	35	36	37	38	40	42
Freqüències absolutes	4	15	17	20	10	4

Taula 7.7

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} = \frac{2\,637}{70} = 37{,}67$$

$m = 37{,}5$

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i - \bar{x}| n_i}{n} = \frac{94{,}34}{70} = 1{,}35$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \frac{209{,}52}{70} = 2{,}99$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2{,}99} = 1{,}73$$

9. A partir de la taula de l'activitat anterior, comprova les propietats de la mitjana, de la variància i de la desviació típica, en els casos següents:

a) **Sumant la constant $k = 3$ a tots els valors de la variable.**

b) **Multiplicant per $h = 2$ tots els valors de la variable.**

a) $$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{6} y_i n_i}{n} = \frac{2\,847}{70} = 40{,}67 = \bar{x} + 3$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} y_i^2 n_i}{n} - \bar{y}^2 = \frac{116\,001}{70} - 1\,654{,}165\,1 =$$

$$= 2{,}992\,1 = \sigma_x^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{2{,}992\,1} = 1{,}73 = \sigma_x$$

b) $$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{6} z_i n_i}{n} = \frac{5\,274}{70} = 75{,}34 = 2\bar{x}$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} z_i^2 n_i}{n} - \bar{z}^2 = \frac{398\,196}{70} - 5\,676{,}546\,1 =$$

$$= 11{,}968\,4 = 4\sigma_x^2 = 2^2\sigma_x^2$$

$$\sigma_z = \sqrt{11{,}968\,4} = 3{,}46 = 2\sigma_x$$

10. Comprova amb les dades de l'exemple 2 que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} n_i(x_i - \bar{x})}{n} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} n_i(x_i - \bar{x})}{n} =$$

$$= \frac{-16{,}2 - 9{,}3 + 4{,}94 + 11{,}04 + 9{,}52}{50} = 0$$

11. Calcula tots els paràmetres estadístics de la variable de l'activitat 4.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{n} = \frac{610}{50} = 12{,}2 \text{ mesos}$$

$m = 12$ mesos, ja que 25è $\rightarrow$ 12.

La moda és $x_4 = 12$ mesos, ja que $n_4 = 16$ és la freqüència absoluta més gran.

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{7} |x_i - \bar{x}| n_i}{n} = \frac{52}{50} = 1{,}04 \text{ mesos}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{7\,526}{50} - 148{,}84 = 1{,}68$$

$$\sigma_x = \sqrt{1{,}68} = 1{,}30 \text{ mesos}$$

12. Determina la desviació mitjana de la variable de la Taula 7.8.

Consum	Nre. de camions
(0, 10]	8
(10, 20]	12
(20, 30]	10
(30, 40]	14
(40, 50]	21
(50, 60]	16
(60, 70]	9

Taula 7.8

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{7} |x_i - \bar{x}| n_i}{n} = \frac{1\,375{,}111\,6}{90} = 15{,}28 \text{ L}$$

13. Els jugadors d'un equip de bàsquet es classifiquen, per alçades, com mostra la Taula 7.10.

Alçada (m)	Nre. de jugadors
(1,70; 1,75]	1
(1,75; 1,80]	3
(1,80; 1,85]	4
(1,85; 1,90]	8
(1,90; 1,95]	5
(1,95; 2,00]	2

Taula 7.10

a) **Determina'n la mitjana, la mediana i la desviació típica.**

b) **Quants jugadors de l'equip tenen una alçada que supera el valor $\bar{x} + \sigma$?**

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i n_i}{n} = \dfrac{42,925}{23} = 1,87$ m

$\left.\begin{array}{l} 8è \to 1,85 \\ 16è \to 1,90 \end{array}\right\} \to 12è \to 1,875 \to m = 1,875$ m

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{80,204\,375}{23} - 3,483\,091\,9} =$$

$$= \sqrt{0,0040548} = 0,06$$

b) $\bar{x} + \sigma = 1,8663 + 0,0637 = 1,93$ m

$\left.\begin{array}{l} 1,90 \to 16è \\ 1,95 \to 21è \end{array}\right\} \to 1,93 \to 19è,$

$23 - 19 = 4$ jugadors superen 1,93 m

14. Calcula la moda, la mitjana, la mediana i la desviació típica de la variable definida en l'activitat 6.

La moda és l'interval (40, 45].

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i n_i}{n} = \frac{3\,107,5}{75} = 41,4\widehat{3} \text{ h}$$

$\left.\begin{array}{l} 29a \to 40 \\ 57a \to 45 \end{array}\right\} \to 38a \to 41,61;\ m = 41,61$ h

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{131\,268,75}{75} - 1\,716,721\,1} =$$

$$= \sqrt{33,528\,899} = 5,79 \text{ h}$$

15. S'ha aplicat un test sobre la satisfacció a la feina a 90 treballadors d'una fàbrica i s'han obtingut els resultats següents (Taula 7.11):

Puntuacions	Nre. de treballadors
(38, 44]	4
(44, 50]	12
(50, 56]	10
(56, 62]	30
(62, 68]	20
(68, 74]	8
(74, 80]	6

Taula 7.11

Calcula els paràmetres de centralització i de dispersió de la variable.

La moda és l'interval (56, 62].

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{n} = \frac{5\,358}{90} = 59,5\widehat{3} \text{ punts}$$

$\left.\begin{array}{l} 26è \to 56 \\ 56è \to 62 \end{array}\right\} \to 45è \to 59,8;\ m = 59,8$ punts

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{7} |x_i - \bar{x}| n_i}{n} = \frac{611,66}{90} = 6,796 \text{ punts}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{326\,154}{90} - 3\,544,217\,8 = 79,715\,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{79,715\,5} = 8,93 \text{ punts}$$

16. Calcula la mitjana i la desviació típica de la variable contínua que segueix la distribució de la Taula 7.12.

Interval	Freqüència absoluta
[44, 50)	2
[50, 56)	6
[56, 62)	5
[62, 68)	8
[68, 74)	8
[74, 80)	5
[80, 86)	4
[86, 92)	2

Taula 7.12

Mitjana:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} n_i x_i}{40} = \frac{2\,690}{40} = 67,25$$

Desviació típica:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8} n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{185\,848}{40} - 67,25^2} =$$

$$= \sqrt{4\,646,2 - 4\,522,562\,5} = \sqrt{123,637\,5} = 11,12$$

17. En un concurs de gimnàstica, dues de les participants reben les puntuacions següents:

Alba: 9,4; 9,4; 9,3; 10; 9,5 i 9,2

Berta: 8,5; 9,4; 9,3; 9,3; 9,4 i 9,5

Calcula la mitjana de les puntuacions que ha obtingut cadascuna de les dues noies:

a) **Tenint en compte les sis puntuacions.**

b) **Sense la puntuació màxima ni la mínima.**

a) Alba: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{n} = \dfrac{9,4+9,4+9,3+10+9,5+9,2}{6} =$

$$= \frac{56,8}{6} = 9,4\widehat{6}$$

Berta: $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} y_i}{n} = \dfrac{8{,}5+9{,}4+9{,}3+9{,}3+9{,}4+9{,}5}{6} =$

$= \dfrac{55{,}4}{6} = 9{,}2\widehat{3}$

b) Alba: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{n} = \dfrac{9{,}4+9{,}4+9{,}3+9{,}5}{4} = \dfrac{37{,}6}{4} = 9{,}4$

Berta: $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} y_i}{n} = \dfrac{9{,}4+9{,}3+9{,}3+9{,}4}{4} = \dfrac{55{,}4}{6} = 9{,}35$

18. S'ha aplicat un test d'intel·ligència a tots els alumnes d'una classe. Les puntuacions que s'han obtingut són les següents (Taula 7.13):

Punts	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)
n_i	3	4	9	6	5	3

Taula 7.13

Calcula les dues desviacions.

Primerament, cal calcular la mitjana: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} n_i x_i}{n} = \dfrac{750}{30} = 25$

Desviació mitjana: $d = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} n_i \, |x_i - \bar{x}|}{n} = \dfrac{180}{30} = 6$

Desviació típica: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{6} n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{20\,287{,}5}{30} - 25^2} =$

$= \sqrt{676{,}25 - 625} = \sqrt{51{,}25} = 7{,}16$

Activitats finals

1. Considera la sèrie de nombres:

5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 8, 6, 5, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 2, 5 i 4.

***a*) Elabora'n la taula de freqüències.**

***b*) Esbrina'n la moda, la mitjana, la mediana i la desviació típica.**

a)

x_i	2	3	4	5	6	8
n_i	2	2	5	6	2	3
N_i	2	4	9	15	17	20

b) Moda: 5, ja que $n_4 = 6$ és la freqüència absoluta més gran.

$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i n_i}{n} = \dfrac{96}{20} = 4{,}8$

$\left.\begin{array}{l} 10\text{è} \to 5 \\ 11\text{è} \to 5 \end{array}\right\} \to m = 5$

$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{520}{20} - 23{,}04} =$

$= \sqrt{2{,}96} = 1{,}720\,5$

2. Si la variable estadística discreta *X* és (Taula 7.14):

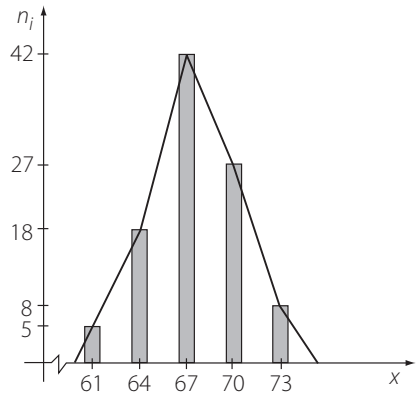
x_i	61	64	67	70	73
n_i	5	18	42	27	8

Taula 7.14

***a*) Representa'n el diagrama de barres i el polígon de freqüències.**

***b*) Calcula'n els paràmetres de centralització i els de dispersió.**

a)



b) La moda és 67.

$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i n_i}{n} = \dfrac{6\,745}{100} = 67{,}45$

$\left.\begin{array}{l} 50\text{è} \to 67 \\ 51\text{è} \to 67 \end{array}\right\} \to m = 67$

$d = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} |x_i - \bar{x}| n_i}{n} = \dfrac{226{,}5}{100} = 2{,}265$

$\sigma_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \dfrac{455\,803}{100} - 4\,549{,}502\,5 =$

$= 8{,}527\,5$

$\sigma_x = \sqrt{8{,}527\,5} = 2{,}920\,2$

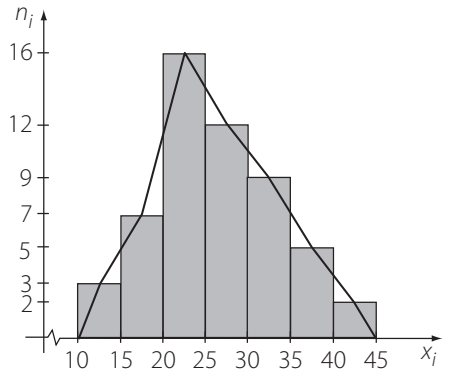
3. *a*) Construeix l'histograma de freqüències, l'histograma acumulat i el polígon de freqüència que corresponen a la Taula 7.15:

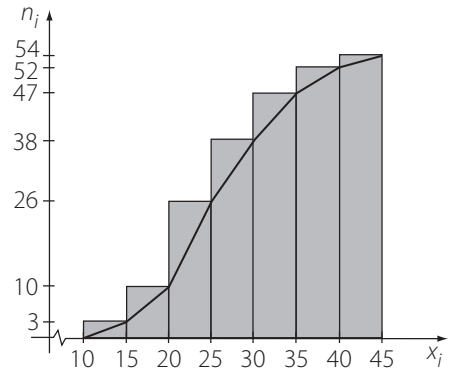
Intervals	n_i
$10 \leqslant x < 15$	3
$15 \leqslant x < 20$	7
$20 \leqslant x < 25$	16
$25 \leqslant x < 30$	12
$30 \leqslant x < 35$	9
$35 \leqslant x < 40$	5
$40 \leqslant x < 45$	2

Taula 7.15

b) Calcula'n la mitjana, la mediana, la variància i la desviació típica.

a)





b) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{n} = \dfrac{1\,415}{54} = 26,2037$

$$\left.\begin{array}{l} 26è \rightarrow 25 \\ 38è \rightarrow 30 \end{array}\right\} \rightarrow 27è \rightarrow 25,21\widehat{6}\ m = 25,21\widehat{6}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{39\,937,5}{54} - 686,634\,09 =$$
$$= 52,9492$$

$$\sigma_x = \sqrt{52,9492} = 7,2766$$

4. En un total de 50 famílies s'ha estudiat la variable: «nombre de fills». A la Taula 7.16 es resumeixen els resultats obtinguts:

Nre. de fills	0	1	2	3	4	5
Freqüència absoluta	—	15	—	5	4	—
Freqüència relativa	0,2	—	—	—	—	0,02

Taula 7.16

***a)* Completa'n les freqüències absolutes i relatives que hi falten.**

***b)* Esbrina els percentatges de cada valor de la variable.**

***c)* Calcula'n la mitjana i la desviació típica.**

a) i *b)*

Fills	0	1	2	3	4	5
n_i	10	15	15	5	4	1
f_i	0,2	0,3	0,3	0,1	0,08	0,02
p_i	20 %	30 %	30 %	10 %	8 %	2 %

c) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i n_i}{n} = \dfrac{81}{50} = 1,62$ fills

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{209}{50} - 2,624\,4} =$$
$$= \sqrt{1,555\,6} = 1,247\,2 \text{ fills}$$

5. La direcció de trànsit ha recollit la informació següent relativa al nombre de multes diàries que els seus agents han imposat, en un període de 50 dies, als conductors que circulen per una autopista (Taula 7.17).

Nre. de multes	(0, 5]	(5, 10]	(10, 15]	(15, 20]
Dies	6	14	20	10

Taula 7.17

***a)* Calcula la mitjana de multes diàries.**

***b)* Calcula i interpreta el valor de la mediana.**

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i n_i}{n} = \dfrac{545}{50} = 10,9$ multes

b) $\left.\begin{array}{l} 20è \rightarrow 10 \\ 40è \rightarrow 15 \end{array}\right\} \rightarrow 25è \rightarrow 11,25 \rightarrow m = 11,25$ multes

La mediana de les multes representa la quantitat de multes imposades en la meitat de temps, és a dir, en 25 dies.

6. Les edats (anys) de tres grups de persones són (Taula 7.18):

Grup 1	22	18	20	21	19
Grup 2	31	29	30	32	28
Grup 3	25	15	20	30	10

Taula 7.18

Compara els tres grups d'edat, calculant la mitjana i la desviació típica de cada grup.

Grup 1:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{100}{5} = 20 \text{ anys}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{2\,010}{5} - 400} = \sqrt{2} =$$

$$= 1,414\,2 \text{ anys}$$

Grup 2:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{n} = \frac{150}{5} = 30 \text{ anys}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} y_i^2}{n} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{4\,510}{5} - 900} = \sqrt{2} =$$

$$= 1,414\,2 \text{ anys}$$

Grup 3:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{5} z_i}{n} = \frac{100}{5} = 20 \text{ anys}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} z_i^2}{n} - \bar{z}^2} = \sqrt{\frac{2\,250}{5} - 400} = \sqrt{50} =$$

$$= 7,071 \text{ anys}$$

7. Suposem que els preus dels diversos articles produïts per una empresa són donats per (Taula 7.19):

Preus (€)	5-15	15-25	25-35	35-45
Freqüències	15	k	$2k$	5

Taula 7.19

a) **Dedueix el valor de *k* sabent que el preu mitjà és 25.**

b) **Calcula'n la moda i la mediana.**

a) $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i n_i}{n} = 25$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i n_i}{n} = \frac{10 \cdot 15 + 20k + 30 \cdot 2k + 40 \cdot 5}{20 + 3k} =$$

$$= \frac{350 + 80k}{20 + 3k} = 25 \rightarrow k = 30$$

b) La moda és l'interval (25, 35]

$$\left.\begin{array}{l} 45è \rightarrow 25 \\ 105è \rightarrow 35 \end{array}\right\} \rightarrow 55è \rightarrow 26,\widehat{6};\ m = 26,\widehat{6}$$

8. Determina els paràmetres de centralització i de dispersió de la variable: «nombre de pulsacions» d'un grup d'atletes després d'una cursa. Les dades obtingudes es recullen en la Taula 7.20:

Pulsacions	**Nre. d'atletes**
(70, 74]	3
(74, 78]	3
(78, 82]	7
(82, 86]	10
(86, 90]	12
(90, 94]	8

Taula 7.20

La moda és l'interval (86, 90].

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i n_i}{n} = \frac{3\,636}{43} = 84,558\,1 \text{ pulsacions}$$

$$\left.\begin{array}{l} 13è \rightarrow 82 \\ 23è \rightarrow 86 \end{array}\right\} \rightarrow 22è \rightarrow 85,6 \rightarrow m = 85,6 \text{ pulsacions}$$

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{6} |x_i - \bar{x}| n_i}{n} = \frac{201,674\,3}{43} = 4,690\,1 \text{ pulsacions}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{308\,880}{43} - 7\,150,079 =$$

$$= 33,176\,8$$

$$\sigma_x = \sqrt{33,176\,8} = 5,76 \text{ pulsacions}$$

9. *a)* **Completa la Taula 7.21 amb les dades que hi falten. Recorda que n_i, N_i i f_i indiquen, respectivament, les freqüències absolutes, les freqüències absolutes acumulades i les freqüències relatives dels diferents valors x_i de la variable *X*.**

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	4	6		6		9	4	
N_i			15		31			
f_i						0,18		

Taula 7.21

b) **Calcula'n els tres paràmetres de centralització.**

a)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	4	6	5	6	10	9	4	6
N_i	4	10	15	21	31	40	44	50
f_i	0,08	0,12	0,1	0,12	0,2	0,18	0,08	0,12

b) La moda és 5.

$$\left.\begin{array}{l} 25è \rightarrow 5 \\ 26è \rightarrow 5 \end{array}\right\} \rightarrow m = 5$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i n_i}{n} = \frac{235}{50} = 4{,}7$$

10. Un forner vol comprar una màquina que talli trossos de pasta de 500 g. Amb la talladora que li ofereix la casa *A* fa deu proves i obté els pesos següents en grams: 506, 503, 499, 498, 500, 500, 496, 503, 502 i 493. Amb la que li ofereix la casa *B* també fa deu proves i obté trossos de 504, 501, 502, 499, 498, 496, 497, 498, 502 i 503 grams.

***a*) Comprova que les mitjanes són iguals a 500 g.**

***b*) El forner vol adquirir la màquina que li permeti treballar amb una dispersió de pesos més petita. Quina màquina ha de comprar?**

Sent x_i els valors de *A* i y_i els valors de *B*, s'obté:

a) $$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{n} = \frac{5\,000}{10} = 500 \text{ g}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{n} = \frac{5\,000}{10} = 500 \text{ g}$$

b) $$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{2\,500\,128}{10} - 250\,000} =$$

$$= \sqrt{12{,}8} = 3{,}58 \text{ g}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} y_i^2}{n} - \overline{y}^2} = \sqrt{\frac{2\,500\,068}{10} - 250\,000} =$$

$$= \sqrt{6{,}8} = 2{,}61 \text{ g}$$

Ha de comprar la màquina que li ofereix la casa *B*, ja que és la que dóna menys desviació típica.

11. En estudiar la distribució d'edats d'una població s'han obtingut els resultats següents (Taula 7.22):

Edat en anys	(0, 20]	(20, 40]	(40, 60]	(60, 80]
Nre. d'individus	15		15	16

Taula 7.22

Com es pot observar a la taula, s'ha extraviat la freqüència absoluta corresponent a l'interval (20, 40].

***a*) Quin és el valor de la dada que falta si l'edat mitjana és de 35 anys?**

***b*) A partir del resultat obtingut en l'apartat *a*), esbrina la desviació típica de la variable estudiada.**

a) $$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i n_i}{n} = 35$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i n_i}{n} = \frac{10 \cdot 15 + 30n_2 + 50 \cdot 15 + 70 \cdot 16}{46 + n_2} =$$

$$= \frac{2\,020 + 30n_2}{46 + n_2}$$

$$\frac{2\,020 + 30n_2}{46 + n_2} = 35 \rightarrow n_2 = 82$$

b) $$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 n_i}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{191\,200}{128} - 1\,225} =$$

$$= \sqrt{268{,}75} = 16{,}3936 \text{ anys}$$

12. Les qualificacions de la primera avaluació de matemàtiques d'una mostra de 10 alumnes de dos grups de Batxillerat han estat les següents (Taula 7.23). Quin grup ha obtingut millors resultats? Quin és més homogeni?

Grup A	0	1	1	3	5	5	6	8	8	9
Grup B	2	2	4	4	4	5	5	6	6	8

Taula 7.23

Grup *A*:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{n} = \frac{46}{10} = 4{,}6$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{306}{10} - 21{,}16} =$$

$$= \sqrt{9{,}44} = 3{,}0725$$

Grup *B*:

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{n} = \frac{46}{10} = 4{,}6$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} y_i^2}{n} - \overline{y}^2} = \sqrt{\frac{242}{10} - 21{,}16} =$$

$$= \sqrt{3{,}04} = 1{,}7436$$

Tot i tenir la mateixa mitjana, és més homogeni el grup *B*, ja que la desviació tipus és més petita en aquest grup.

13. Sigui *X* la variable que indica el temps d'estada, en anys, de quinze treballadors en una empresa.

***X:* 10, 15, 16, 20, 22, 24, 30, 29, 24, 5, 12, 21, 2, 6, 13**

***a*) Distribueix aquestes dades en sis intervals de la mateixa amplitud, si el primer és l'interval (0, 5].**

***b*) Elabora la taula de freqüències absolutes.**

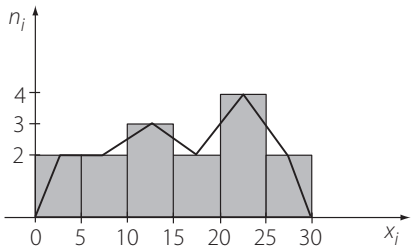
***c*) Representa l'histograma i el polígon de freqüències absolutes.**

***d*) Calcula la mitjana, la mediana i la desviació típica del temps d'estada a l'empresa.**

a) i *b*)

Intervals	(0, 5]	(5, 10]	(10, 15]	(15, 20]	(20, 25]	(25, 30]
x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i	2	2	3	2	4	2

c)



d) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i n_i}{n} = \dfrac{237,5}{15} = 15,8\widehat{3}$ anys

$\left.\begin{array}{l} 7è \to 15 \\ 9è \to 20 \end{array}\right\} \to 8è \to 17,5 \to m = 17,5$ anys

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{4\,743,75}{15} - 250,694\,4} =$$

$$= \sqrt{65,555\,5} = 8,096\,6 \text{ anys}$$

14. Considera l'histograma següent de freqüències relatives (Fig. 7.10):

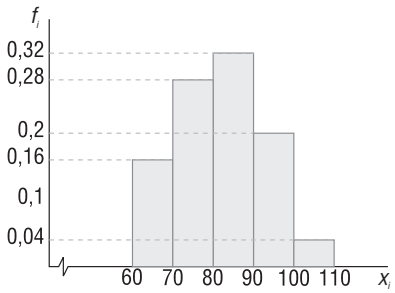


Fig. 7.10

Calcula la mitjana i la desviació típica de la variable sabent que *n* = 200.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 81,8$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i - \bar{x}^2} = \sqrt{6\,809 - 6\,691,24} =$$

$$= \sqrt{117,76} = 10,851\,7$$

15. Calcula els paràmetres de dispersió del consum diari de llet en pols en nens de dos mesos d'edat, els valors del qual s'indiquen a la Taula 7.24:

Consum (g)	Nre. de nens
$45 \leqslant x < 50$	13
$50 \leqslant x < 55$	32
$55 \leqslant x < 60$	63
$60 \leqslant x < 65$	56
$65 \leqslant x < 70$	60
$70 \leqslant x < 75$	44
$75 \leqslant x < 80$	29
$80 \leqslant x < 85$	19

Taula 7.24

Primerament cal calcular la mitjana:

$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} x_i n_i}{n} = \dfrac{20\,475}{316} = 64,79$ g, a partir d'aquí s'obté:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{8} |x_i - \bar{x}| n_i}{n} = \frac{2\,412,48}{316} = 7,634\,4 \text{ g}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1\,352\,725}{316} - 4\,198,301\,8 =$$

$$= 82,473\,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{82,473\,5} = 9,081\,5\ g$$

16. Justifica raonadament la certesa o falsedat de les afirmacions següents:

***a*) El valor de la mitjana sempre és positiu.**

***b*) La desviació típica pot ser positiva.**

***c*) La mitjana i la mediana poden ser iguals.**

***d*) La variància és el quadrat de la desviació típica.**

a) Fals. Si la variable pren valors negatius, la mitjana pot ser negativa.

b) Cert. La desviació tipus és el valor positiu de l'arrel quadrada de la variància.

c) Cert. Tot i que normalment això no passa, pot donar-se el cas que coincideixin.

d) Cert. Per definició la desviació tipus és l'arrel quadrada de la variància, per tant, la variància és el quadrat de la desviació tipus.

Unitat 8. Distribucions bidimensionals

Activitats

1. Calcula les freqüències relatives i els percentatges de cadascun dels valors de les dues variables de la Taula 8.1 definides per:

***X:* «nombre d'hores veient la televisió»**

***Y:* «nombre d'hores dormint»**

Nre. d'hores veient la televisió	Nre. d'hores dormint	Nre. de persones
4	6	3
3	7	16
3	8	20
2	9	10
1	10	1

Taula 8.1

x_i	1	2	3	4	6	7	8	9	10
f_i	0,02	0,2	0,72	0,06	0,06	0,32	0,4	0,2	0,02
p_i	2 %	20 %	72 %	6 %	6 %	32 %	40 %	20 %	2 %

2. A partir de la Taula 8.6, en què s'indica l'alçada i el pes de 24 alumnes de primer de Batxillerat:

Pes (kg)	Alçada (cm)	Pes (kg)	Alçada (cm)
68	177	58	158
59	170	64	161
62	173	70	177
63	164	66	174
71	176	58	170
59	174	58	167
55	165	72	174
51	165	57	173
58	172	55	162
83	174	59	179
80	188	55	163
49	153	52	156

Taula 8.6

***a*) Calcula la mitjana i la desviació típica de cadascuna de les dues variables.**

***b*) Dibuixa'n el diagrama de dispersió.**

***c*) La relació entre les dues variables és directa o inversa? Raona la resposta.**

***d*) Indica les coordenades del punt mitjà de la distribució.**

***e*) Comprova que el punt mitjà no forma part del diagrama de dispersió.**

a) *X:* «pes», *Y:* «alçada»

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{24} x_i}{n} = \frac{1\,482}{24} = 61,75 \text{ kg}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{24} x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{93\,232}{24} - 3\,813,062\,5} =$$

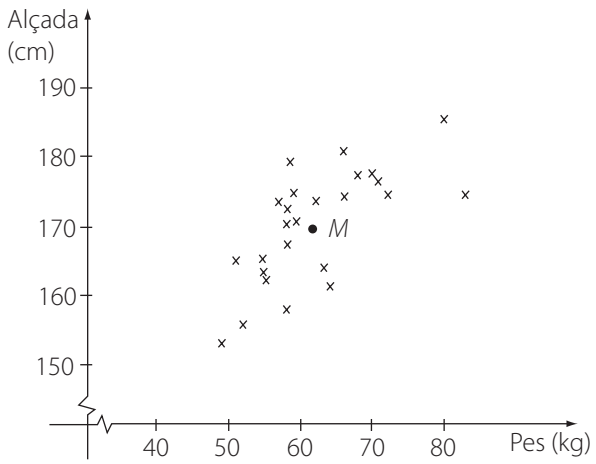
$$= \sqrt{71,604\,2} = 8,461\,9 \text{ kg}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{24} y_i}{n} = \frac{4\,065}{24} = 169,375 \text{ cm}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{24} y_i^2}{n} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{690\,043}{24} - 28\,687,890\,5} =$$

$$= \sqrt{63,901\,1} = 7,993\,8 \text{ cm}$$

b)



c) És directa, ja que el núvol de punts segueix una trajectòria creixent.

d) $M(\bar{x},\bar{y}) \rightarrow M(61{,}92; 169{,}8)$

e) Tal com s'observa a la gràfica de l'apartat *b*), el punt *M* no forma part del diagrama de dispersió.

3. La classificació final de la lliga de futbol de primera divisió de la temporada 2010-2011, després de 38 jornades, va ser la que mostra la Taula 8.7:

Equips	PG	PE	PP
1. Barcelona	30	6	2
2. R. Madrid	29	5	4
3. València	21	8	9
4. Vila-real	18	8	12
5. Sevilla	17	7	14
6. Athlètic	18	4	16
7. Atlético	17	7	14
8. Espanyol	15	4	19
9. Osasuna	13	8	17
10. Sporting	11	14	13
11. Màlaga	13	7	18
12. Racing	12	10	16
13. Saragossa	12	9	17
14. R. Societat	14	3	21
15. Llevant	12	9	17
16. Getafe	12	8	18
17. Mallorca	12	8	18
18. Deportivo	10	13	15
19. Hèrcules	9	8	21
20. Almeria	6	12	20

Taula 8.7

Representa el diagrama de dispersió de les distribucions bidimensionals següents:

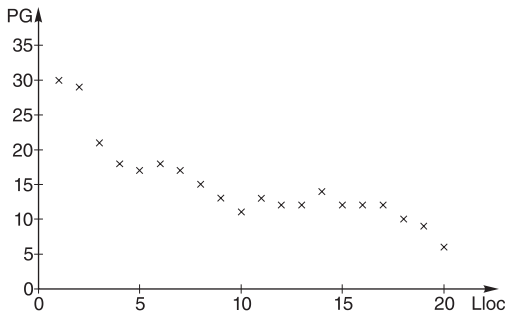
***a*) Lloc a la classificació – partits guanyats.**

***b*) Lloc a la classificació – partits empatats.**

***c*) Lloc a la classificació – partits perduts.**

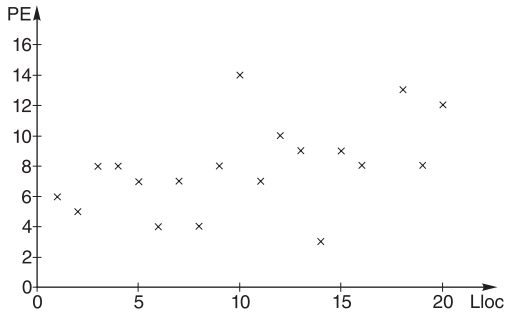
Quin tipus de relació, directa o inversa, hi ha entre les dues variables en cadascun dels tres casos?

a)



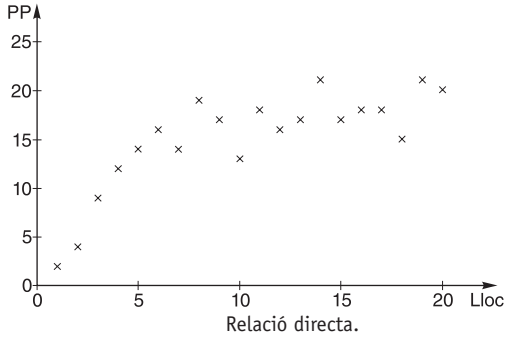
Relació inversa

b)



No es pot assegurar.

c)



Relació directa.

4. Calcula σ_{xy} de l'exemple de la Taula 8.1 utilitzant-hi la primera de les expressions de la covariància.

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})n_i}{n} = \frac{-21{,}8}{50} = -0{,}436$$

5. Donada la taula següent:

x_i	4	6	8	12
y_i	2	3	4	6

Taula 8.8

Justifica mitjançat el càlcul de *r*, i sense dibuixar el núvol de punts, que els punts del diagrama de dispersió de la distribució se situen en una línia recta creixent.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{4{,}375}{2{,}958\,039\,9 \cdot 1{,}479\,019\,9} = \frac{4{,}375}{4{,}375} = 1$$

El núvol de punts són els punts d'una recta creixent.

6. A partir de l'experiment amb dues variables que mostra la Taula 8.9:

x_i	0	4	6	8	12	14	16	22	26
y_i	4	3	8	6	7	13	2	11	0

Taula 8.9

***a*) Calcula la covariància i el coeficient de correlació lineal corresponents.**

***b*) Dibuixa'n el diagrama de dispersió.**

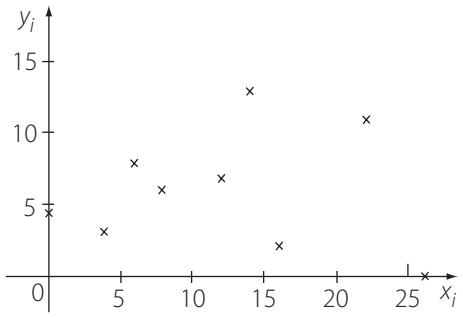
c) Relaciona el valor del coeficient amb els punts del diagrama de dispersió.

a)

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i y_i}{n} - \overline{x}\,\overline{y} = \frac{648}{9} - 12 \cdot 6 = 72 - 72 = 0$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0}{\sigma_x \sigma_y} = 0$$

b)



c) No hi ha relació, ja que $r = 0$.

7. Les alçades en polzades de 12 pares i els seus fills són les següents (Taula 8.10):

Pares	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
Fills	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

Taula 8.10

Calcula'n el coeficient de correlació lineal i extreu conclusions sobre la relació entre les dues variables estudiades.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{3,361\,111\,1}{2,656\,2 \cdot 1,800\,85} = 0,702\,7$$

La relació entre dues variables és lineal directa i bastant forta.

8. A partir de la taula de valors següent (Taula 8.11):

x_i	2	4	5	6	8	11
y_i	18	12	10	8	7	5

Taula 8.11

***a)* Calcula el coeficient de correlació lineal corresponent.**

***b)* Multiplica cada valor de x_i de la taula per 2 i suma-hi 6; multiplica cada valor de y_i per 3 i resta-hi 15. Esbrina el coeficient de correlació entre els dos nous sistemes de valors i explica per què s'obté, o no, el mateix resultat que abans.**

a) $$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-11,1\widehat{6}}{2,886\,75 \cdot 4,203\,17} = -0,920\,3$$

b)

$x_i' = 2x_i + 6$	10	14	16	18	22	28
$y_i' = 3y_i - 15$	39	21	15	9	6	0

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-67}{5,773\,5 \cdot 12,609\,5} = -0,920\,3$$

A causa de les propietats de la mitjana, de la desviació tipus i de la covariància, el valor de r no varia.

9. Calcula la covariància i el coeficient de correlació lineal en els tres casos de l'activitat 3.

T: «lloc en la classificació», *X:* «partits guanyats», *Y:* «partits empatats», *Z:* «partits perduts».

a) $$\sigma_{tx} = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i x_i}{n} - \overline{tx} = \frac{2\,437}{20} - 10,5 \cdot 14,15 = -26,725$$

$$r_{tx} = \frac{\sigma_{tx}}{\sigma_t \sigma_x} = \frac{-26,725}{5,766\,28 \cdot 4,703\,99} = -0,985\,27$$

b) $$\sigma_{ty} = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i y_i}{n} - \overline{ty} = \frac{2\,130}{20} - 10,5 \cdot 9,7 = 4,65$$

$$r_{ty} = \frac{\sigma_{ty}}{\sigma_t \sigma_y} = \frac{4,65}{5,766\,28 \cdot 2,647\,64} = 0,304\,57$$

c) $$\sigma_{tz} = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i z_i}{n} - \overline{tz} = \frac{3\,413}{20} - 10,5 \cdot 14,15 = 22,075$$

$$r_{tz} = \frac{\sigma_{tz}}{\sigma_t \sigma_z} = \frac{22,075}{5,766\,28 \cdot 4,362\,05} = 0,8776\,3$$

10. En cinc estudis estadístics s'han obtingut els coeficients de correlació lineal següents:

$r_1 = -0,98$; $r_2 = 0,93$; $r_3 = 0,05$; $r_4 = 0,71$ i $r_5 = -0,62$

Identifica a quin núvol de punts de la Figura 8.5 correspon a cadascun dels estudis. Justifica la resposta.

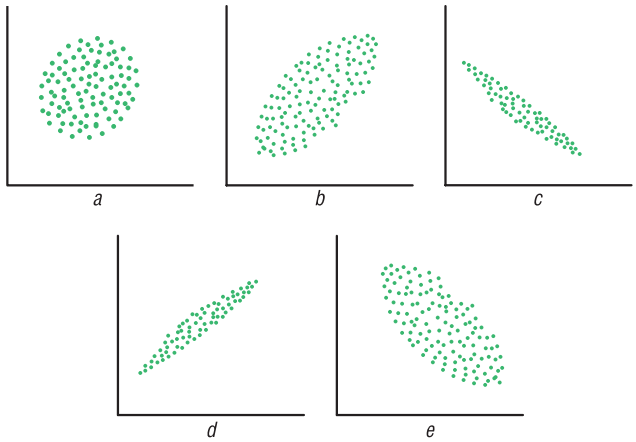


Fig. 8.5.

a) $r_3 = 0,05$; *b)* $r_4 = 0,71$; *c)* $r_1 = -0,98$;

d) $r_2 = 0,93$; *e)* $r_5 = -0,62$

11. Un centre comercial sap quants clients hi poden anar en funció de la distància, en quilòmetres, a què se situï d'un nucli de població, segons les dades que figuren en la Taula 8.12:

Nre. de clients (centenars)	8	7	6	4	2	1
Distància (quilòmetres)	15	19	25	23	34	40

Taula 8.12

a) Calcula'n la covariància i el coeficient de correlació lineal.

b) Dibuixa'n el diagrama de dispersió.

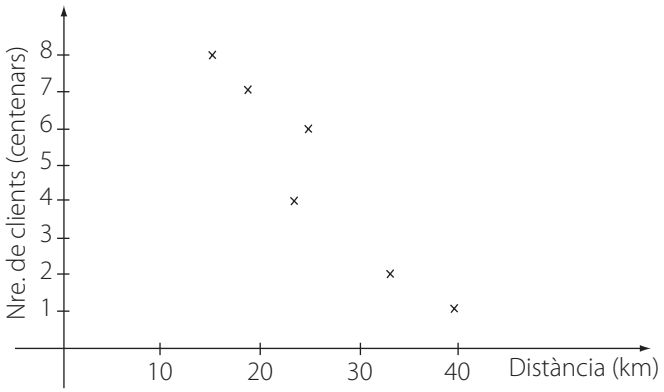
c) Si el centre comercial se situa a 30 km, quants clients pot tenir?

X: «distància»; *Y:* «nombre de clients».

a) $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i y_i}{n} - \overline{xy} = \dfrac{603}{6} - 26 \cdot 4,\widehat{6} = -20,8333$

$r_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{-20,8333}{8,5635 \cdot 2,5604} = -0,95017$

b)



c) $y - \overline{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$

$y - 4,\widehat{6} = \dfrac{-20,8333}{73,333}(x - 26) \rightarrow$

$y = -0,284x + 12,053$

$x = 30 \text{ km} \rightarrow y = -0,284 \cdot 30 + 12,053 = 3,53 \rightarrow$

353 clients

12. La Taula 8.13 recull les qualificacions de 40 alumnes en les matèries de matemàtiques i de filosofia:

Matemàtiques *X*	3	4	5	6	6	7	7	8	10
Filosofia *Y*	2	5	5	6	7	6	7	9	10
Nre. alumnes	4	6	12	4	5	4	2	1	2

Taula 8.13

a) Esbrina'n les mitjanes i les desviacions típiques, i escriu prèviament les distribucions marginals de *X* i *Y*.

b) Calcula *r*.

c) Quina nota de matemàtiques podem esperar que tregui un alumne o una alumna que té un 7,5 a filosofia? És fiable la predicció?

a)

x_i	3	4	5	6	7	8	10
n_i	4	6	12	9	6	1	2

y_i	2	5	6	7	9	10
n_i	4	18	8	7	1	2

$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{n} = \dfrac{220}{40} = 5,5$

$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i^2 n_i}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\dfrac{13134}{40} - 30,25} =$

$= \sqrt{2,6} = 1,61245$

$\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} y_i n_i}{n} = \dfrac{224}{40} = 5,6$

$\sigma_y = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{7} y_i^2 n_i}{n} - \overline{y}^2} = \sqrt{\dfrac{1378}{40} - 31,36} =$

$= \sqrt{3,09} = 1,75784$

b) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{2,6}{1,61245 \cdot 1,75784} = -0,9173$

c) $x - \overline{x} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y})$

$x - 5,5 = \dfrac{2,6}{3,09}(y - 5,6) \rightarrow x = 0,84y + 0,788$

$y = 7,5 \rightarrow x = 0,84 \cdot 7,5 + 0,788 = 7,1$

És fiable perquè la relació entre les dues variables és lineal forta.

13. El pes i l'alçada de 12 alumnes són els que figuren a la Taula 8.14:

Pes (kg)	Alçada (cm)	Pes (kg)	Alçada (cm)
70	155	74	178
63	150	65	160
72	180	62	132
60	135	67	145
66	156	65	139
70	168	68	152

Taula 8.14

a) Calcula el coeficient de correlació lineal.

b) Escriu l'equació de cadascuna de les dues rectes de regressió.

c) Dedueix l'alçada d'un alumne que pesa 64 kg.

d) Estima el pes d'un alumne que mesura 162 cm.

a) *X:* «pes»; *Y:* «alçada»

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{51,361\,275}{3,996\,57 \cdot 14,887\,61} = 0,863\,2$$

b) $y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$

$$y - 154,1\widehat{6} = \frac{51,361\,275}{15,972\,6}\left(x - 66,8\widehat{3}\right) \rightarrow$$

$$y = 3,22x - 60,75$$

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y})$$

$$x - 66,8\widehat{3} = \frac{51,361\,275}{221,641}\left(y - 154,1\widehat{6}\right) \rightarrow$$

$$x = 0,23y + 31,11$$

c) $x = 64 \text{ kg} \rightarrow y = 3,22 \cdot 64 - 60,74 = 145,1 \text{ cm}$

d) $y = 162 \text{ cm} \rightarrow x = 0,23 \cdot 162 + 31,11 = 68,6 \text{ kg}$

14. Cinc nenes de 2, 3, 5, 7 i 8 anys d'edat pesen, respectivament, 14, 20, 30, 35 i 42 kg.

a) Calcula'n el coeficient de correlació lineal.

b) Escriu l'equació de la recta de regressió que expressa el pes d'acord amb l'edat.

c) Estima quant deu pesar una nena de 6 anys.

X: «edat»; *Y:* «pes»

a) $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{22,8}{2,280\,35 \cdot 10,087\,6} = 0,991\,16$

b) $y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$

$$y - 28,2 = \frac{22,8}{5,2}(x - 5) \rightarrow y = 4,385x + 6,277$$

c) $x = 6 \text{ anys} \rightarrow y = 4,385 \cdot 6 + 6,277 = 32,6 \text{ kg}$

15. En una fàbrica de components electrònics s'han seleccionat 12 treballadors entre els que havien entrat a treballar durant els tres últims mesos. S'ha observat el nombre de peces defectuoses que han produït i se n'han obtingut les dades que mostra la Taula 8.15:

Nre. de setmanes treballades (*X*)	Nre. de peces defectuoses (*Y*)
7	26
9	20
6	28
14	16
8	23
12	18
10	24
4	26
2	38
11	22
1	32
8	25

Taula 8.15

a) Determina l'equació de la recta de regressió *y = ax + b*.

b) Estima el nombre de peces defectuoses que produiria un treballador amb cinc setmanes d'experiència.

a) $y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$

$$y - 24,8\widehat{3} = \frac{-19,72}{3,771\,2}\left(x - 7,\widehat{6}\right) \rightarrow y = -1,39x + 35,46$$

b) $x = 5 \rightarrow y = -1,39 \cdot 5 + 35,46 = 29$ peces defectuoses.

16. Per què els quocients de les divisions entre els coeficients de *x* i de *y* de les rectes de regressió donen sempre com a resultat un nombre positiu? Què passaria en el cas que tots dos quocients fossin iguals a 1? Raona les respostes.

Perquè els coeficients *a* i *c* tenen el mateix signe.

Les dues variables tindrien la mateixa desviació tipus:

$$\frac{a}{c} = 1 \rightarrow \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = 1$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 \rightarrow \sigma_x = \sigma_y$$

17. Les equacions de les rectes de regressió d'una distribució bidimensional són:

$11y = -7x + 6$, la de *Y* sobre *X*

$2x = -3y - 1$, la de *X* sobre *Y*

a) Esbrina *r* i indica el tipus de relació que hi ha entre les dues variables.

b) Calcula la mitjana de cadascuna de les variables.

c) Dedueix quina de les dues variables té una desviació típica més gran.

a)

$$11y = -7x + 6 \rightarrow$$

$$y = -\frac{7}{11}x + \frac{6}{11} \rightarrow$$

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = -\frac{7}{11}$$

$$2x = -3y - 1 \rightarrow$$

$$x = -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$c = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = -\frac{3}{2}$$

$$r = \sqrt{ac} = \sqrt{-\frac{7}{11}\left(-\frac{3}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{21}{22}} = 0{,}977$$

La relació és lineal directa molt forta.

b)

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{7}{11}x + \frac{6}{11} \\ x = -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

$$x = -\frac{3}{2}\left(-\frac{7}{11}x + \frac{6}{11}\right) - \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$x = \frac{21}{22}x - \frac{9}{11} - \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{22}x = -\frac{29}{22} \rightarrow x = -29 \rightarrow y = 19$$

$$\overline{x} = -29,\ \overline{y} = 19$$

c)

$$\frac{a}{c} = \frac{\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}}{\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}} = \frac{-\frac{7}{11}}{-\frac{3}{2}} = \frac{14}{33} \rightarrow$$

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{14}{33} \rightarrow \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{14}{33}} = 0{,}651\,34$$

d'on: $\sigma_x > \sigma_y$

18. De dues variables, *X* i *Y*, tenim la informació següent: la variància de *X* és 3, la mitjana i la desviació típica de *Y* són 1 i 2, respectivament, i l'equació de la recta de regressió de *Y* sobre *X* és $2x + 3y = 6$.

$$\sigma_x^2 = 3,\ \overline{y} = 1,\ \sigma_y = 2,$$

$$2x + 3y = 6 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Esbrina:

***a*) La mitjana de *X*.**

***b*) La covariància de *X* i *Y*.**

***c*) El coeficient de correlació lineal.**

***d*) L'equació de la recta de regressió de *X* sobre *Y*.**

a)

$$\overline{y} = 1 \rightarrow 1 = -\frac{2}{3}x + 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \overline{x} = \frac{3}{2}$$

b)

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = -\frac{2}{3} \rightarrow$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2}{3}\cdot\sigma_x^2 = -\frac{2}{3}\cdot 3 = -2$$

c)

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{-2}{\sqrt{3}\cdot 2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}577\,35$$

d)

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y}) \rightarrow$$

$$x - \frac{3}{2} = \frac{-2}{4}(y - 1) \rightarrow$$

$$x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(y - 1) \rightarrow$$

$$x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$x = -\frac{1}{2}y + 2$$

Activitats finals

1. Calcula la covariància i el coeficient de correlació lineal de les dues variables de taula següent:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	1	4	5	3	8	7	9	6

Taula 8.16

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i y_i}{n} - \overline{x}\,\overline{y} = 5{,}\widehat{4}$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = 0{,}81\widehat{6}$$

2. En mesurar l'alçada *X* en metres i el pes *Y* en quilograms de nou infants acabats de néixer, s'han obtingut els resultats següents:

$\overline{x} = 0,5;\ \sigma_x = 0,026;\ \overline{y} = 3,4;\ \sigma_y = 0,392;\ \sigma_{xy} = 0,01$

Calcula'n el coeficient de correlació lineal i escriu l'equació de la recta de regressió de *Y* sobre *X*.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0,01}{0,026 \cdot 0,392} = 0,981\,16$$

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$$

$$y - 3,4 = \frac{0,01}{0,000\,676}(x - 0,5) \rightarrow y = 14,793x - 3,996$$

3. Els 30 alumnes d'una classe de primer de Batxillerat han obtingut les notes següents en dues proves diferents de matemàtiques:

(73, 29), (41, 24), (83, 34), (71, 27), (39, 24), (60, 26), (51, 35), (41, 18), (85, 33), (88, 39), (44, 27), (71, 35), (52, 25), (74, 29), (50, 13), (42, 13), (85, 40), (53, 23), (85, 42), (44, 22), (66, 25), (60, 21), (33, 26), (43, 19), (76, 29), (51, 25), (57, 19), (25, 17), (40, 17) i (76, 35).

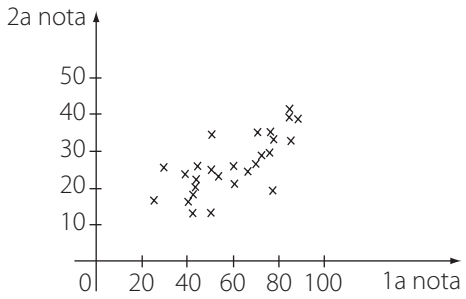
La primera nota de cada parell correspon a la primera prova, puntuada sobre 100 punts, i l'altra és de la segona prova, puntuada sobre 50 punts.

***a*) Dibuixa'n el diagrama de dispersió.**

***b*) Calcula'n el coeficient de correlació lineal.**

***c*) Compara els dos resultats per donar la màxima informació sobre la relació que hi ha entre les dues notes.**

a)



b) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{103,367\,79}{17,619\,1 \cdot 7,582\,8} = 0,773\,7$

c) La relació entre les dues notes és lineal, directa i bastant forta.

4. S'anoten les alçades de vuit pares i la dels fills hereus, i s'obtenen les dades següents:

Pares	160	171	178	166	169	159	175	165
Fills	161	170	176	166	170	163	173	180

Taula 8.17

Fes un estudi d'aquesta distribució.

El coeficient de correlació és aproximadament 0,64. Per tant, podem dir que les dues distribucions tenen una relació lineal directa i feble.

5. S'ha mesurat la longitud de les mans (*x*) i la pressió sanguínia (*y*) de nou persones. Els resultats obtinguts s'indiquen a la taula següent:

x	19	19	18,5	18	18	17,5	17	17	16
y	12	11,5	12	12,5	13	13	14,5	14	15

Taula 8.18

A la vista dels resultats, fes un estudi de la relació que hi ha entre la longitud de la mà i la pressió sanguínia en una persona.

El coeficient de correlació és aproximadament –0,95. Per tant, podem dir que la relació és lineal, inversa i molt forta.

6. A partir de la taula de valors 8.19, calcula'n el coeficient de correlació lineal i analitza'n el significat. Escriu l'equació de cadascuna de les dues rectes de regressió.

y \ x	1	2	3	4	5
1					1
2		6	1	3	
3	2	1	4		
4	1	1			

Taula 8.19

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0,425}{1,071\,21 \cdot 0,741\,62} = -0,534\,97 \rightarrow$$

relació indirecta dèbil

Y sobre *X*:

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$$

$$y - 2,5 = \frac{-0,425}{1,147\,5}(x - 2,55) \rightarrow y = -0,37x + 3,44$$

X sobre *Y*:

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y})$$

$$x - 2,55 = \frac{-0,425}{0,55}(y - 2,5) \rightarrow x = -0,773y + 4,48$$

7. En una distribució bidimensional s'han obtingut els paràmetres estadístics següents:

$\overline{x} = 5,\ \overline{y} = 6,\ \sigma_x^2 = 5,\ \sigma_y^2 = 8,5$ **i** $r = 0,997$

Calcula'n la covariància i escriu l'equació de la recta de regressió que expressa la variable *X* en funció de la variable *Y*.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \rightarrow \sigma_{xy} = r\sigma_x\sigma_y = 0{,}997 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8{,}5} = 6{,}5$$

X sobre *Y*:

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y})$$

$$x - 5 = \frac{6{,}5}{8{,}5}(y - 6) \rightarrow x = 0{,}765y + 0{,}412$$

8. En un estudi fet sobre un grup de pares i els seus fills, l'alçada mitjana dels pares és d'1,68 m, amb una desviació típica de 5 cm, i l'alçada mitjana dels fills és d'1,70 m, amb una desviació típica de 7,5 cm. El coeficient de correlació entre les alçades de pares i fills és 0,7.

***a)* Calcula'n la covariància de la distribució.**

***b)* Estima l'alçada d'un fill si la que té el seu pare és d'1,66 m.**

***c)* Esbrina l'alçada d'un pare sabent que l'alçada del fill és d'1,72 m.**

X: «alçada dels pares»; *Y*: «alçada dels fills»

$\overline{x} = 1{,}68;\ \sigma_x = 0{,}05;\ \overline{y} = 1{,}7;\ \sigma_y = 0{,}075;\ r = 0{,}7$

a) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \rightarrow \sigma_{xy} = r\sigma_x\sigma_y =$

$= 0{,}7 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}075 = 0{,}002\,625$

b) *Y* sobre *X*:

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$$

$$y - 1{,}7 = \frac{0{,}002\,625}{0{,}002\,5}(x - 1{,}68) \rightarrow y = 1{,}05x - 0{,}064$$

$$x = 1{,}66 \rightarrow y = 1{,}05 \cdot 1{,}66 - 0{,}064 = 1{,}68 \text{ m}$$

c) *X* sobre *Y*:

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y})$$

$$x - 1{,}68 = \frac{0{,}002\,625}{0{,}005\,625}(y - 1{,}7) \rightarrow x = 0{,}4\widehat{6}y + 0{,}88\widehat{6}$$

$$y = 1{,}72 \rightarrow x = 0{,}4\widehat{6} \cdot 1{,}72 + 0{,}88\widehat{6} = 1{,}69 \text{ m}$$

9. Els parells de valors següents indiquen l'edat i l'alçada en decímetres, en aquest ordre, d'un grup de set nens:

(7, 11), (8, 12), (8, 13), (9, 13), (9, 14), (9, 15) i (10, 18)

***a)* Calcula'n el coeficient de correlació lineal i indica quin tipus de relació hi ha entre les dues variables.**

***b)* Determina l'equació de la recta de regressió que expressa l'edat en funció de l'alçada.**

***c)* Quina edat hauria de tenir un nen que mesures 16 dm?**

a) El coeficient de correlació lineal és:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0{,}91$$

per tant, hi ha una relació lineal directa molt forta.

b) $x = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} y + \overline{x} - \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\overline{y} \rightarrow x = 0{,}38y + 3{,}27$

c) $x = 0{,}38 \cdot 16 + 3{,}27 \approx 9$ anys

10. La Taula 8.20 expressa el valor mitjà dels preus en dòlars de les accions i les obligacions a la borsa de Nova York entre els anys 1950 i 1959:

Anys	Accions ($)	Obligacions ($)
1950	32,22	102,43
1951	39,87	100,93
1952	41,85	97,43
1953	43,23	97,81
1954	40,06	98,32
1955	53,29	100,07
1956	54,14	97,08
1957	49,12	91,59
1958	40,71	94,85
1959	55,15	94,65

Taula 8.20

Calcula el coeficient de correlació lineal entre les variables següents i interpreta cadascun dels resultats:

***a)* Anys-accions.**

***b)* Anys-obligacions.**

***c)* Accions-obligacions.**

X: «anys»; *Y*: «accions»; *Z*: «obligacions»

a) $r_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{14{,}728}{2{,}872\,28 \cdot 7{,}195\,53} = 0{,}712\,6$

Existeix una relació directa bastant forta entre els anys i les accions.

b) $r_{xz} = \dfrac{\sigma_{xz}}{\sigma_x \sigma_z} = \dfrac{-7{,}112}{2{,}872\,28 \cdot 3{,}060\,97} = -0{,}808\,9$

La relació entre els anys i les obligacions és lineal inversa i bastant forta.

c) $r_{yz} = \dfrac{\sigma_{yz}}{\sigma_y \sigma_z} = \dfrac{-10{,}941\,6}{7{,}195\,53 \cdot 3{,}060\,97} = -0{,}496\,7$

La relació és lineal inversa força dèbil entre les accions i les obligacions.

11. Les equacions de les rectes de regressió d'una distribució bidimensional són:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{26}{3},\ (Y \text{ sobre } X)$$

$$x = -0{,}5y + 7,\ (X \text{ sobre } Y)$$

Calcula: $\overline{x}$, $\overline{y}$ i r.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + \frac{26}{3} \\ x = -0{,}5y + 7 \end{array}\right\} \rightarrow y = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}y + 7\right) + \frac{26}{3} \rightarrow$$

$$y = \frac{1}{3}y - \frac{14}{3} + \frac{26}{3}$$

$$\frac{2}{3}y = 4 \rightarrow \overline{y} = 6$$

$$x = -\frac{1}{2} \cdot 6 + 7 = -3 + 7 = 4 \rightarrow \overline{x} = 4$$

$$r = \sqrt{\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}} = -\sqrt{-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -0{,}577\,35$$

12. El consum d'energia *per capita* en milers de kWh i la renda *per capita* en milers de dòlars en sis països de la UE són els següents (Taula 8.21):

	Consum	Renda
Alemanya	5,7	11,1
Bèlgica	5,0	8,5
Dinamarca	5,1	11,3
Espanya	2,7	4,5
França	4,6	9,9
Itàlia	3,1	6,5

Taula 8.21

a) **Calcula *r* i interpreta'n el resultat.**

b) **Quina predicció podem fer sobre el consum d'energia *per capita* a Grècia si sabem que en aquest país la renda és de 4,4 milers de dòlars? És fiable la predicció obtinguda?**

X: «renda»; *Y:* «consum»

a) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{2{,}507\,8}{2{,}464\,9 \cdot 1{,}091\,9} = 0{,}931\,79$

Existeix una relació lineal directa i forta entre les dues variables.

b) *Y* sobre *X:*

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$$

$$y - 4{,}3\widehat{6} = \frac{2{,}507\,8}{6{,}075\,5}\left(x - 8{,}6\widehat{3}\right) \rightarrow y = 0{,}413x + 0{,}803$$

$$x = 4{,}4 \rightarrow y = 0{,}413 \cdot 4{,}4 + 0{,}803 = 2{,}6 \text{ milers de kwh}$$

La predicció és molt fiable, ja que $r \simeq 1$.

13. A partir d'un estudi estadístic efectuat a una mostra de 100 estudiants, s'ha observat una alçada mitjana de 155 cm, amb una desviació típica de 15,5 cm. A més, s'ha obtingut la recta de regressió de *X* (pes en quilograms) sobre *Y* (alçada en centímetres):

$$x = \frac{2}{3}y - \frac{160}{3}$$

Determina:

a) **El pes mitjà dels 100 estudiants.**

b) **La covariància de *X* i *Y*.**

c) **El signe del coeficient de correlació entre el pes i l'alçada.**

a) $\overline{y} = 155 \text{ cm} \rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot 155 - \frac{160}{3} = 50 \rightarrow \overline{x} = 50 \text{ kg}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} \rightarrow \sigma_{xy} = \frac{2}{3}\sigma_y^2 = \frac{2}{3} \cdot 15{,}5^2 = 160{,}1\widehat{6}$

c) $r > 0$ perquè $\sigma_{xy} > 0$.

14. A les biblioteques de sis poblacions s'ha analitzat l'afluència de lectors (*X* en milers de persones) i el nombre de llibres prestats (*Y*). Les dades es recullen a la Taula 8.22:

X	0,5	1	1,3	1,7	2	2,5
Y	180	240	250	300	340	400

Taula 8.22

a) **Quina és la mitjana del nombre de llibres prestats en el conjunt de totes les biblioteques?**

b) **Escriu l'equació de la recta de regressió que expressa el nombre de llibres que hi ha en préstec en funció de l'afluència de lectors.**

c) **Si acudissin 1 500 lectors a una biblioteca, quants llibres es deixarien en préstec?**

a) $\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} y_i}{n} = \dfrac{1\,710}{6} = 285$ llibres

b) *Y* sobre *X:* $y - \overline{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$

$$y - 285 = \frac{46{,}\widehat{6}}{0{,}43}(x - 1{,}5) \rightarrow y = 108{,}53x + 122{,}21$$

c) $x = 1{,}5$ és la mitjana de la variable *X*; per tant, $y = 285$ llibres.

15. La creixent inclinació de la torre de Pisa ha generat nombrosos estudis sobre la seva futura estabilitat. A la Taula 8.23 es presenten les mesures de la seva inclinació entre els anys 1978 i 1987. Les dades d'inclinació s'han codificat com a dècimes de mil·límetre que depassen els 2,9 m, de manera que la inclinació l'any 1978, que va ser de 2,966 7 m, figura a la taula com a 667.

Any	Inclinació	Any	Inclinació
1978	667	1983	713
1979	673	1984	717
1980	688	1985	725
1981	696	1986	742
1982	698	1987	757

Taula 8.23

a) Creus que la inclinació de la torre té una tendència lineal que augmenta amb el temps? Justifica la resposta.

b) Calcula l'equació de la recta de regressió de la inclinació sobre el temps.

c) El 1918 la inclinació de la torre era de 2,9071 m. Quin en seria el valor ajustat segons la recta que has obtingut a l'apartat anterior? A què es deu la diferència entre els dos valors?

X: «anys»; *Y:* «inclinació»

a) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{77,8}{2,872\,28 \cdot 27,386\,86} = 0,989\,03$

Efectivament, existeix una tendència lineal creixent, ja que $r \simeq 1$.

b) *Y* sobre *X:*

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$$

$$y - 707,6 = \frac{77,8}{8,25}(x - 1982,5) \rightarrow y = 9,43x - 17\,987,976$$

c) $x = 1\,918 \rightarrow y = 9,43 \cdot 1\,918 - 17\,987,976 = 98,764 \simeq 99$

La inclinació estimada seria de 2,909 9 m, la diferència entre els dos valors és perquè l'any 1918 és molt més petit que el primer any que figura a la taula, per tant, el valor estimat no és fiable.

16. Durant un mes s'han observat les despeses de manutenció i l'ingrés total de 6 famílies, i els resultats obtinguts són els que mostra la Taula 8.24:

Despeses en milers d'euros	1,5	1,8	2,4	2,8	3	3,2
Ingressos en milers d'euros	2,4	3,2	3,6	4,2	4,4	4,5

Taula 8.24

a) Calcula'n el coeficient de correlacció lineal.

b) Determina l'equació de la recta de regressió que expressa les despeses en funció dels ingressos.

c) Quines despeses tindria una família amb un ingrés mensual de 3,8 milers d'euros?

X: «ingressos»

Y: «despeses»

a) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{0,454\,2}{0,744\,8 \cdot 0,621\,2} = 0,981\,7$

b) *Y* sobre *X:*

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$$

$$y - 2,45 = \frac{0,454\,2}{0,554\,72}(x - 3,71\widehat{6}) \rightarrow y = 0,82x - 0,593$$

c) $x = 3,8$

$y = 0,82 \cdot 3,8 - 0,593 = 2,5$ milers d'euros

17. Les notes de matemàtiques i d'economia de deu alumnes són:

Nota de matemàtiques	6	8	4	5	9	5	3	2	7	4
Nota d'economia	7	7	4	7	10	4	5	4	8	5

Taula 8.25

a) Quin tipus de correlació hi ha entre les dues notes?

b) Calcula la nota esperada d'economia d'un alumne que ha tingut un 7,5 en matemàtiques.

c) Quina nota de matemàtiques tindria un alumne que ha obtingut un 9 en economia?

a) El coeficient de correlació és $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0,86$, per tant hi ha una correlació lineal positiva forta.

b) $y = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} x + \overline{y} - \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\overline{x} \rightarrow y = 0,78x + 1,94$

La nota esperada és 7,8 aproximadament.

c) $x = 0,94y - 0,45$

$x = 0,94 \cdot 9 - 0,45 = 8$

La nota esperada és 8 aproximadament.

18. La taula següent correspon als pesos i les alçades d'un grup de persones:

Pes (kg)	71	54	70	69	69	71	55	52
Alçada (cm)	175	160	172	169	166	174	164	162

Taula 8.26

Tenint en compte les dades de la taula, quin és el pes estimat d'una persona d'1,7 m d'alçada? I l'alçada d'una persona que pesa 60 kg? Valora si els resultats obtinguts són fiables o no.

La recta de regressió lineal és:

$$x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} y + \overline{x} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\overline{y} \rightarrow x = 1,19y - 136,03$$

$$x = 1,19 \cdot 170 - 136,03 = 66,27 \text{ kg}$$

El pes estimat d'una persona de 1,7 m és de 66,27 kg.

$$y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} x + \overline{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\overline{x} \rightarrow y = 0,63x + 127,14$$

$$y = 0,63 \cdot 60 + 127,14 = 164,94 \text{ cm}$$

L'alçada estimada d'una persona de 60 kg és de 165,48 cm.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0,87$$

Tenint en compte que el coeficient de correlació és de 0,87, podem dir que els resultats són força fiables.

19. La taula següent relaciona la nota mitjana de diferents matèries a la prova de les PAU de tot Catalunya, i la mitjana de les notes obtingudes de les mateixes matèries pels alumnes d'una escola determinada, també a les PAU.

	Catalunya	Escola
Llengua catalana	6,18	6,35
Llengua castellana	6,19	7,39
Anglès	6,04	6,35
Història de la filosofia	6,22	6,46
Història	6,49	6,71
Geografia	6,27	7,6
Economia de l'empresa	5,82	6,68
Matemàtiques aplicades	5,66	6
Història de l'art	6,36	
Matemàtiques		6,17

Taula 8.27

***a*) Amb les vuit primeres matèries de la taula:**

***a*$_1$) Calcula la covariància i el coeficient de correlació lineal de les dues variables.**

***a*$_2$) Determina l'equació de cadascuna de les dues rectes de regressió.**

***b*) A partir dels resultats obtinguts en l'apartat anterior, completa la taula.**

***c*) Són fiables els resultats obtinguts en l'apartat anterior? Justifica la resposta.**

a$_1$) $\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y} = 0,06$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0,49$$

a$_2$) $y = 1,03x + 0,43$

$x = 0,24y + 4,51$

b) Mitjana de les notes de l'escola en història de l'art $\rightarrow$ 6,98

Mitjana de les notes de Catalunya en matemàtiques $\rightarrow$ 5,99

c) No gaire fiables, ja que el coeficient de correlació és baix (0,49).

Unitat 9. Probabilitat

Activitats

1. Escriu l'espai de successos *S* associat a l'experiment aleatori *E:* «llançar una moneda a l'aire».

$S = \{\{c\},\{x\},\{c,x\},\varnothing\}$

2. Utilitzant nombres combinatoris, demostra que el nombre de successos associats a un experiment aleatori de 3, 4 i *n* elements és, respectivament, 8, 16 i 2^n.

$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}= 1+3+3+1= 8$$

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}= 1+4+6+4+1=16$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$$

3. Es consideren els successos *A:* «obtenir un nombre primer» i *B:* «obtenir un nombre més petit que 10» de l'experiment aleatori *E:* «treure una bola d'una urna amb 20 boles numerades de l'1 al 20».

a) **Defineix *A* i *B* per extensió.**

b) **Esbrina els successos:**

$\overline{A}, \overline{B}, A\cup B, A\cap B, \overline{A}\cup B, A\cup\overline{B}, A-B$ **i** $B-A$

c) **Defineix per comprensió els successos de l'apartat anterior.**

a) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$;

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $\overline{A} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

$\overline{B} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$A\cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19\}$

$A\cap B = \{2, 3, 5, 7\}$

$\overline{A}\cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

$A\cup\overline{B} = \{2, 3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$A - B = \{11, 13, 17, 19\}$

$B - A = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

c) $\overline{A}$: «obtenir un nombre no primer»

$\overline{B}$: «obtenir un nombre més gran o igual que 10»

$A\cup B$: «obtenir un nombre primer o un nombre més petit que 10»

$A\cap B$: «obtenir un nombre primer i més petit que 10»

$\overline{A}\cup B$: «obtenir un nombre no primer o un nombre més petit que 10»

$A\cup\overline{B}$: «obtenir un nombre primer o un nombre més gran o igual que 10»

$A - B$: «obtenir un nombre primer que sigui més gran o igual que 10»

$B - A$: «obtenir un nombre més petit que 10 que no sigui primer»

4. Justifica raonadament:

a) $A\cap B\subset A$ **i** $A\cap B\subset B$

b) $A\subset A\cup B$ **i** $B\subset A\cup B$

c) $A\cap B\subset A\cup B$

d) $A\subset A, \varnothing\subset A$ **i** $\varnothing\subset B$

a) Sempre que es verifica $A\cap B$ es verifica A i es verifica B, per tant $A\cap B\subset A$ i $A\cap B\subset B$.

b) Sempre que es verifica A es verifica $A\cup B$, per tant, $A\subset A\cup B$; i sempre que es verifica B es verifica $A\cup B$, per tant, $B\subset A\cup B$.

c) Sempre que es verifica $A\cap B$ es verifica A i es verifica B, per tant també es verifica $A\cup B$, per tant $A\cap B\subset A\cup B$.

d) Qualsevol succés està inclòs en ell mateix. El succés impossible està inclòs sempre en qualsevol succés.

5. Demostra que *A – B* i *B – A* constitueixen successos incompatibles.

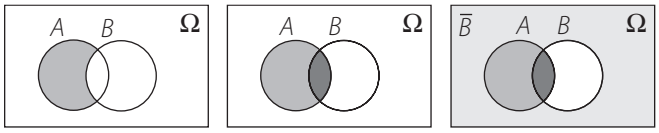
$$(A-B)\cap(B-A)=(A\cap\overline{B})\cap(B\cap\overline{A})=$$
$$=A\cap(\overline{B}\cap B)\cap\overline{A}=A\cap\varnothing\cap\overline{A}=\varnothing$$

6. Justifica mitjançant diagrames les igualtats que es mostren a continuació:

a) $A-B=A-(A\cap B)=A\cap\overline{B}$

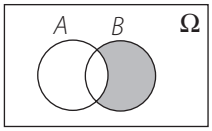
b) $B-A=B-(A\cap B)=\overline{A}\cap B$

a)

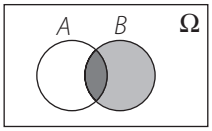


$A - B$ $\quad$ $A-(A\cap B)$ $\quad$ $A\cap\overline{B}$

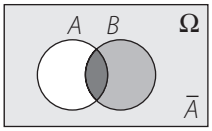
b)



$B - A$

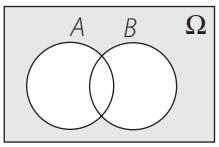


$B - (A \cap B)$

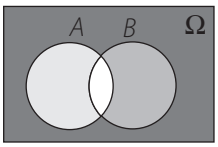


$\overline{A} \cap B$

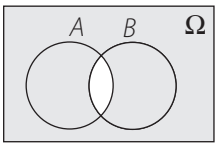
7. Demostra gràficament la propietat 7 de les operacions amb successos.



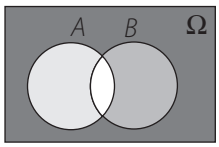
$\overline{A \cup B}$



$\overline{A} \cap \overline{B}$



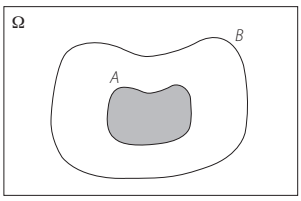
$\overline{A \cap B}$



$\overline{A} \cup \overline{B}$

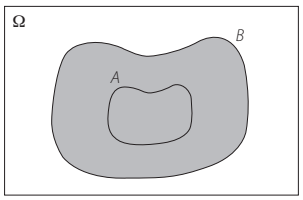
8. Si suposem que *A* i *B* són dos successos tals que $A \subset B$, justifica que:

a) $A \cap B = A$



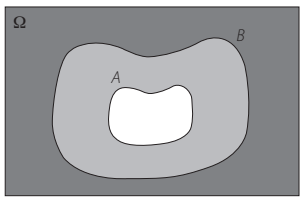
$A \cap B = A$

b) $A \cup B = B$



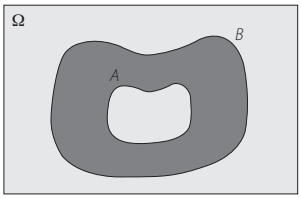
$A \cup B = B$

c) $\overline{B} \subset \overline{A}$



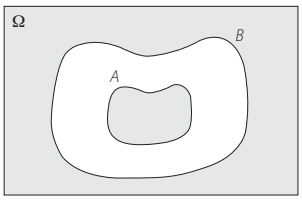
$\overline{B} \subset \overline{A}$

d) $\overline{A} \cup B = \Omega$



$\overline{A} \cup B = \Omega$

e) $A \cap \overline{B} = \varnothing$



$A \cap \overline{B} = \varnothing$

9. En l'experiment aleatori *E:* «llançar dos dardells a la diana», considerem els successos *A:* «fer diana amb el primer» i *B* «fer diana amb el segon». Expressa en funció de *A* i *B* els successos:

***a*) Fer diana amb el primer però no el segon.**

***b*) Fer diana amb algun dels dos.**

***c*) Fallar els dos.**

***d*) Fer diana només amb un.**

a) $A \cap \overline{B}$

b) $A \cup B$

c) $\overline{A} \cap \overline{B}$

d) $(A - B) \cup (B - A)$

10. En l'experiment aleatori «extreure una carta d'una baralla de 48 cartes», calcula la probabilitat dels successos següents:

***a*) Treure una carta que sigui un nombre primer.**

***b*) Que la carta que extraiem no sigui un as.**

***c*) Que sigui una figura d'espases.**

***d*) Treure una carta de copes.**

a) *A:* «extreure una carta que sigui un nombre primer» $\text{card}(A) = 20$

$p(A) = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$

b) *B:* «extreure una carta que no sigui as» → $\text{card}(B) = 44$

$p(B) = \frac{44}{48} = \frac{11}{12}$

c) *C:* «extreure una figura d'espases» → $\text{card}(C) = 3$

$p(C) = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$

d) *D:* «extreure una carta que sigui copes» → $\text{card}(D) = 12$

$p(D) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$

11. D'una classe on hi ha 20 noies i 15 nois escollim dos alumnes a l'atzar. Calcula la probabilitat que:

a) Siguin dues noies.

b) Siguin un noi i una noia.

c) Entre els escollits hi hagi un alumne o una alumna determinats.

a) *A:* «que siguin dues noies»

$$p(A) = \frac{C_{20,2}}{C_{35,2}} = \frac{\frac{20 \cdot 19}{2}}{\frac{35 \cdot 34}{2}} = \frac{10 \cdot 19}{35 \cdot 17} = \frac{2 \cdot 19}{7 \cdot 17} = \frac{38}{119}$$

b) *B*: «que siguin un noi i una noia»

$$p(B) = \frac{20 \cdot 15}{C_{35,2}} = \frac{20 \cdot 15}{\frac{35 \cdot 34}{2}} = \frac{20 \cdot 15}{35 \cdot 17} = \frac{20 \cdot 3}{7 \cdot 17} = \frac{60}{119}$$

c) *C:* «que hi hagi l'alumne X»

$$p(C) = \frac{34}{C_{35,2}} = \frac{34}{\frac{35 \cdot 34}{2}} = \frac{2}{35}$$

12. A la cua de la taquilla d'un cinema hi ha 14 persones. Quina és la probabilitat que dues persones determinades estiguin juntes?

A: «que dues persones determinades estiguin juntes»

$$p(A) = \frac{13P_2}{P_{14}} = \frac{13 \cdot 2}{14!} = \frac{13 \cdot 2}{14 \cdot 13 \cdot 12!} = \frac{1}{7 \cdot 12!}$$

13. Calcula la probabilitat que, quan girem una fitxa de dòmino, s'obtingui:

a) Un nombre de punts més gran que 8.

b) Un nombre de punts que sigui múltiple de 3.

c) Una fitxa doble.

d) Una fitxa en què la suma dels punts sigui 7.

a) *A:* «obtenir més de 8 punts»

$$p(A) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

b) *B:* «obtenir un nombre de punts que sigui múltiple de 3»

$$p(B) = \frac{9}{28}$$

c) *C:* «obtenir una fitxa doble»

$$p(C) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

d) *D:* «obtenir 7 punts»

$$p(D) = \frac{3}{28}$$

14. Llancem dos daus enlaire. Calcula les probabilitats:

a) Suma de punts igual a 10.

b) Suma de punts senars.

c) Almenys un 6 en un dels daus.

d) Només un 6 en un dau.

a) *A:* «obtenir 10 punts»

$$p(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

b) *B:* «obtenir un nombre senar de punts»

$$p(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

c) *C:* «obtenir almenys 6 punts en un dau»

$$p(C) = \frac{11}{36}$$

d) *D:* «obtenir només un 6 en un dau»

$$p(D) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

15. Es llança una moneda enlaire quatre vegades.

a) Quina és la probabilitat que surtin 4 cares?

b) I que surtin 2 cares i 2 creus?

c) I almenys 2 creus?

a) *A:* «obtenir 4 cares»

$$p(A) = \frac{1}{16}$$

b) *B:* «obtenir 2 cares i 2 creus»

$$p(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

c) *C:* «obtenir almenys 2 creus»

$$p(C) = \frac{11}{16}$$

16. Donats dos successos *A* i *B*, tals que $p(A) = \frac{3}{8}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ i $p(A \cup B) = \frac{5}{8}$, calcula:

a) $p(A \cap B)$ **b)** $p(\overline{A})$

c) $p(\overline{B})$ **d)** $p(\overline{A} \cap \overline{B})$

e) $p(\overline{A \cap B})$ **f)** $p(\overline{A} \cap B)$

g) $p(A \cap \overline{B})$

a) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

b) $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

c) $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

d) $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

e) $p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

f) $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

g) $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

17. Sabem que la probabilitat que demà plogui és 0,4; que plogui demà passat és 0,3 i que plogui cadascun dels dos dies, 0,2. Calcula la probabilitat que:

***a)* Plogui, com a mínim, un dels dos dies.**

***b)* No plogui cap dia.**

***c)* Només plogui demà.**

***d)* Plogui només un dels dos dies.**

$p(A) = 0,4;\ p(B) = 0,3$ i $p(A \cap B) = 0,2$

a) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$

$= 0,4 + 0,3 - 0,2 = 0,5$

b) $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) =$

$= 1 - 0,5 = 0,5$

c) $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0,4 - 0,2 = 0,2$

d) $p[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = p(A \cap \overline{B}) + p(\overline{A} \cap B) =$

$= p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) =$

$= p(A) + p(B) - 2p(A \cap B) =$

$= 0,4 + 0,3 - 2 \cdot 0,2 = 0,3$

18. Un dau està trucat, de manera que les probabilitats d'obtenir les diferents cares són proporcionals al nombre de punts que hi figuren. Si llancem el dau una vegada, calcula la probabilitat:

***a)* De cadascun dels successos elementals.**

***b)* D'obtenir un nombre de punts més gran que 4.**

***c)* D'aconseguir un nombre senar de punts.**

Sigui $S_i = \{i\}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

tenim que $p(S_6) = 6p(S_1), p(S_5) = 5p(S_1),$

$p(S_4) = 4p(S_1), p(S_3) = 3p(S_1), p(S_2) = 2p(S_1)$, i, per tant:

$p(S_6) + p(S_5) + p(S_4) + p(S_3) + p(S_2) + p(S_1) =$

$= 6p(S_1) + 5p(S_1) + 4p(S_1) + 3p(S_1) + 2p(S_1) + p(S_1) =$

$= 21p(S_1) = 1 \rightarrow p(S_1) = \frac{1}{21}$

a) $p(S_1) = \frac{1}{21}, p(S_2) = \frac{2}{21}, p(S_3) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7},$

$p(S_4) = \frac{4}{21}, p(S_5) = \frac{5}{21}, p(S_6) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

b) *B:* «obtenir més de 4 punts»

$p(B) = p(S_5) + p(S_6) = \frac{5}{21} + \frac{2}{7} = \frac{11}{21}$

c) *C:* «obtenir un nombre senar de punts»

$p(C) = p(S_1) + p(S_3) + p(S_5) =$

$= \frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

19. Llancem dos daus i considerem el nombre de punts de les cares superiors.

Calcula la probabilitat dels successos següents:

***a)* *A:* «el nombre de punts de les dues cares superiors suma 7».**

***b)* *B:* «el producte dels nombres de les cares superiors és 12».**

***c)* $A \cap B$; $A \cup B$; $\overline{A}$; $\overline{B}$.**

a) $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $p(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

c) $p(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$p(A \cup B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

Activitats finals

1. Demostra que donats dos successos *A* i *B* qualssevol, associats a un experiment aleatori determinat, es verifica:

a) $\boldsymbol{p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B)}$

b) $\boldsymbol{p[(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] = p(A) + p(B) - 2p(A \cap B)}$

a) $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) =$

$= 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] =$

$= 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B)$

b) $p[(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] =$

$p(\overline{A} \cap B) + p(A \cap \overline{B}) - p[(\overline{A} \cap B) \cap (A \cap \overline{B})] =$

$= p(B) - p(A \cap B) + p(A) - p(A \cap B) - p(\varnothing) =$

$= p(A) + p(B) - 2p(A \cap B)$

2. Considera dos successos *A* i *B* tals que $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7$. Són incompatibles *A* i *B*? Justifica la resposta.

$p(\overline{A \cap B}) = p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7 \rightarrow$

$p(A \cap B) = 1 - p(\overline{A \cap B}) = 1 - 0,7 = 0,3 \rightarrow$

$A \cap B \neq \varnothing$

A i *B* no són incompatibles.

3. En un experiment aleatori s'han assignat les probabilitats següents als successos *A*, *B* i $A \cap B$:

$$p(A) = \frac{1}{3};\ p(B) = \frac{1}{4}\ i\ p(A \cap B) = \frac{2}{3}$$

És possible? Per què?

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} - \frac{8}{12} = -\frac{1}{12} < 0$$

No és possible.

4. Dels successos *A* i *B* sabem que:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{5},\ p(A) = \frac{2}{3}\ i\ p(\overline{B}) = \frac{3}{4}$$

Calcula:

a) $p(A \cup B)$ ***b)*** $p(A \cap B)$

c) $p(\overline{A} \cap B)$ ***d)*** $p(A \cap \overline{B})$

a) $p(\overline{A \cup B}) = p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{5} \rightarrow p(A \cup B) = \frac{4}{5}$

b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{5} = \frac{7}{60}$$

c) $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) =$

$$= \frac{1}{4} - \frac{7}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

d) $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) =$

$$= \frac{2}{3} - \frac{7}{60} = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}$$

5. Calcula la probabilitat que, quan llancem quatre daus, la suma dels punts obtinguts sigui diferent de 4 i de 24.

A: «obtenir una suma de punts igual a 4 o a 24»

A = {(1, 1, 1, 1), (6, 6, 6, 6)}

$$p(A) = \frac{2}{6^4} = \frac{2}{1\,296} = \frac{1}{648} \rightarrow$$

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{648} = \frac{647}{648}$$

6. En una sala on hi ha 20 persones, 14 llegeixen el diari, 10 prenen cafè i 8 fan ambdues coses. Si seleccionem dues persones de la sala a l'atzar, calcula la probabilitat que:

a) **Les dues prenguin cafè i no llegeixin el diari.**

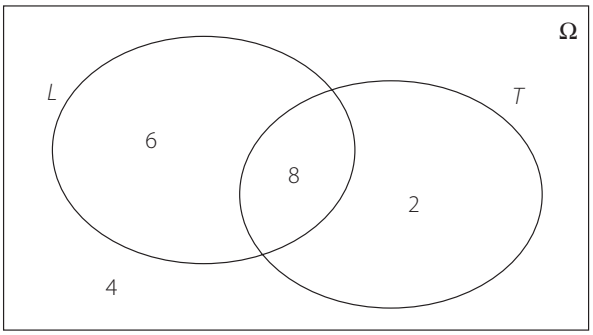
b) **Les dues només facin una de les dues coses.**

c) **Cap de les dues no faci res.**

d) **Les dues facin ambdues coses.**

a) *A:* «dues persones prenguin cafè i no llegeixin el diari»

$$p(A) = \frac{C_{2,2}}{C_{20,2}} = \frac{1}{\frac{20 \cdot 19}{2}} = \frac{1}{10 \cdot 19} = \frac{1}{190}$$



b) *B:* «les dues només facin una cosa»

$$p(B) = \frac{C_{6,2} + C_{2,2} + 6 \cdot 2}{C_{20,2}} =$$

$$= \frac{\frac{6 \cdot 5}{2} + 1 + 12}{10 \cdot 19} = \frac{15 + 1 + 12}{190} = \frac{28}{190} = \frac{14}{95}$$

c) *C:* «cap de les dues persones faci res»

$$p(C) = \frac{C_{4,2}}{C_{20,2}} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{2}}{10 \cdot 9} = \frac{2 \cdot 3}{10 \cdot 19} = \frac{3}{5 \cdot 19} = \frac{3}{95}$$

d) *D:* «les dues facin les dues coses»

$$p(D) = \frac{C_{8,2}}{C_{20,2}} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{2}}{10 \cdot 19} = \frac{4 \cdot 7}{10 \cdot 19} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 19} = \frac{14}{95}$$

7. Determina la probabilitat d'obtenir a la Loteria primitiva 6 encerts, 5 encerts i el complementari, i 4 encerts, jugant una única combinació de 6 nombres.

A: «6 encerts»

$$p(A) = \frac{1}{C_{49,6}} = \frac{1}{13\,983\,816}$$

B: «5 encerts i el complementari»

$$p(B) = \frac{6}{C_{49,6}} = \frac{6}{13\,983\,816} = \frac{1}{2\,330\,636}$$

C: «4 encerts»

$$p(C) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{43,2}}{C_{49,6}} = \frac{13\,545}{13\,983\,816} = \frac{645}{665\,896}$$

8. Calcula la probabilitat que, quan llancem un dau, la suma dels punts de les cares visibles sigui més gran que 18.

A: «suma de punts de les cares visibles sigui més gran que 18»

B: «punts de la cara no visible sigui 1 o 2» → $B = \{1,2\}$

$$p(A) = p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

9. Un estudiant s'ha preparat 22 temes d'un temari que en té 30 en total, dels quals 3 surten per sorteig a l'examen. Calcula la probabilitat que:

a) **Respongui correctament a dos dels temes.**

b) **No respongui correctament a cap dels tres temes.**

a) *A:* «respongui correctament a 2 temes»

$$p(A) = \frac{C_{22,2} \cdot C_{8,1}}{C_{30,3}} = \frac{\frac{22 \cdot 21}{2} \cdot 8}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2}} =$$

$$= \frac{11 \cdot 21 \cdot 8}{10 \cdot 29 \cdot 14} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 29} = \frac{66}{145}$$

b) *B:* «no respongui correctament a cap pregunta»

$$p(B) = \frac{C_{8,3}}{C_{30,3}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2}} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7}{10 \cdot 29 \cdot 14} = \frac{2}{5 \cdot 29} = \frac{2}{145}$$

10. Quan llancem dos daus, quina és la probabilitat d'obtenir un nombre de punts la suma dels quals sigui 9? I que la suma sigui múltiple de 3?

A: «suma de punts igual a 9»

$p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

B: «suma sigui múltiple de 3»

$p(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

11. El 25 % dels estudiants d'una facultat han suspès matemàtiques, el 20 % han suspès història i el 15 % han suspès ambdues assignatures. Si seleccionem un alumne o una alumna a l'atzar, determina la probabilitat que:

***a*) Hagi suspès una de les dues assignatures com a mínim.**

***b*) Hagi suspès història, però no matemàtiques.**

***c*) Hagi suspès matemàtiques, pero no història.**

***d*) No hagi suspès cap de les dues assignatures.**

M: «hagi suspès matemàtiques» $\rightarrow p(M) = \frac{1}{4}$

H: «hagi suspès història» $\rightarrow p(H) = \frac{1}{5}$

$p(M \cap H) = \frac{3}{20}$

a) $p(M \cup H) = p(M) + p(H) - p(M \cap H) =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

b) $p(\overline{M} \cap H) = p(H) - p(M \cap H) = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} = \frac{1}{20}$

c) $p(M \cap \overline{H}) = p(M) - p(M \cap H) =$

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

d) $p(\overline{M} \cap \overline{H}) = p(\overline{M \cup H}) = 1 - p(M \cup H) =$

$= 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

12. Calcula la probabilitat d'obtenir un total de 4 punts quan llancem un dau, quan en llancem dos, en llançar-ne tres i, finalment, quan en llancem quatre.

A: «obtenir 4 punts»

- En llançar un dau: $p(A) = \frac{1}{6}$
- En llançar dos daus: $p(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
- En llançar tres daus: $p(A) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$
- En llançar quatre daus: $p(A) = \frac{1}{1\,296}$

13. D'una baralla de 48 cartes, n'extraiem dues a l'atzar. Esbrina la probabilitat que:

***a*) Siguin un as i un rei.**

***b*) Les dues cartes siguin dues copes.**

***c*) No hi hagi cap figura.**

a) *A:* «un as i un rei»

$$p(A) = \frac{4 \cdot 4}{C_{48,2}} = \frac{4 \cdot 4}{\frac{48 \cdot 47}{2}} = \frac{4 \cdot 4}{24 \cdot 47} =$$

$$= \frac{2}{3 \cdot 47} = \frac{2}{141}$$

b) *B:* «dues copes»

$$p(B) = \frac{C_{12,2}}{C_{48,2}} = \frac{\frac{12 \cdot 11}{2}}{\frac{48 \cdot 47}{2}} = \frac{6 \cdot 11}{24 \cdot 47} = \frac{11}{4 \cdot 47} = \frac{11}{188}$$

c) *C:* «cap figura»

$$p(C) = \frac{C_{36,2}}{C_{48,2}} = \frac{\frac{36 \cdot 35}{2}}{\frac{48 \cdot 47}{2}} = \frac{18 \cdot 35}{24 \cdot 47} =$$

$$= \frac{3 \cdot 35}{4 \cdot 47} = \frac{105}{188}$$

14. Una urna conté 5 boles blanques, 7 de negres i 4 de vermelles. Calcula la probabilitat que en una extracció de 3 boles totes tres siguin del mateix color.

A: «tres boles del mateix color»

$$p(A) = \frac{C_{5,3} + C_{7,3} + C_{4,3}}{C_{16,3}} = \frac{10 + 35 + 4}{\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2}} =$$

$$= \frac{49}{8 \cdot 5 \cdot 14} = \frac{7}{8 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{7}{80}$$

15. En una província d'un país determinat hi ha 300 000 cotxes. Les matrícules dels cotxes es numeren en sèrie des de la matrícula 000001 fins a la 300 000. Quina és la probabilitat que el primer dígit de l'esquerra de la matrícula d'un cotxe sigui 1?

A: «que comenci per 1»

$p(A) = \frac{100\,000}{300\,000} = \frac{1}{3}$

16. Si 13 persones s'asseuen aleatòriament al voltant d'una taula circular, esbrina la probabilitat que dues persones determinades estiguin assegudes l'una al costat de l'altra.

A: «dues persones determinades estiguin una al costat de l'altra»

$$p(A) = \frac{2P_{11}}{P_{12}} = \frac{2 \cdot 11!}{12!} = \frac{2 \cdot 11!}{12 \cdot 11!} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

17. En un sorteig de 50 nombres, de l'1 al 50, s'escull un nombre a l'atzar. Calcula la probabilitat que:

a) Sigui un nombre senar o múltiple de 3.

b) Sigui més petit que 20 o més gran que 35.

a) *A:* «nombre senar», *B:* «múltiple de 3»

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{33}{50}$$

b) *C:* «més petit que 20», *D:* «més gran que 35»

$$p(C \cup D) = p(C) + p(D) = \frac{19}{50} + \frac{3}{10} = \frac{34}{50} = \frac{17}{25}$$

18. En una cursa de tres corredors, *a*, *b* i *c*, el corredor *a* té el doble de probabilitat que el *b* de guanyar i aquest, el triple que el *c*.

a) Quina és la probabilitat que té cada corredor de guanyar?

b) Quina és la probabilitat que guanyi *a* o *c*?

c) Quina és la probabilitat que no guanyi *a*?

$$\left.\begin{array}{l} A\text{: «que guanyi } a\text{»} \\ B\text{: «que guanyi } b\text{»} \\ C\text{: «que guanyi } c\text{»} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} p(B) = 3p(C) \\ p(A) = 2p(B) = 6p(C) \end{array}$$

a) $p(A) + p(B) + p(C) = 6p(C) + 3p(C) + p(C) = 1$

$10p(C) = 1 \rightarrow p(C) = \frac{1}{10}; p(B) = \frac{3}{10}; p(A) = \frac{3}{5}$

b) $p(A \cup C) = p(A) + p(C) = \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$

c) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

19. D'una caixa que conté 5 boles numerades de l'1 al 5:

a) N'extraiem una bola rere l'altra fins a treure-les totes. Quina probabilitat hi ha que surtin en l'ordre natural?

b) N'extraiem una bola i la retornem a la caixa, i repetim aquesta acció cinc vegades. Quina és ara la probabilitat que surtin en l'ordre natural? I que surti la mateixa bola les cinc vegades?

a) *A:* «que surtin en ordre natural»

$$p(A) = \frac{1}{P_5} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

b) *A:* «que surtin en ordre natural»

$$p(A) = \frac{1}{VR_{5,5}} = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3\,125}$$

B: «que surti la mateixa bola»

$$p(B) = \frac{5}{VR_{5,5}} = \frac{5}{5^5} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$$

20. Cinc persones es troben a l'interior d'un ascensor situat a la planta baixa d'un edifici que consta de planta baixa i sis pisos. Suposant que totes tenen la mateixa probabilitat de baixar en qualsevol dels sis pisos, calcula la probabilitat:

a) Que totes baixin al mateix pis.

b) Que no baixi ningú als tres primers pisos.

c) Que als cinc primers pisos baixi una persona en cada pis.

a) *A:* «que totes baixin al mateix pis»

$$p(A) = 6\left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1\,296} = 0{,}000\,772$$

b) *B:* «que no baixi ningú als tres primers pisos»

$$p(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^{15} = 0{,}8\widehat{3}^{15} = 0{,}064\,9$$

c) *C:* «que baixi una persona a cada pis dels cinc primers pisos»

$$p(C) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{5^{10}}{6^{15}} = 0{,}000\,020\,7$$

21. Una moneda està trucada, de manera que la probabilitat que surti cara és doble de la probabilitat que surti creu. Es llança aquesta moneda tres vegades. Calcula la probabilitat dels successos següents:

a) Obtenir 2 cares.

b) Obtenir 3 creus.

c) Obtenir 1 cara.

d) No obtenir cap creu.

Primer de tot calculem la probabilitat d'obtenir cara en llançar una vegada la moneda.

Definim el succés *C*: «que surti cara»

$$p(C) + p(\bar{C}) = 1 \rightarrow 2p(\bar{C}) + p(\bar{C}) = 1 \rightarrow 3p(\bar{C}) = 1 \rightarrow p(\bar{C}) = \frac{1}{3}$$
$$\rightarrow p(C) = \frac{2}{3}$$

a) *A:* «obtenir 2 cares»
Tenim tres casos: *ccx, cxc, xcc*; d'on:

$$p(A) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

b) *B:* «obtenir 3 creus»
Tenim només un cas: *xxx*; per tant:

$$p(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

c) *C:* «obtenir 1 cara»
Tenim tres casos: *cxx, xcx, xxc*

$$p(C) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

d) *D:* «no obtenir cap creu»
Tenim només un cas: *ccc*

$$p(D) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

22. Es tiren dos daus a la vegada. Calcula la probabilitat d'obtenir:

***a*) Només un 6 en un dels dos daus.**

***b*) Almenys un 6 en un dau.**

***c*) Cap 6.**

a) *A:* «obtenir només un 6 en un dels dos daus»
Tenim dos casos: 6 i $\bar{6}$; $\bar{6}$ i 6, per tant:

$$p(A) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

b) *B:* «obtenir almenys un 6»
Tenim tres casos: 6 i $\bar{6}$; $\bar{6}$ i 6; 6 i 6

$$p(A) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{18} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

c) *C:* «no obtenir cap 6»
Només hi ha un cas: $\bar{6}$ i $\bar{6}$

$$p(C) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

23. Un cinema de barri programa 20 pel·lícules al mes, entre les quals n'hi ha 7 de policíaques, 5 de suspens i la resta d'aventures. Una persona va al cinema tres vegades al mes sense consultar la programació.

***a*) Quina és la probabilitat que les tres pel·lícules siguin d'aventures?**

***b*) I que en vegi una de cada classe?**

a) *A:* «que les tres pel·lícules siguin d'aventures»

$$p(A) = \frac{C_{8,3}}{C_{20,3}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 3}{3 \cdot 2}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 19 \cdot 3} = \frac{14}{285}$$

b) *B:* «que siguin una de cada classe»

$$p(B) = \frac{C_{7,1} \cdot C_{5,1} \cdot C_{8,1}}{C_{20,3}} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 8}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2}} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 8}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{7 \cdot 2}{19 \cdot 3} = \frac{14}{57}$$

Unitat 10. Distribució de probabilitat

Activitats

1. Llancem tres monedes. Definim la variable aleatòria *X* com el nombre de creus que surtin.

***a*) Determina la funció de probabilitat i la funció de distribució de la variable *X*.**

***b*) Representa'n gràficament la funció de probabilitat i la funció de distribució.**

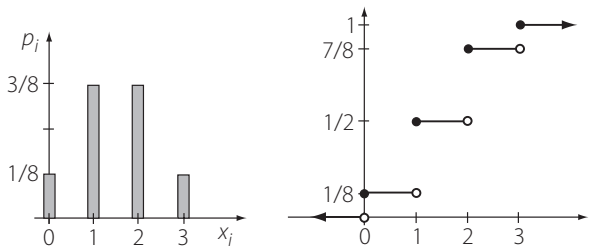
***c*) Calcula'n l'esperança matemàtica i la desviació típica.**

a) $p[X=0]=\frac{1}{8}$; $p[X=1]=\frac{3}{8}$

$p[X=2]=\frac{3}{8}$; $p[X=3]=\frac{1}{8}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{8} & \text{si } 0\le x<1\\ \frac{1}{2} & \text{si } 1\le x<2\\ \frac{7}{8} & \text{si } 2\le x<3\\ 1 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$$

b)



c) $\mu=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=$

$=\frac{3}{8}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

$\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{4}x_i^2p_i-\mu^2}=$

$=\sqrt{0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=$

$=\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}-\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{6}{8}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. En l'experiment aleatori en el qual llancem dos daus enlaire definim la variable aleatòria *X* com: *X*(*a*, *b*) = màx(*a*, *b*), on (*a*, *b*) són els resultats que mostren els dos daus. Determina'n la funció de probabilitat i calcula l'esperança matemàtica.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

Taula 10.1.

$$\mu=\sum_{i=1}^{6}x_ip_i=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{11}{36}=$$

$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{6}+\frac{5}{12}+\frac{7}{9}+\frac{5}{4}+\frac{11}{6}=\frac{161}{36}=4,47\widehat{2}$$

3. A la Taula 10.2 s'expressa la funció de probabilitat d'una variable aleatòria discreta:

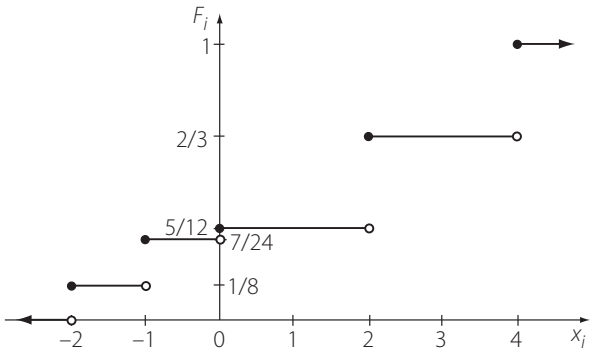
x_i	−2	−1	0	2	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

Taula 10.2.

***a*) Determina'n la funció de distribució i representa-la gràficament.**

***b*) Esbrina'n l'esperança, la variància i la desviació típica.**

a) $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-2\\ \frac{1}{8} & \text{si } -2\le x<-1\\ \frac{7}{24} & \text{si } -1\le x<0\\ \frac{5}{12} & \text{si } 0\le x<2\\ \frac{2}{3} & \text{si } 2\le x<4\\ 1 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$



b) $\mu=\sum_{i=1}^{5}x_ip_i=-2\cdot\frac{1}{8}-1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{3}=$

$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{17}{12}=1,41\widehat{6}$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - \mu^2 =$$

$$= (-2)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{17}{12}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 1 + \frac{16}{3} - \frac{289}{144} = \frac{719}{144} = 4,993\,0\widehat{5}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{719}{144}} = \frac{\sqrt{719}}{12} = 2,2345$$

4. La variable aleatòria discreta uniforme és la que pren valors 1, 2, 3, ..., *n*, amb probabilitats:

$$p_i = \frac{1}{n},\ \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n\ .$$

Calcula la funció de distribució, l'esperança i la desviació típica d'aquesta variable.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n-1 \le x < n \\ 1 & \text{si } x \ge n \end{cases}$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{n}\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2 =$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + 3^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + n^2 \cdot \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2) - \frac{(n+1)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{[n(2n+3)+1]n}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$$

5. A partir de la variable aleatoria de l'exemple 3:

a) **Comprova la segona propietat de la funció de probabilitat de la distribució binomial.**

b) **Defineix la funció de distribució.**

a) $\sum_{i=1}^{6} p[X = i] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] +$

$+ p[X = 3] + p[X = 4] + p[X = 5] + p[X = 6] =$

$$= \frac{15\,625}{5^6} = \frac{5^6}{5^6} = 1$$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4\,096}{15\,625} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{2\,048}{3\,125} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \frac{2\,816}{3\,125} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \frac{3\,072}{3\,125} & \text{si } 3 \le x < 4 \\ \frac{624}{625} & \text{si } 4 \le x < 5 \\ \frac{15\,624}{15\,625} & \text{si } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$$

6. Calcula:

a) $p[X = 5]$**, en** $B\left(7, \frac{1}{3}\right)$

b) $p[X \le 2]$**, en** $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$

c) $p[X > 3]$**, en** $B\left(8, \frac{2}{3}\right)$

d) μ, σ^2 **i** σ**, en** $B\left(10, \frac{3}{5}\right)$

a) $p[X = 5] = \binom{7}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^5 =$

$$= 21 \cdot \frac{1}{3^5} \cdot \frac{4}{3^2} = \frac{21 \cdot 4}{3^7} = \frac{7 \cdot 4}{3^6} = \frac{28}{729}$$

b) $p[X \le 2] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] =$

$$= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

$$= \frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{10}{2^5} = \frac{16}{2^5} = \frac{2^4}{2^5} = \frac{1}{2}$$

c) $p[X > 3] = 1 - p[X \le 3] =$

$1 - (p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] + p[X = 3]) =$

$$= 1 - \left[\binom{8}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^8 + \binom{8}{1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \right.$$

$$\left. + \binom{8}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \binom{8}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^5\right] =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3^8} + \frac{16}{3^8} + \frac{112}{3^8} + \frac{448}{3^8}\right) =$$

$$= 1 - \frac{577}{3^8} = 1 - \frac{577}{6\,561} = \frac{5\,984}{6\,561}$$

d) $\mu = np = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$

$$\sigma^2 = npq = 10 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{12}{5}} = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$$

7. Llancem una moneda enlaire 100 vegades. Estableix la probabilitat d'obtenir:

a) **47 cares.**

b) 35 creus.

c) Almenys 2 cares.

d) Cap creu.

X: «nombre de cares» $\rightarrow B\left(100, \frac{1}{2}\right)$

a) $p[X = 47] = \binom{100}{47}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \binom{100}{47}2^{-100}$

b) $p[X = 65] = \binom{100}{65}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \binom{100}{35}2^{-100}$

c) $p[X \geq 2] = 1 - p[X < 2] =$

$= 1 - (p[X = 0] + p[X = 1]) =$

$= 1 - \left[\binom{100}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \binom{100}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right] =$

$= 1 - (2^{-100} + 100 \cdot 2^{-100}) =$

$= 1 - [2^{-100}(1 + 100)] = 1 - 101 \cdot 2^{-100}$

d) $p[X = 100] = \binom{100}{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 2^{-100}$

8. Una família de Tarragona té cinc fills. Suposant que la probabilitat que un dels fills sigui nen és 0,45, calcula la probabilitat que siguin:

a) Tres nens i dues nenes.

b) Menys nens que nenes.

c) Una sola nena.

d) Cap nen.

X: «nombre de nens» $\rightarrow B(5; 0{,}45)$

a) $p[X = 3] = \binom{5}{3}0{,}45^3 \cdot 0{,}55^2 =$

$= 10 \cdot 0{,}091\,125 \cdot 0{,}302\,5 = 0{,}275\,65$

b) $p[X \leq 2] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] =$

$= \binom{5}{0}0{,}55^5 + \binom{5}{1}0{,}45 \cdot 0{,}55^4 + \binom{5}{2}0{,}45^2 \cdot 0{,}55^3 =$

$= 0{,}050\,328\,4 + 0{,}205\,889 + 0{,}336\,909\,3 = 0{,}593\,13$

c) $p[X = 4] = \binom{5}{4}0{,}45^4 \cdot 0{,}55 =$

$= 5 \cdot 0{,}041\,006\,2 \cdot 0{,}55 = 0{,}112\,77$

d) $p[X = 0] = \binom{5}{0}0{,}55^5 = 0{,}0503\,3$

9. El 2 % dels articles produïts en una fàbrica són defectuosos. Calcula el nombre esperat i també la desviació típica d'articles defectuosos en una comanda de 10 000 unitats.

X: «nombre d'articles defectuosos»

$B\left(10\,000, \frac{1}{50}\right)$

$\mu = np = 10\,000 \cdot \frac{1}{50} = \frac{10\,000}{50} = 200$ articles defectuosos

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10\,000 \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{49}{50}} = \sqrt{\frac{10^4 \cdot 7^2}{50^2}} =$

$= \frac{10^2 \cdot 7}{50} = \frac{100 \cdot 7}{50} = 14$ articles defectuosos

10. Determina el nombre esperat de nenes en una família de vuit fills, si suposem igualment probable la distribució de sexes. Quina és la probabilitat que la família tingui el nombre esperat de nenes?

X: «nombre de nenes» $\rightarrow B\left(8, \frac{1}{2}\right)$

$\mu = np = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ nenes

$p[X = 4] = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{70}{2^8} = \frac{35}{2^7} = \frac{35}{128}$

11. Tenim un dau en forma de tetràedre, és a dir, amb quatre cares que són triangles equilàters. Numerem les cares de l'1 al 4 i considerem la variable aleatòria *X:* «nombre d'1» per a *n* = 5.

a) Estudia la distribució binomial corresponent.

b) Defineix les funcions de probabilitat i de distribució.

c) Calcula'n l'esperança i la desviació típica.

a) $p = \frac{1}{4} \rightarrow B\left(5, \frac{1}{4}\right)$

b) $p[X = 0] = \binom{5}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{1\,024}$

$p[X = 1] = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3^4}{4^4} = \frac{405}{1\,024}$

$p[X = 2] = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{3^3}{4^3} = \frac{270}{1\,024} = \frac{135}{512}$

$p[X = 3] = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \frac{3^2}{4^2} = \frac{90}{1\,024} = \frac{45}{512}$

$p[X = 4] = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{3}{4} = 5 \cdot \frac{1}{4^4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{1\,024}$

$p[X = 5] = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1\,024}$

$F(0) = p[X \leq 0] = p[X = 0] = \frac{243}{1\,024}$

$F(1) = p[X \leq 1] = p[X = 0] + p[X = 1] =$

$= \frac{243}{1\,024} + \frac{405}{1\,024} = \frac{648}{1\,024} = \frac{81}{128}$

$F(2) = p[X \leq 2] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] =$

$= \frac{81}{128} + \frac{135}{512} = \frac{459}{512}$

$F(3) = p[X \le 3] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] +$

$+ p[X = 3] = \frac{459}{512} + \frac{45}{512} = \frac{504}{512} = \frac{63}{64}$

$F(4) = p[X \le 4] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] +$

$+ p[X = 3] + p[X = 4] = \frac{63}{64} + \frac{15}{1\,024} = \frac{1\,023}{1\,024}$

$F(5) = p[X \le 5] = p[X = 0] + p[X = 1] +$

$+ p[X = 2] + p[X = 3] + p[X = 4] + p[X = 5] =$

$= \frac{1\,023}{1\,024} + \frac{1}{1\,024} = \frac{1\,024}{1\,024} = 1$

d'on s'obté la funció de distribució:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{243}{1\,024} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{81}{128} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \frac{459}{512} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \frac{63}{64} & \text{si } 3 \le x < 4 \\ \frac{1\,023}{1\,024} & \text{si } 4 \le x < 5 \\ 1 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$

c) $\mu = np = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{4} = 0{,}968\,246$

12. El 3 % de les peces elaborades per una màquina són defectuoses. Les peces es venen en caixes de 25 unitats cadascuna. Quina és la probabilitat que una caixa contingui com a màxim una peça defectuosa?

X: «nombre de peces defectuoses»

$B\left(25, \frac{3}{100}\right)$

$p[X \le 1] = p[X = 0] + p[X = 1] =$

$= \binom{25}{0}\left(\frac{97}{100}\right)^{25} + \binom{25}{1}\frac{3}{100}\left(\frac{97}{100}\right)^{24} =$

$= 0{,}466\,974\,7 + 0{,}361\,062\,9 = 0{,}828\,04$

13. Una malaltia determinada té un índex de mortalitat del 20 %. Si en un hospital hi ha sis persones afectades, calcula la probabilitat que, almenys, la meitat dels pacients sobrevisquin.

X: «nombre de persones que sobreviuen» $\rightarrow B\left(6, \frac{4}{5}\right)$

$p[X \ge 3] = 1 - p[X < 3] =$

$= 1 - (p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2]) =$

$= 1 - \left[\binom{6}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^6 + \binom{6}{1}\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^4\right] =$

$= 1 - (0{,}000\,064 + 0{,}001\,536 + 0{,}015\,36) =$

$= 1 - 0{,}016\,96 = 0{,}983\,04$

14. El 55 % dels treballadors d'un organisme oficial són dones. Per llei, el 25 % dels alts càrrecs han de ser-ho. Si s'elegeixen cinc funcionaris a l'atzar, quina és la probabilitat que tres siguin dones? I si l'eleccció només es fa entre els alts càrrecs?

X: «nombre de dones» $\rightarrow B\left(5, \frac{11}{20}\right)$

$p[X = 3] = \binom{5}{3}\left(\frac{11}{20}\right)^3\left(\frac{9}{20}\right)^2 = 10 \cdot \frac{11^3}{20^3} \cdot \frac{9^2}{20^2} =$

$= \frac{1\,078\,110}{20^5} = \frac{1\,078\,110}{3\,200\,000} = \frac{107\,811}{320\,000} = 0{,}336\,91$

X: «nombre de dones» $\rightarrow B\left(5, \frac{1}{4}\right)$

$p[X = 3] = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \frac{3^2}{4^2} =$

$= \frac{90}{4^5} = \frac{90}{1\,024} = \frac{45}{512} = 0{,}087\,89$

15. Si *X* representa una variable aleatòria contínua:

***a)* Demostra que *f(x)* és una funció de densitat:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

***b)* Representa-la gràficament.**

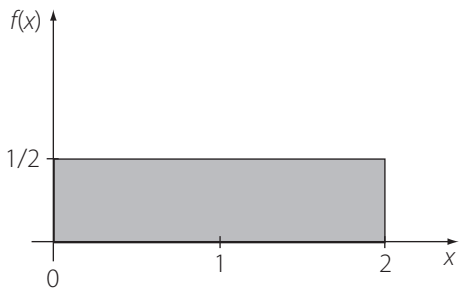
a) 1. Per la mateixa definició de $f(x)$, tenim que $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. L'àrea del recinte que determina la gràfica de $f(x)$ amb l'eix *OX* és:

$A = (2 - 0) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\,\text{u}^2$

Per 1 i 2 tenim que $f(x)$ és una funció de densitat.

b)



16. Per a la funció de densitat de l'activitat 15, calcula:

a) $p[X \le 1]$ **b)** $p\left[X \ge \frac{1}{2}\right]$ **c)** $p\left[\frac{1}{4} \le X \le \frac{3}{2}\right]$

a) $p[X \le 1] = \frac{1}{2}$

b) $p\left[X \ge \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}$

c) $p\left[\frac{1}{4} \le X \le \frac{3}{2}\right] = p\left[X \le \frac{3}{2}\right] - p\left[X \le \frac{1}{4}\right] =$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

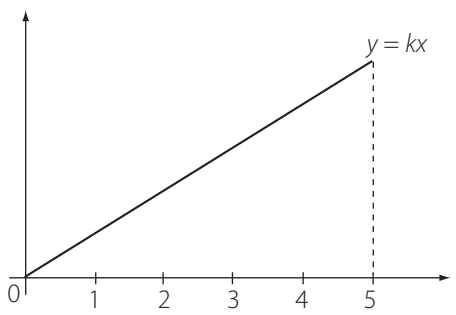
17. En una variable aleatòria contínua X es defineix la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in [0, 5] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 5] \end{cases}$$

a) Calcula el valor de k per tal que la funció $f(x)$ sigui una funció de densitat.

b) Esbrina $p[2 \le X \le 3{,}5]$ per al valor de k calculat a l'apartat anterior.

a)



$A = \frac{5 \cdot 5k}{2} = \frac{25k}{2}$

$\frac{25k}{2} = 1 \to k = \frac{2}{25}$

b) $p[2 \le X \le 3{,}5] = p[X \le 3{,}5] - p[X \le 2] =$

$= \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{25}}{2} - \frac{2 \cdot \frac{4}{25}}{2} = \frac{49}{100} - \frac{4}{25} = \frac{33}{100}$

18. Contesta raonadament a partir de la taula de la distribució normal reduïda:

a) Per què el primer valor de probabilitat que figura a la taula és 0,5?

b) Quin és el valor de $p[Z \le 4{,}5]$? I el valor de $p[Z \le -5]$?

a) Perquè la gràfica de la funció de densitat de la distribució normal $N(0, 1)$ és simètrica respecte del valor $Z = 0$ i sabem que $p[Z \le 0] = 0{,}5$.

b) $p[Z \le 4{,}5] = 1$, ja que segons la taula: $p[Z \le 4] \simeq 1$

$p[Z \le -5] = 0$, ja que: $p[Z \le -5] = p[Z \ge 5]$ i

$p[Z \ge 5] = 1 - p[Z \le 5] = 1 - 1 = 0$

19. Si Z és una variable $N(0, 1)$, calcula:

a) $p[Z \le -2{,}38]$ **b)** $p[Z \le 1{,}64]$

c) $p[Z \ge -1{,}03]$ **d)** $p[Z \ge 0{,}82]$

e) $p[1{,}5 \le Z \le 3]$ **f)** $p[-0{,}79 \le Z \le 0{,}79]$

a) $p[Z \le -2{,}38] = p[Z \ge 2{,}38] = 1 - p[Z \le 2{,}38] =$

$= 1 - 0{,}9913 = 0{,}0087$

b) $p[Z \le 1{,}64] = 0{,}9495$

c) $p[Z \ge -1{,}03] = p[Z \le 1{,}03] = 0{,}8485$

d) $p[Z \ge 0{,}82] = 1 - p[Z \le 0{,}82] = 1 - 0{,}7939 = 0{,}2061$

e) $p[1{,}5 \le Z \le 3] = p[Z \le 3] - p[Z \le 1{,}5] =$

$= 0{,}99865 - 0{,}9332 = 0{,}06545$

f) $p[-0{,}79 \le Z \le 0{,}79] = 2(p[Z \le 0{,}79] - 0{,}5) =$

$= 2(0{,}7852 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}2852 = 0{,}5704$

20. A partir de la taula, comprova a la distribució $N(0, 1)$ que:

a) A l'interval (–1, 1) figura el 68,26 % del total de la probabilitat.

b) A l'interval (–2, 2) figura el 95,44 % del total de la probabilitat.

c) L'interval (–3, 3) inclou el 99,74 % del total de la probabilitat.

a) $p[-1 \le Z \le 1] = 2(p[Z \le 1] - 0{,}5) =$

$= 2(0{,}8413 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826$

$p[-1 \le Z \le 1] = 0{,}6826 \to 68{,}26\ \%$

b) $p[-2 \le Z \le 2] = 2(p[Z \le 2] - 0{,}5) =$

$= 2(0{,}9772 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$

$p[-2 \le Z \le 2] = 0{,}9544 \to 95{,}44\ \%$

c) $p[-3 \le Z \le 3] = 2(p[Z \le 3] - 0{,}5) =$

$= 2(0{,}9987 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}4987 = 0{,}9974$

$p[-3 \le Z \le 3] = 0{,}9974 \to 99{,}74\ \%$

21. Considerem X una variable $N(8, 3)$. Calcula:

a) $p[X \le 9]$ **b)** $p[X \ge 7]$

c) $p[6 \le X \le 7{,}5]$ **d)** $p[7{,}2 \le X \le 8{,}7]$

a) $p[X \le 9] = p[Z \le 0{,}33] = 0{,}6293$

b) $p[X \ge 7] = p[Z \ge -0{,}33] = p[Z \le 0{,}33] = 0{,}6293$

c) $p[6 \le X \le 7{,}5] = p[-0{,}67 \le Z \le -0{,}17] =$

$= p[0{,}17 \le Z \le 0{,}67] = p[Z \le 0{,}67] - p[Z \le 0{,}17] =$

$= 0{,}7486 - 0{,}5675 = 0{,}1811$

d) $p[7{,}2 \le X \le 8{,}7] = p[-0{,}27 \le Z \le 0{,}23] =$

$= p[Z \le 0{,}23] - p[Z \le -0{,}27] =$

$= p[Z \le 0{,}23] - (1 - p[Z \le 0{,}27]) =$

$= 0{,}5910 - 1 + 0{,}6064 = 0{,}1974$

22. Tenint en compte que l'àrea que es dóna fa referència a una distribució normal *N*(0, 1), determina el valor o els valors de la variable *Z* en aquests casos:

***a)* L'àrea entre 0 i *Z* és 0,3770.**

***b)* L'àrea a l'esquerra de *Z* és 0,8621.**

***c)* L'àrea entre –1,5 i *Z* és 0,0217.**

a) $p[0 \le Z \le z] = 0{,}3770 \to p[Z \le z] = 0{,}8770 \to$

$z = 1{,}16$

b) $p[Z \le z] = 0{,}8621 \to z = 1{,}09$

c) $p[-1{,}5 \le Z \le z] = 0{,}0217 \to$

$p[Z \le z] - p[Z \le -1{,}5] = 0{,}0217$

$p[Z \le -1{,}5] = p[Z \ge 1{,}5] = 1 - p[Z \le 1{,}5] =$

$= 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

$p[Z \le z] - 0{,}0668 = 0{,}0217 \to$

$p[Z \le z] = 0{,}0885 \to p[Z \ge -z] = 0{,}0885$

$p[Z \le -z] = 1 - 0{,}0885 = 0{,}9115 \to$

$-z = 1{,}35 \to z = -1{,}35$

23. En una població s'estableixen dos grups *A* i *B*. Els quocients intel·lectuals d'ambdós grups es distribueixen segons *N*(100, 30) i *N*(120, 35), respectivament. S'escull un individu de cada grup de manera aleatòria i independent. Calcula:

***a)* La probabilitat que l'individu del grup *A* tingui un quocient intel·lectual superior a 90.**

***b)* La probabilitat que l'individu del grup *B* tingui un quocient intel·lectual superior a 90.**

***c)* La probabilitat que ambdós tinguin un quocient intel·lectual superior a 90.**

X: «quocient intel·lectual del grup *A*»

B: «quocient intel·lectual del grup *B*»

a) $p[X \ge 90] = p[Z \ge -0{,}33] = p[Z \le 0{,}33] = 0{,}6293$

b) $p[Y \ge 90] = p[Z \ge -0{,}86] = p[Z \le 0{,}86] = 0{,}8051$

c) $p[X \ge 90] \cdot p[Y \ge 90] = 0{,}6293 \cdot 0{,}8051 = 0{,}50665$

24. Suposem que el pes dels atletes de marató segueix una distribució normal *N*(62, 3,4).

***a)* Calcula la probabilitat que un atleta pesi més de 65 kg.**

***b)* El 70 % dels atletes no supera un pes. Quin?**

X: «pes en kg»

a) $p[X \ge 65] = p[Z \ge 0{,}88] = 1 - p[Z \le 0{,}88] =$

$= 1 - 0{,}8106 = 0{,}1894$

b) $p[X \le x] = 0{,}7$

$p[Z \le z] = 0{,}7 \to z = 0{,}52 \to$

$x = \sigma z + \mu = 3{,}4 \cdot 0{,}52 + 62 = 63{,}768$ kg

25. Calcula la probabilitat d'obtenir entre 4 i 7 creus, ambdues incloses, en fer 12 llançaments d'una moneda utilitzant:

***a)* La distribució binomial.**

***b)* L'aproximació normal de la distribució binomial.**

X: «nombre de creus»

a) $B\left(12, \frac{1}{2}\right)$

$p[4 \le X \le 7] =$

$p[X = 4] + p[X = 5] + p[X = 6] + p[X = 7] =$

$= \binom{12}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{12}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{12}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{12}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} =$

$= \frac{1}{2^{12}}\left[\binom{12}{4} + \binom{12}{5} + \binom{12}{6} + \binom{12}{7}\right] =$

$= \frac{1}{2^{12}}(495 + 792 + 924 + 792) = \frac{3\,003}{2^{12}} =$

$= \frac{3\,003}{4\,096} = 0{,}73315$

b) $B\left(12, \frac{1}{2}\right)$; $\mu = np = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3} = 1{,}732$

$N(6;\ 1{,}732)$

$p[3{,}5 \le X \le 7{,}5] = p[-1{,}44 \le Z \le 0{,}87] =$

$= p[Z \le 0{,}87] - p[Z \le -1{,}44] =$

$= p[Z \le 0{,}87] - p[Z \ge 1{,}44] =$

$= p[Z \le 0{,}87] - (1 - p[Z \le 1{,}44]) =$

$= 0{,}8078 - (1 - 0{,}9251) = 0{,}8078 - 0{,}0749 = 07329$

26. Es llança un dau 180 vegades. Esbrina la probabilitat d'obtenir el nombre 6 entre 29 i 32 vegades (ambdues incloses).

$B\left(180, \frac{1}{6}\right)$; X: «nombre de 6»

$\mu = np = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{25} = 5$

$N(30, 5)$

$p[28{,}5 \le X \le 32{,}5] = p[-0{,}3 \le Z \le 0{,}5] =$

$= p[Z \le 0{,}5] - p[Z \le -0{,}3] =$

$= p[Z \le 0{,}5] - p[Z \ge 0{,}3] =$

$= p[Z \le 0{,}5] - \left(1 - p[Z \le 0{,}3]\right) =$

$= 0{,}6915 - (1 - 0{,}6179) = 0{,}6915 - 0{,}3821 = 0{,}3094$

27. Tirem enlaire 500 vegades una moneda que ha estat trucada, de manera que la probabilitat d'obtenir creu és $\frac{2}{5}$. Calcula la probabilitat que el nombre de cares sigui 300:

a) **En més de 10 tirades.**

b) **En més de 20 tirades.**

X: «nombre de cares» $\rightarrow B\left(500, \frac{3}{5}\right)$

$\mu = np = 500 \cdot \frac{3}{5} = 300$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{120} = 10{,}95$

$N(300; 10{,}95)$

a) $p[289{,}5 \le X \le 310{,}5] = p[-0{,}96 \le Z \le 0{,}96] =$

$= 2\left(p[Z \le 0{,}96] - 0{,}5\right) =$

$= 2(0{,}8315 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}3315 = 0{,}663$

b) $p[279{,}5 \le X \le 320{,}5] = p[-1{,}87 \le Z \le 1{,}87] =$

$= 2\left(p[Z \le 1{,}87] - 0{,}5\right) =$

$= 2(0{,}9693 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}4693 = 0{,}9386$

28. Quan llancem 120 vegades un dau normal,

a) **Quina és la probabilitat que la cara 4 surti exactament 24 vegades?**

b) **I que surti 14 vegades com a màxim?**

a) X: «nombre de 4» $\rightarrow B\left(120, \frac{1}{6}\right)$

$\mu = np = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{600}{36}} = \frac{5}{3}\sqrt{6} = 4{,}08$

$N(20; 4{,}08)$

$p[23{,}5 \le X \le 24{,}5] = p[0{,}86 \le Z \le 1{,}1] =$

$= p[Z \le 1{,}1] - p[Z \le 0{,}86] = 0{,}8643 - 0{,}8051 = 0{,}0592$

b) $p[X \le 14{,}5] = p[Z \le -1{,}35] = p[Z \ge 1{,}35] =$

$= 1 - p[Z \le 1{,}35] = 1 - 0{,}9115 = 0{,}0885$

29. Esbrina la probabilitat d'obtenir més de 36 vegades el nombre 6 en 50 tirades d'un parell de daus no trucats.

X: «nombre de 6» $\rightarrow B\left(50, \frac{11}{36}\right)$

$\mu = np = 50 \cdot \frac{11}{36} = 15{,}2\widehat{7}$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot \frac{11}{36} \cdot \frac{25}{36}} = 3{,}26$

$N\left(15{,}2\widehat{7}; 3{,}26\right)$

$p[X \ge 35{,}5] = p[Z \ge 6{,}2] \simeq 0$

30. Es llança 2 500 vegades el dau de l'activitat 11. Calcula la probabilitat d'obtenir el nombre 3:

a) **400 vegades.**

b) **La meitat de les vegades que es llança.**

c) **Més de 1 000 vegades.**

X: «nombre de 3» $\rightarrow B\left(2\,500, \frac{1}{4}\right)$

$\mu = np = 2\,500 \cdot \frac{1}{4} = 625$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2\,500 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = 21{,}65$

$N(625; 21{,}65)$

a) $p[399{,}5 \le X \le 400{,}5] = p[-10{,}42 \le Z \le -10{,}37] =$

$= p[10{,}37 \le Z \le 10{,}42] =$

$= p[Z \le 10{,}42] - p[Z \le 10{,}37] \simeq 0$

b) $p[1\,249{,}5 \le X \le 1\,250{,}5] = p[28{,}84 \le Z \le 28{,}89] =$

$= p[Z \le 28{,}89] - p[Z \le 28{,}84] \simeq 0$

c) $p[X \ge 999{,}5] = p[Z \ge 17{,}3] \simeq 0$

31. Calcula $p[X = 8]$ per a una variable que segueix una distribució binomial $B\left(40, \frac{1}{5}\right)$. Compara-ho amb el resultat que s'obté fent ús de l'aproximació normal. És bona aquesta aproximació? Per què?

$p[X = 8] = \binom{40}{8} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{32} = 0{,}15598$

$B\left(40, \frac{1}{5}\right)$

$\mu = np = 40 \cdot \frac{1}{5} = 8$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = 2{,}53$

$N(8;\ 2{,}53)$

$p\,[7{,}5 \le X \le 8{,}5] = p\,[-\,0{,}2 \le Z \le 0{,}2] =$

$= 2\big(p\,[Z \le 0{,}2] - 0{,}5\big) = 2\,(0{,}579\,3 - 0{,}5) =$

$= 2 \cdot 0{,}079\,3 = 0{,}158\,6$

Tot i que $n > 30$, no és molt bona aproximació perquè $p = 0{,}2$ no és un valor proper a 0,5.

32. La probabilitat que un vaporitzador d'insecticida mati un mosquit és 0,75. Si dirigim el vaporitzador contra 100 mosquits, quina és la probabilitat de matar-ne almenys 75? I de matar-ne menys de 50?

$B(100;\ 0{,}75)$; *X:* «nombre de mosquits morts»

$\mu = np = 100 \cdot 0{,}75 = 75$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33$

$N(75;\ 4{,}33)$

$p\,[X \ge 74{,}5] = p\,[Z \ge -0{,}12] = p\,[Z \le 0{,}12] = 0{,}547\,8$

$p\,[X \le 50{,}5] = p\,[Z \le -\,5{,}66] = 0$

33. En l'experiment aleatori *E:* «llançar quatre monedes a la vegada», considera la variable *X:* «que surtin 3 cares». Fent 1 000 vegades l'experiment i calculant prèviament la probabilitat per a $n = 1$, calcula aproximant per una distribució normal:

a) $\boldsymbol{p[X \ge 280]}$

b) $\boldsymbol{p[X \le 240]}$

c) $\boldsymbol{p[245 \le X \le 265]}$

d) $\boldsymbol{p[X = 260]}$

La probabilitat que surtin 3 cares en llançar quatre monedes és

$p = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$

La variable aleatòria X definida segueix una distribució binomial $B\left(1\,000,\ \frac{1}{4}\right)^4$ d'on:

$\mu = np = 1\,000 \cdot \frac{1}{4} = 250$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1\,000 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{187{,}5} = 13{,}7$

La distribució normal aproximada és: $N(250,\ 13{,}7)$

a) $p[X \ge 280] = p[Z \ge 2{,}19] = 1 - p[Z \le 2{,}19] = 1 - 0{,}985\,7 = 0{,}014\,3$

b) $p[X \le 240] = p[Z \le -0{,}73] = p[Z \ge 0{,}73] = 1 - p[Z \le 0{,}73] =$
$= 1 - 0{,}767\,3 = 0{,}232\,7$

c) $p[245 \le X \le 265] = p[-\,0{,}36 \le Z \le 1{,}09] =$
$= p[Z \le 1{,}09] - p[Z \le -\,0{,}36] = p[Z \le 1{,}09] - p[Z \ge 0{,}36] =$
$= p[Z \le 1{,}09] - (1 - p[Z \le 0{,}36]) =$
$= 0{,}862\,1 - (1 - 0{,}640\,6) = 0{,}862\,1 - 0{,}359\,4 = 0{,}502\,7$

d) $p[259{,}5 \le X \le 260{,}5] = p[0{,}69 \le Z \le 0{,}77] =$
$= p[Z \le 0{,}77] - p[Z \le 0{,}69] = 0{,}779\,4 - 0{,}754\,9 = 0{,}024\,5$

34. Per a una distribució binomial $B(400;\ 0{,}4)$, calcula:

a) $\boldsymbol{p[X \le 150]}$

b) $\boldsymbol{p[140 \le X \le 175]}$

c) $\boldsymbol{p[X = 165]}$

d) $\boldsymbol{p[X \ge 180}$

$\mu = np = 400 \cdot 0{,}4 = 160$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{96} = 9{,}8$

La distribució normal corresponent és: $N(160;\ 9{,}8)$

a) $p[X \le 150] = p[Z \le -1{,}02] = p[Z \ge 1{,}02] = 1 - p[Z \le 1{,}02] =$
$= 1 - 0{,}8461 = 0{,}1539$

b) $p[140 \le X \le 175] = p[-\,2{,}04 \le Z \le 1{,}53] =$
$= p[Z \le 1{,}53] - p[Z \le -\,2{,}04 = p[Z \le 1{,}53] - p[Z \ge 2{,}04] =$
$= \mathrm{p}[Z \le 1{,}53] - (1 - p[Z \le 2{,}04]) = 0{,}937 - (1 - 0{,}979\,3) =$
$= 0{,}937 - 0{,}020\,7 = 0{,}916\,3$

c) $p[164{,}5 \le X \le 165{,}5] = p[0{,}46 \le Z \le 0{,}56] =$
$= p[Z \le 0{,}56] - p[Z \le 0{,}46] = 0{,}7123 - 0{,}6772 = 0{,}0351$

d) $p[X \ge 180] = p[Z \ge 2{,}04] = 1 - p[Z \le 2{,}04] = 1 - 0{,}979\,3 = 0{,}020\,7$

35. Esbrina la probabilitat que una variable discreta prengui valors entre 380 i 420 en una distribució binomial $B(n,\ p)$, per a $n = 600$ i $p = \frac{2}{3}$.

$\mu = np = 600\,\frac{2}{3} = 400;\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{133{,}\widehat{3}} = 11{,}5$

La distribució normal aproximada és: $N(400;\ 11{,}55)$

$p[380 \le X \le 420] = p[-\,1{,}73 \le Z \le 1{,}73] = 2(p[Z \le 1{,}73] - 0{,}5) =$
$= 2(0{,}958\,2 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}458\,2 = 0{,}916\,4$

36. Llancem un dau 300 vegades. Calcula la probabilitat d'obtenir un nombre parell de punts:

a) **Menys de 120 vegades.**

b) **Més de 150 vegades.**

c) **Exactament 140 vegades.**

La probabilitat d'obtenir un nombre parell de punts en llançar un dau una vegada és:

$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, d'on s'obté:

$\mu = np = 300\,\frac{1}{2} = 150;\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{300 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{75} = 8{,}66$

La distribució normal aproximada és: $N(150;\ 8{,}66)$

a) $p[X \le 120] = p[Z \le -\,3{,}46] = p[Z \ge 3{,}46] = 1 - p[Z \le 3{,}46] =$
$= 1 - 0{,}999\,73 = 0{,}000\,27$

b) $p[X \ge 150] = p[Z \ge 0] = 0{,}5$

c) $p[139{,}5 \le X \le 140{,}5] = p[-1{,}21 \le Z \le -\,1{,}09] =$
$p[1{,}09 \le Z \le 1{,}21] = p[Z \le 1{,}21] - p[Z \le 1{,}09] =$
$= 0{,}886\,9 - 0{,}862\,1 = 0{,}024\,8$

Activitats finals

1. Esbrina la probabilitat d'obtenir:

a) Dos èxits mitjançant la distribució $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$.

b) Més de tres èxits mitjançant la distribució $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$.

c) Menys de dos fracassos mitjançant la distribució $B\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

a) $p[X = 2] = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

$= 6 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2^2}{3^2} = \frac{24}{3^4} = \frac{8}{3^3} = \frac{8}{27}$

b) $p[X > 3] = p[X = 4] + p[X = 5] + p[X = 6] =$

$= \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6 =$

$= \frac{1}{2^6}(15 + 6 + 1) = \frac{22}{2^6} = \frac{11}{2^5} = \frac{11}{32}$

c) $p[X > 2] = p[X = 3] + p[X = 4] =$

$= \binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{3}{4} + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4^4} =$

$= \frac{12}{4^4} + \frac{1}{4^4} = \frac{13}{4^4} = \frac{13}{256}$

2. Un equip *A* té una probabilitat $p = \frac{2}{3}$ de guanyar un partit. Si l'equip juga 6 partits, calcula la probabilitat que:

a) Guanyi dos partits.

b) Perdi més de la meitat dels partits.

X: «nombre de partits guanyats» $\rightarrow B\left(6, \frac{2}{3}\right)$

a) $p[X = 2] = \binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 =$

$= 15 \cdot \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{60}{3^6} = \frac{20}{3^5} = \frac{20}{243}$

b) $p[X < 3] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] =$

$= \binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \binom{6}{1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 =$

$= \frac{1}{3^6} + \frac{12}{3^6} + \frac{60}{3^6} = \frac{73}{3^6} = \frac{73}{729}$

3. Llancem 10 daus alhora. Definim la variable aleatòria *X:* «nombre de daus en què s'obté la cara 1». Calcula:

a) $p[X = 3]$

b) $p[X \geq 7]$

c) $p[X < 5]$

$B\left(10, \frac{1}{6}\right)$

a) $p[X = 3] = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 =$

$= 120 \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5^7}{6^7} = 0{,}15505$

b) $p[X \geq 7] =$

$= p[X = 7] + p[X = 8] + p[X = 9] + p[X = 10] =$

$= \binom{10}{7}\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{10}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^2 +$

$+ \binom{10}{9}\left(\frac{1}{6}\right)^9 \frac{5}{6} + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 0{,}000\,248 + 0{,}000\,018\,6 +$

$+ 0{,}000\,000\,8 + 0{,}000\,000\,02 = 0{,}000\,267\,4$

c) $p[X < 5] = p[X = 0] + p[X = 1] +$

$+ p[X = 2] + p[X = 3] + p[X = 4] =$

$= \binom{10}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^9 +$

$+ \binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 + \binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6 =$

$= 0{,}161\,505\,5 + 0{,}323\,011\,1 + 0{,}290\,71 +$

$+ 0{,}155\,045\,3 + 0{,}054\,265\,8 = 0{,}984\,54$

4. Determina el nombre esperat de respostes correctes en un examen tipus test de 10 preguntes. Cada pregunta consta de 4 respostes possibles, de les quals només una és correcta, i se suposa que cada pregunta es contesta a l'atzar.

$B\left(10, \frac{1}{4}\right)$; per *X:* «nombre de respostes correctes»

$\mu = np = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$ respostes correctes

5. Sabem que un medicament determinat millora els símptomes d'una malaltia en dos de cada tres pacients. Si administrem aquest medicament a set malalts, calcula la probabilitat que:

a) Millorin quatre persones.

b) Millorin, com a mínim, tres persones.

c) Millorin les set persones.

X: «nombre de persones que milloren amb el medicament» $\rightarrow B\left(7, \frac{2}{3}\right)$

a) $p[X = 4] = \binom{7}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

$= 35 \cdot \frac{2^4}{3^4} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{35 \cdot 2^4}{3^7} = \frac{560}{2\,187} = 0{,}256\,06$

b) $p[X \geq 3] = 1 - p[X < 3] =$

$= 1 - [p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2]] =$

$= 1 - \left[\binom{7}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \binom{7}{1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \binom{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^5\right] =$

$= 1 - (0{,}000\,457\,2 + 0{,}006\,401\,4 + 0{,}038\,408\,7) =$

$= 1 - 0{,}045\,267\,3 = 0{,}954\,74$

c) $p[X = 7] = \binom{7}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0{,}058\,53$

6. Estudis recents han confirmat que el 70 % dels portadors del virus de la sida ha consumit algun tipus de droga. A la sala d'espera d'una consulta especialitzada en aquesta malaltia s'hi troben, en un cert moment, sis persones portadores del virus. Determina la probabilitat que cap de les sis persones no hagi consumit drogues.

X: «nombre de persones que han consumit droga»

$B(6;\ 0{,}7)$

$$p[X=0]=\binom{6}{0}0{,}3^6=0{,}000\,729$$

7. Sabem que només el 5 % de les persones que visiten un logopeda pertany a una família nombrosa. Si a la consulta d'un logopeda hi ha cinc persones, esbrina la probabilitat que:

***a*) Cap sigui de família nombrosa.**

***b*) Almenys dues no siguin de família nombrosa.**

a) *X:* «nombre de persones que pertanyen a una família nombrosa»

$B(5;\ 0{,}05)$

$$p[X=0]=\binom{5}{0}0{,}95^5=0{,}773\,781$$

b) $p[X\le 3]=1-p[X>3]=$

$=1-(p[X=4]+p[X=5])=$

$=1-\left[\binom{5}{4}0{,}05^4\cdot 0{,}95+\binom{5}{5}0{,}05^5\right]=$

$=1-(0{,}000\,029\,6+0{,}000\,000\,3)=$

$=1-0{,}000\,029\,9=0{,}999\,97$

8. Sigui *X* una variable aleatòria contínua que segueix una distribució normal *N*(μ, σ). Determina:

$$p\left[\mu-\frac{3}{2}\sigma\le X\le\mu+2\sigma\right]$$

$p\left[\mu-\frac{3}{2}\sigma\le X\le\mu+2\sigma\right]=p\left[-\frac{3}{2}\le Z\le 2\right]=$

$=p[Z\le 2]-p[Z\le -1{,}5]=p[Z\le 2]-p[Z\ge 1{,}5]=$

$=p[Z\le 2]-\big(1-p[Z\le 1{,}5]\big)=$

$=0{,}977\,2-(1-0{,}933\,2)=0{,}977\,2-0{,}066\,8=$

$=0{,}910\,4$

9. Demostra que el 99,74 % del total de l'àrea de recinte que determina la funció de densitat amb l'eix *OX* en una distribució normal *N*(μ, σ) se situa a l'interval (μ − 3σ, μ + 3σ).

$p[\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma]=p[-3\le Z\le 3]=$

$=2\cdot\big(p[Z\le 3]-0{,}5\big)=2\cdot(0{,}998\,7-0{,}5)=$

$=2\cdot 0{,}498\,7=0{,}997\,4\ \rightarrow\ 99{,}74\,\%$

10. Esbrina la probabilitat que una variable contínua prengui valors compresos entre 32 i 40 en una distribució *N*(50, 5).

$p[32\le X\le 40]=p[-3{,}6\le Z\le -2]=p[2\le z\le 3{,}6]=$

$=p[Z\le 3{,}6]-p[Z\le 2]=0{,}999\,84-0{,}977\,2=0{,}022\,64$

11. La durada de l'embaràs de les dones segueix una distribució normal, amb una mitjana de 266 dies i una desviació típica de 16 dies. Calcula el percentatge d'embarassos amb una durada màxima de 244 dies.

X: «durada de l'embaràs en dies» → *N*(266, 16)

$p[X\le 244]=p[Z\le -1{,}38]=p[Z\ge 1{,}38]=$

$=1-p[Z\le 1{,}38]=1-0{,}916\,2=0{,}083\,8$

El 8,38 % d'embarassos.

12. La mitjana de pes de 500 persones és 70 kg i la desviació típica, 3 kg. Suposant que el pes es distribueix normalment, determina el nombre de persones que pesen:

***a*) Entre 60 i 75 kg.**

***b*) Més de 90 kg.**

***c*) Menys de 64 kg.**

N(70, 3); *X:* «pes en kg»

a) $p[60\le X\le 75]=p[-3{,}33\le Z\le 1{,}67]=$

$=p[Z\le 1{,}67]-p[Z\le -3{,}33]=$

$=p[Z\le 1{,}67]-p[Z\ge 3{,}33]=$

$=p[Z\le 1{,}67]-(1-p[Z\le 3{,}33])=$

$=0{,}952\,5-(1-0{,}999\,57)=0{,}952\,5-0{,}000\,43=0{,}952\,07$

500 · 0,952 07 = 476 persones pesen entre 60 i 75 kg.

b) $p[X\ge 90]=p[Z\ge 6{,}67]=0$

500 · 0 = 0 → cap persona pesa més de 90 kg.

c) $p[X\le 64]=p[Z\le -2]=p[Z\ge 2]=1-p[Z\le 2]=$

$=1-0{,}977\,2=0{,}022\,8$

500 · 0,022 8 = 11 persones pesen menys de 64 kg.

13. La nota mitjana de les proves d'accés a una facultat va ser de 5,8 amb una desviació típica d'1,75. Si van ser admesos tots els estudiants amb una nota superior a 6 i considerant que la distribució és normal:

***a*) Quin va ser el percentatge d'estudiants admesos?**

***b*) Quina és la probabilitat que exactament quatre de cada deu estudiants fossin admesos?**

***c*) Si haguessin admès el 55 % dels estudiants, quina hauria estat la nota de tall en aquesta facultat?**

X: «notes» → *N*(5,8; 1,75)

a) $p[X\ge 6]=p[Z\ge 0{,}11]=1-p[Z\le 0{,}11]=$

$=1-0{,}543\,8=0{,}456\,2\rightarrow 45{,}62\,\%$

b) $B(10;\ 0{,}456\,2)$; *Y:* «nombre d'estudiants admesos»

$$p[Y=4]=\binom{10}{4}0{,}456\,2^4\cdot 0{,}543\,8^6=0{,}235\,22$$

c) La nota seria 5,57.

14. La data de caducitat d'un medicament és el 31 de desembre d'un any determinat. Sabem que, després d'aquesta data, l'efectivitat del medicament segueix una distribució normal la mitjana de la qual és de 300 dies i la desviació típica, de 100 dies.

a) Calcula la probabilitat que no sigui efectiu el 31 de desembre de l'any següent.

b) Quin dia s'haurà de consumir si volem tenir un 80 % de probabilitat que sigui efectiu?

X: «dies que passen de la data de caducitat» $N(300, 100)$

a) $p[X \leq 365] = p[Z \leq 0{,}65] = 0{,}7257$

b) $p[X \geq x] = 0{,}8 \rightarrow p[Z \geq z] = 0{,}8 \rightarrow p[Z \leq -z] = 0{,}8 \rightarrow -z = 0{,}84$

$z = -0{,}84 \rightarrow x = \sigma z + \mu = 100 \cdot (-0{,}84) + 300 = 216$ dies

216 dies després de la data de caducitat.

15. En un estadi esportiu es volen instal·lar focus per il·luminar el terreny de joc. El temps de funcionament dels focus segueix una distribució normal, amb una mitjana de 40 hores i una desviació típica de 4 hores.

a) Si escollim un focus a l'atzar, quina és la probabilitat que il·lumini un mínim de 30 hores?

b) Si es compren 1 500 focus, quants podem esperar que funcionin 30 hores, com a mínim?

X: «temps de funcionament dels focus en hores» $\rightarrow N(40, 4)$

a) $p[X \geq 30] = p[Z \geq -2{,}5] = p[Z \leq 2{,}5] = 0{,}9938$

b) $1\,500 \cdot 0{,}9938 = 1\,490{,}7 \simeq 1\,491$ focus

16. Per aprovar unes oposicions es necessita obtenir en una prova 100 punts com a mínim. Sabem que la distribució dels punts obtinguts és normal, amb una mitjana de 110 punts i una desviació típica de 15 punts.

a) Quina és la probabilitat que aprovi un opositor?

b) Si s'hi presenten 1 000 opositors i només hi ha 300 places, quants punts s'han d'aconseguir per guanyar una d'aquestes places?

X: «nombre de punts obtinguts» $\rightarrow N(110, 15)$

a) $p[X \geq 100] = p[Z \geq -0{,}67] = p[Z \leq 0{,}67] = 0{,}7486$

b) $p[X \geq x] = 0{,}3 \rightarrow p[Z \geq z] = 0{,}3 \rightarrow p[Z \leq z] = 0{,}7 \rightarrow z = 0{,}52$

$x = \sigma z + \mu = 15 \cdot 0{,}52 + 110 = 117{,}8$ punts

17. El percentatge d'espanyols amb estudis mitjans és del 35 %. Si triem vuit persones a l'atzar, calcula la probabilitat que entre 3 i 5 (ambdós inclosos) tinguin estudis mitjans, aplicant-hi:

a) La distribució binomial.

b) L'aproximació normal a la binomial.

X: «nombre d'espanyols que tenen estudis mitjans»

a) $B(8; 0{,}35)$

$p[3 \leq X \leq 5] = p[X = 3] + p[X = 4] + p[X = 5] =$

$= \binom{8}{3} 0{,}35^3 \cdot 0{,}65^5 + \binom{8}{4} 0{,}35^4 \cdot 0{,}65^4 + \binom{8}{5} 0{,}35^5 \cdot 0{,}65^3 =$

$= 0{,}2785858 + 0{,}1875097 + 0{,}0807734 = 0{,}5468687$

b) $\mu = np = 8 \cdot 0{,}35 = 2{,}8$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65} = 1{,}35$

$B(8; 0{,}35) \rightarrow N(2{,}8; 1{,}35)$

$p[2{,}5 \leq X \leq 5{,}5] = p[-0{,}22 \leq Z \leq 2] =$

$= p[Z \leq 2] - p[Z \leq -0{,}22] = p[Z \leq 2] - p[Z \geq 0{,}22] =$

$= p[Z \leq 2] - (1 - p[Z \leq 0{,}22]) =$

$= 0{,}9772 - (1 - 0{,}5871) = 0{,}9772 - 0{,}4129 = 0{,}5643$

18. El nombre de fulls que empaqueta una màquina segueix una distribució normal, amb una mitjana de 1 000 fulls i una desviació típica de 10 fulls. Un paquet de fulls s'accepta si en té entre 995 i 1 005. Es demana:

a) La probabilitat que un paquet sigui acceptat.

b) La probabilitat que exactament dos paquets de cada deu siguin acceptats.

c) Si el 65 % dels paquets té més d'un nombre de fulls determinat, quants fulls té cadascun d'aquests paquets?

X: «nombre de fulls» $\rightarrow N(1\,000, 10)$

a) $p[995 \leq X \leq 1\,005] = p[-0{,}5 \leq Z \leq 0{,}5] =$

$= 2(p[Z \leq 0{,}5] - 0{,}5) = 2(0{,}6915 - 0{,}5) =$

$= 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383$

b) $B(10; 0{,}383)$; *Y:* «nombre de paquets acceptats»

$p[Y = 2] = \binom{10}{2} 0{,}383^2 \cdot 0{,}617^8 = 0{,}13864$

c) $p[X \geq x] = 0{,}65 \rightarrow p[Z \geq z] = 0{,}65 \rightarrow p[Z \leq -z] = 0{,}65 \rightarrow -z = 0{,}39$

$z = -0{,}39 \rightarrow x = \sigma z + \mu = 10 \cdot (-0{,}39) + 1\,000 = 996$ fulls

19. Es llança 100 vegades un dau. Calcula la probabilitat d'obtenir el nombre 5:

a) Menys de 18 vegades.

b) Més de 14 vegades.

c) Exactament 20 vegades.

X: «nombre de vegades que surt el 5»

$B\left(100, \frac{1}{6}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 100 \cdot \frac{1}{6} = 16,\widehat{6} \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 3,73 \end{array}\right\} N = (16,\widehat{6}; 3,73)$$

a) $p[X \leq 18,5] = p[Z \leq 0,49] = 0,687\,9$

b) $p[X \geq 13,5] = p[Z \geq -0,85] =$
$= p[Z \leq 0,85] = 0,802\,3$

c) $p[19,5 \leq X \leq 20,5] = p[0,76 \leq Z \leq 1,03] =$
$p[Z \leq 1,03] - p[Z \leq 0,76] = 0,848\,5 - 0,776\,4 =$
$= 0,072\,1$

20. El temps que necessita una ambulància per arribar a l'hora a un hospital es distribueix normalment amb una mitjana de 12 minuts i una desviació típica de 3 minuts.

***a)* Determina la probabilitat que el temps que trigui a arribar es trobi entre 10 i 19 minuts.**

***b)* Calcula el temps en minuts per al qual la probabilitat que l'ambulància es retardi sigui del 15 %.**

X: «temps que necessita l'ambulància» → $N(12, 3)$

a) $p[10 \leq X \leq 19] = p[-0,67 \leq Z \leq 2,33] =$
$= p[Z \leq 2,33] - p[Z \leq -0,67] =$
$= p[Z \leq 2,33] - p[Z \geq 0,67] =$
$= p[Z \leq 2,33] - (1 - p[Z \leq 0,67]) =$
$= 0,990\,1 - (1 - 0,748\,6) = 0,990\,1 - 0,251\,4 = 0,738\,7$

b) $p[X \leq x] = 0,15 \rightarrow p[Z \leq z] = 0,15 \rightarrow p[Z \leq -z] = 0,85 \rightarrow$
$-z = 1,04$
$z = -1,04 \rightarrow x = \sigma z + \mu = 3 \cdot (-1,04) + 12 = 8,88$ minuts

21. La mitjana del pes dels habitants d'una ciutat és de 65 kg, amb una desviació típica de 5 kg. Suposant una distribució normal dels pesos, és zero la probabilitat que en escollir una persona a l'atzar pesi més de 100 kg? Justifica la resposta.

X: «pes en kg» → $N(65, 5)$

$p[X \geq 100] = p[Z \geq 7] = 0$

Sí, és zero.

22. Sabem que les notes d'un examen segueixen una distribució normal. El 17,5 % dels alumnes han obtingut una nota que supera els 7 punts, mentre que la nota del 15,7 % no arriba a 5 punts. Calcula:

***a)* La nota mitjana de l'examen.**

***b)* El percentatge d'alumnes que han obtingut una nota compresa entre 5 i 7 punts.**

a) *X:* «notes» → $N(\mu, \sigma)$

$p[X \geq 7] = 0,175$

$p[X \leq 5] = 0,157$

$p[Z \geq z_1] = 0,175 \rightarrow p[Z \leq z_1] = 0,825 \rightarrow z_1 = 0,93$

$p[Z \leq z_2] = 0,157 \rightarrow p[Z \leq -z_2] = 0,843 \rightarrow$

$-z_2 = 1,01 \rightarrow z_2 = -1,01$

$$\left.\begin{array}{l} 0,93 = \dfrac{7-\mu}{\sigma} \\ -1,01 = \dfrac{5-\mu}{\sigma} \end{array}\right\}$$

d'on s'obté:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \dfrac{7-\mu}{0,93} \\ \sigma = \dfrac{5-\mu}{-1,01} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{7-\mu}{0,93} = \frac{5-\mu}{-1,01} \rightarrow \mu = 6,04$$

b) $p[5 \leq X \leq 7] = p[X \leq 7] - p[X \leq 5] =$

$= 1 - p[X \geq 7] - p[X \leq 5] =$

$= 1 - 0,175 - 0,157 = 0,668$

El 66,8 % dels alumnes.

23. Llancem una moneda 50 vegades. Esbrina la probabilitat que el nombre de cares que obtinguem estigui comprès entre 12 i 16 (ambdues incloses). Utilitza:

***a)* La distribució binomial corresponent.**

***b)* L'aproximació normal a la binomial.**

X: «nombre de cares»

a) $B\left(50, \frac{1}{2}\right)$

$p[12 \leq X \leq 16] = p[X = 12] + p[X = 13] +$
$+ p[X = 14] + p[X = 15] + p[X = 16] =$

$$= \binom{50}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} + \binom{50}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} + \binom{50}{14}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} + \binom{50}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} +$$
$$+ \binom{50}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = 0,007\,63$$

b) $\mu = np = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 3,54$

$N(25; 3,54)$

$p[11,5 \leq X \leq 16,5] - p[-3,81 \leq Z \leq -2,4] =$

$= p[2,4 \leq Z \leq 3,81] = p[Z \leq 3,81] - p[Z \leq 2,4] =$

$= 0,999\,93 - 0,991\,8 = 0,008\,13$

24. Suposem una distribució normal $N(50, \sigma)$ en què $p[X \geq 70] = 0{,}0228$. Determina el valor de σ i calcula $p[X \leq 45]$.

a) $p[X \geq 70] = 0{,}0228$

$p[Z \geq z] = 0{,}0228 \rightarrow p[Z \leq z] = 0{,}9772 \rightarrow z = 2$

$2 = \dfrac{70 - 50}{\sigma} \rightarrow \sigma = \dfrac{70 - 50}{2} = 10$

$N(50,\ 10)$

b) $p[X \leq 45] = p[Z \leq -0{,}5] = p[Z \geq 0{,}5] =$

$= 1 - p[Z \leq 0{,}5] = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

25. Dues variables aleatòries contínues X i Y segueixen una distribució normal la mitjana de la qual és zero. A més, $p[X \geq 2] = p[Y \geq 3] = 0{,}1587$. Calcula'n les variàncies corresponents.

$p[X \geq 2] = 0{,}1587$

$p[Y \geq 3] = 0{,}1587$

$p[Z \geq z] = 0{,}1587 \rightarrow p[Z \leq z] = 0{,}8413 \rightarrow z = 1$

$1 = \dfrac{2}{\sigma_y} \rightarrow \sigma_1 = 2 \rightarrow \sigma_x^2 = 4$, de la variable X

$1 = \dfrac{3}{\sigma_y} \rightarrow \sigma_2 = 3 \rightarrow \sigma_y^2 = 9$, de la variable Y

Annex. Avaluacions

Unitat 1

1. Digues, de manera raonada, si les afirmacions següents són certes o falses.

a) $\sqrt[3]{-343}$ **és un nombre racional.**

b) **El nombre real** $\frac{2+\pi}{5}$ **està comprès entre els nombres naturals 1 i 2.**

c) **–4 és un nombre racional.**

d) **El resultat de** $\sqrt{12}+3\sqrt{3}-\sqrt{75}$ **és 0.**

a) Cert, perquè $\sqrt[3]{-343}=-7$.

b) Cert, ja que $\frac{2+\pi}{5}\simeq 1{,}03$.

c) Cert, concretament es tracta d'un nombre enter.

d) Cert.

$$\sqrt{12}+3\sqrt{3}-\sqrt{75}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=$$
$$=(2+3-5)\sqrt{3}=0$$

2. Expressa de manera exacta:

a) **El volum d'un cub de 3 cm de diagonal.**

b) **L'àrea lateral d'un con amb una base de 5 cm de radi i de 12 cm d'altura.**

c) **El radi d'una esfera de 27 cm³ de volum.**

d) **La hipotenusa d'un triangle rectangle en el qual un dels catets mesura el doble que l'altre.**

a) Si d representa la diagonal d'un cub i a la seva aresta, es verifica:

$$d^2=3a^2\rightarrow a^2=\frac{d^2}{3}\rightarrow a=\frac{d\sqrt{3}}{3}\rightarrow a=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}\text{ cm}$$
$$V=a^3=(\sqrt{3})^3=3\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

b) La generatriu del con mesura: $g=\sqrt{5^2+12^2}=13$ cm, i l'àrea lateral: $A_{lat}=\pi rg=65\pi$ cm².

c) Volum d'una esfera de radi r: $V=\frac{4}{3}\pi r^3\rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

$$r=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 27}{4\pi}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\text{ cm}$$

d) Si representem per c la mesura del catet més petit, l'altre catet mesurarà $2c$. La mesura de l'hipotenusa d'aquest triangle rectangle s'expressarà:

$$h=\sqrt{c^2+(2c)^2}=\sqrt{5c^2}=c\sqrt{5}$$

3. a) **Expressa en forma d'una sola arrel:**

$$\sqrt[7]{a}\cdot\sqrt[7]{b^2};\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}};\ \left(p\sqrt[4]{p^3}\right)^5;\ \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}$$

b) **Expressa en forma de potència:**

$$a^2\cdot\sqrt[3]{a};\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}};\ \left(\sqrt[3]{b^2}\right)^2;\ \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}}$$

a) $\sqrt[7]{a}\cdot\sqrt[7]{b^2}=\sqrt[7]{ab^2}$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}=\frac{\sqrt[6]{x^3}}{\sqrt[6]{y^4}}=\sqrt[6]{\frac{x^3}{y^4}}$$
$$\left(p\sqrt[4]{p^3}\right)^5=\left(\sqrt[4]{p^7}\right)^5=\sqrt[4]{p^{35}}$$
$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}$$

b) $a^2\cdot\sqrt[3]{a}=a^2\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{3}}$

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\sqrt{2^3}\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^7}}}=\sqrt[8]{2^7}=2^{\frac{7}{8}}$$
$$\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^2=\sqrt[3]{b^4}=b^{\frac{4}{3}}$$
$$\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[10]{x^4}}{\sqrt[10]{x^5}}=\sqrt[10]{x^{-1}}=x^{\frac{-1}{10}}$$

4. Calcula i expressa de la manera més senzilla possible:

a) $(3\sqrt{2}+7\sqrt{3})(3\sqrt{2}-7\sqrt{3})$

b) $2\sqrt{75}-\sqrt{300}+\frac{1}{2}\sqrt{12}$

c) $(5+2\sqrt{7})-(5-2\sqrt{7})$

d) $\sqrt{(a+b)^2-4ab}$

a) $(3\sqrt{2}+7\sqrt{3})(3\sqrt{2}-7\sqrt{3})=18-147=-129$

b) $2\sqrt{75}-\sqrt{300}+\frac{1}{2}\sqrt{12}=10\sqrt{3}-10\sqrt{3}+\sqrt{3}=$
$=(10-10+1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

c) $(5+2\sqrt{7})-(5-2\sqrt{7})=5+2\sqrt{7}-5+2\sqrt{7}=$
$=4\sqrt{7}$

d) $\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}=$
$=a-b$

5. Fes les operacions indicades, racionalitzant prèviament les expressions fraccionàries:

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}-\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ **b)** $\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{3}{\sqrt{32}}\right)$

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3}=$
$\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$

$\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}=$
$\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$

$\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}-\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=$
$=2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}}{8}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{3}{\sqrt{32}}\cdot\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{32}}=\frac{3\sqrt{32}}{32}$

$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{3}{\sqrt{32}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3\sqrt{32}}{32}\right)=$
$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

Unitat 2

1. Contesta raonadament les qüestions següents:

a) En restar dos polinomis de tercer grau obtenim un polinomi de segon grau. Quina relació hi ha entre els coeficients de grau més gran dels dos polinomis?

b) Un polinomi $P(x)$ és divisible per $x + 1$. Per a quin valor es verifica $P(x) = 0$?

c) El grau d'un polinomi $P(x)$ és 3. Quin és el grau del polinomi $[P(x)]^2$?

d) Si $x = 2$ és una arrel de $P(x)$, què podem afirmar sobre el valor de $P(2)$?

a) Els dos coeficients de grau més alt són iguals.

b) Per a $x = -1$ es verifica $P(-1) = 0$.

c) El grau de $[P(x)]^2$ és $6 = 3 \cdot 2$.

d) Si $x = 2$ és una arrel de $P(x) \to P(2) = 0$.

2. Considera el polinomi $A(x) = x^3 - 4x$.

a) Factoritza'l i indica'n les arrels.

b) Calcula $[A(x)]^4$.

a) $A(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$

Les arrels són $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

b) $[A(x)]^4 = [x^3 - 4x]^4 =$

$$= \binom{4}{0}(x^3)^4 + \binom{4}{1}(x^3)^3(-4x) + \binom{4}{2}(x^3)^2(-4x)^2 +$$
$$+ \binom{4}{3}(x^3)(-4x)^3 + \binom{4}{4}(-4x)^4 =$$
$$= x^{12} + 4(x^3)^3(-4x) + 6(x^3)^2(-4x)^2 +$$
$$+ 4(x^3)(-4x)^3 + (-4x)^4 =$$
$$= x^{12} - 16x^{10} + 96x^8 - 256x^6 + 256x^4$$

3. Determina el valor de k per tal que $P(x) = x^4 - 2x^3 + 7x + k$ sigui divisible per $x + 1$.

Si $P(x)$ és divisible per $x + 1$, llavors $P(-1) = 0$ i per tant $1 + 2 - 7 + k = 0 \to k = 4$.

4. Efectua les operacions següents:

a) $\dfrac{2x-5}{x^2-9} - \dfrac{5}{3x-9}$

b) $\dfrac{2x^2-5x}{x^2-9} \cdot \dfrac{2x-6}{7x^2}$

a) $\dfrac{2x-5}{x^2-9} - \dfrac{5}{3x-9} = \dfrac{6x-15-5(x+3)}{3(x-3)(x+3)} = \dfrac{6x-15-5x-15}{3x^2-27} =$

$= \dfrac{x-30}{3x^2-27}$

b) $\dfrac{2x^2-5x}{x^2-9} \cdot \dfrac{2x-6}{7x^2} = \dfrac{x(2x-5)2(x-3)}{(x-3)(x+3)7x^2} = \dfrac{4x-10}{7x^2+21x}$

5. Esbrina les arrels del polinomi $P(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 6x - 11$ i fes-ne la factorització.

$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 6x + 11)$; arrels: 1, –1.

6. Atesos els polinomis:

$$P(x) = 5x^2 - 35x + 60 \text{ i } Q(x) = 10x^2 - 160$$

a) Factoritza'ls.

b) Calcula l'm. c. d.

c) Simplifica la fracció algèbrica $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

a) Factoritzem els polinomis:

$P(x) = 5(x - 3)(x - 4)$

$Q(x) = 10(x - 4)(x + 4)$

b) m. c. d. $(P(x), Q(x)) = 5(x - 4)$

c) Simplifiquem la fracció:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5(x-3)(x-4)}{10(x-4)(x+4)} = \frac{x-3}{2(x+4)}$$

Unitat 3

1. Determina el domini i el recorregut de les funcions següents. Representa gràficament les funcions corresponents als apartats *a*), *b*) i *c*) i indica les característiques de la funció de l'apartat *c*).

a) $f(x) = 5$

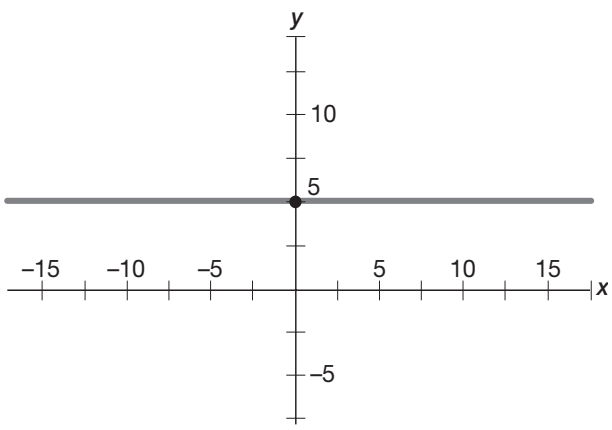
b) $g(x) = -2x + 1$

c) $h(x) = x^2 - 2x + 3$

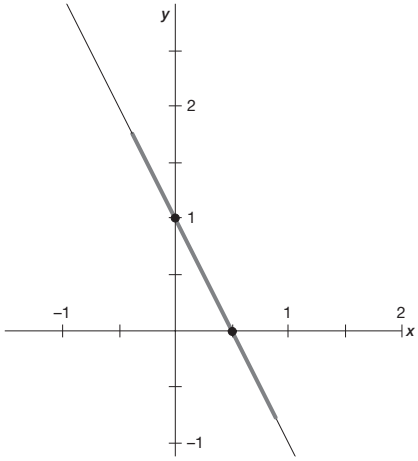
d) $k(x) = \dfrac{5x-4}{x^2-4x}$

e) $t(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

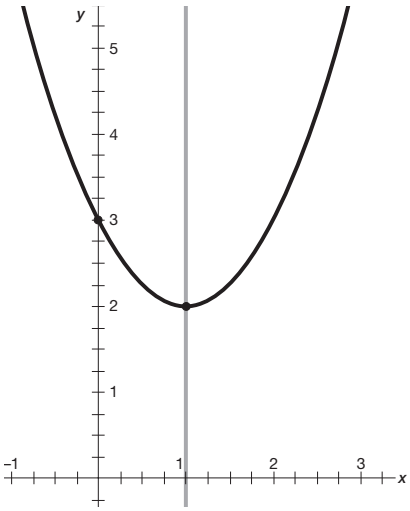
a) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \{5\}$



b) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$



c) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [2, +\infty)$



La funció *c)* és una funció contínua, amb un mínim absolut en (1, 2), decreixent fins a $x = 1$ i creixent a partir de $x = 1$. És una funció sempre positiva que talla l'eix de les y en el punt (0, 3).

d) $D_f = \mathbb{R} - \{0,4\}$

e) $D_f = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, $R_f = \mathbb{R}$.

2. Donades les funcions $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$ i $h(x) = x^2 - 1$, determina l'expressió algèbrica de les funcions:

a) $f + g$ ***b)*** $f \cdot g$ ***c)*** $f : g$ ***d)*** $f \circ h$

a) $(f+g)(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{x+3}$

b) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{(3x-2)x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{3x^3-2x^2}{x^2+6x+9}$

c) $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{(3x-2)\,(x+3)}{x^2(x+3)} = \dfrac{3x^2+7x-6}{x^3+3x^2}$

d) $(f \circ h)(x) = \dfrac{3(x^2-1)-2}{(x^2-1)+3} = \dfrac{3x^2-5}{x^2+2}$

3. Esbrina la funció inversa de:

a) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x + 2$

b) $g(x) = 2x - 5$

c) **Comprova que $(g^{-1} \circ g)\,(x) = (g \circ g^{-1})\,(x) = x$.**

a) $y = -\dfrac{1}{3}x + 2 \rightarrow x = -\dfrac{1}{3}y + 2 \rightarrow 3x = -y + 6 \rightarrow$
$y = -3x + 6 \rightarrow f^{-1}(x) = -3x + 6$

b) $y = 2x - 5 \rightarrow x = 2y - 5 \rightarrow y = \dfrac{x+5}{2} \rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{2}$

c) $(g^{-1} \circ g)(x) = \dfrac{(2x-5)+5}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$

$(g \circ g^{-1})(x) = 2\left(\dfrac{x+5}{2}\right) - 5 = x + 5 - 5 = x$

4. Un venedor té un salari mensual que està determinat per un sou fix més un cert percentatge sobre el volum de vendes que ha fet durant el mes. Si ven per valor de 2 000 €, el seu salari és de 1 200 € i, si ven per valor de 2 500 €, el salari és de 1 300 €. Troba el percentatge que guanya sobre el total de vendes i el sou fix del venedor.

b: sou fix

a: % del volum de vendes

Busquem una funció de la forma $y = ax + b$.

Sabem $\begin{cases} 1\,200 = 2\,000a + b \\ 1\,300 = 2\,500a + b \end{cases}$

Si es resol per reducció, restant les equacions $-100 = -500a \rightarrow$ $a = \dfrac{1}{5} = 0{,}2 = 20\,\%$ i $b = 800$.

Així, el percentatge que guanya sobre el total de vendes és del 20 % i el sou fix són 800 €.

5. El nombre *n* d'articles produïts en una empresa un dia qualsevol, *t* hores després d'haver començat a treballar, és $n(t) = -t^2 + 20t$, amb una jornada laboral de 8 hores diàries. Si el cost de producció, en euros, dels *t* articles és $c(n) = 5 + 6n$, determina l'expressió de la funció $c(t)$ que dóna el cost de producció en funció del temps. Indica'n el domini i calcula el cost de producció per a $t = 4$.

$c(t) = c(n(t)) = 5 + 6n(t) = 5 + 6(-t^2 + 20t) = 5 - 6t^2 + 120t =$
$= -6t^2 + 120t + 5$, és a dir:

$c(t) = -6t^2 + 120t + 5$

$D_c = (0,8]$

$t = 4 \rightarrow c(4) = -6 \cdot 16 + 120 \cdot 4 + 5 = -96 + 480 + 5 = 389$

El cost és de 389 €.

Unitat 4

1. Considera una progressió geomètrica $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Esbrina el terme general de la successió i la suma dels set primers termes.

La raó és 2 i la suma serà $S_7 = \dfrac{3(2^7-1)}{1} = 381$

2. Donada la successió $a_n = \dfrac{n-3}{2n}$:

a) Esbrina si la successió és creixent o decreixent,

b) Determina si la successió és fitada.

La successió és creixent:

$$a_{n+1} > a_n \to \frac{n-2}{2n+2} > \frac{n-3}{2n} \to 2n^2 - 4n > 2n^2 - 6n + 2n - 6 \to$$

$\to 0 > -6$ sempre és cert.

És fitada, la fita inferior és –1 i la superior $\frac{1}{2}$.

3. Calcula els límits següents:

a) $\lim \dfrac{n^2-n+1}{2n-5}$

b) $\lim \dfrac{5n+3}{2+n}$

c) $\lim \dfrac{2n+3}{n^3+1}$

d) $\lim \left(n - \sqrt{n^2+1}\right)$

e) $\lim \left(\dfrac{n+5}{n-1}\right)^{2n^2+1}$

f) $\lim \left(\dfrac{2n-1}{n+3}\right)^{\frac{n^2+1}{2n^2-5}}$

a) ∞

b) –5

c) 0

d) Multiplicant i dividint pel conjugat, 0

e) És de nombre e,

$$\lim \left(1+\frac{6}{n-1}\right)^{2n^2+1} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{6}}\right)^{\frac{n-1}{6}}\right]^{(2n^2+1)\cdot\frac{6}{n-1}} = e^{\infty} = \infty$$

f) $\sqrt{2}$

4. Calcula:

a) La suma dels cent primers nombres naturals.

b) La suma de les deu primeres potències naturals de 2.

a) Els nombres naturals són una progressió aritmètica de $d = 1$, i per tant $S_{100} = \dfrac{1+100}{2} \cdot 100 = 5\,050$

b) La successió de les potències naturals de 2 és una progressió geomètrica de raó $r = 2$.

La suma de les 10 primers potències naturals de 2 és:

$$S_n = \frac{a_1 - r^n}{1-r} = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10} - 1 = 1\,023.$$

5. Calcula els límits següents:

a) $\lim \left(1+\dfrac{3}{n+5}\right)^n$ **b)** $\lim \left(1-\dfrac{6}{n}\right)^{2n}$

c) $\lim \left(\dfrac{n^3-n^2}{n^3+1}\right)^n$ **d)** $\lim \left(3-\dfrac{2n}{n+1}\right)^{n+1}$

Tots aquests límits són del tipus del nombre e.

a) $$\lim \left(1+\frac{3}{n+5}\right)^n = \lim \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{3}}\right)^{\frac{n+5}{3}}\right]^{n\cdot\frac{3}{n+5}} = e^3$$

b) $$\lim \left(1-\frac{6}{n}\right)^{2n} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{-6}}\right)^{\frac{n}{-6}}\right]^{2n\cdot\frac{-6}{n}} = e^{-12}$$

c) $\lim \left(\dfrac{n^3-n^2}{n^3+1}\right)^n$

Dividim la fracció:

$$\begin{array}{l|l} n^3 - n^2 & n^3+1 \\ \cline{2-2} -n^3 \quad -1 & 1 \\ \hline -n^2-1 & \end{array}$$

$$\lim \left(\frac{n^3-n^2}{n^3+1}\right)^n = \lim \left[\frac{(n^3+1)\cdot 1 + (-n^2-1)}{n^3+1}\right]^n =$$

$$= \lim \left(1+\frac{-n^2-1}{n^3+1}\right)^n =$$

$$= \lim \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+1}{-n^2-1}}\right)^{\frac{n^3+1}{-n^2-1}}\right]^{\frac{n(-n^2-1)}{n^3+1}} = e^{-1}$$

d) $$\lim \left(3-\frac{2n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+2-\frac{2n}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} = e^2$$

6. Les longituds dels costats d'un triangle rectangle expressades en centímetres formen una progressió aritmètica de diferència 3. Calcula el perímetre i l'àrea del triangle.

Els catets mesuren x cm i $(x + 3)$ cm i la hipotenusa mesura $(x + 6)$ cm.

El perímetre és $x + x + 3 + x + 6 = 3x + 9$ cm.

L'àrea és $\dfrac{x\cdot(x+3)}{2} = \dfrac{x^2+3x}{2}$ cm².

Unitat 5

1. Fes una taula de valors i representa gràficament als mateixos eixos de coordenades cadascuna de les funcions següents:

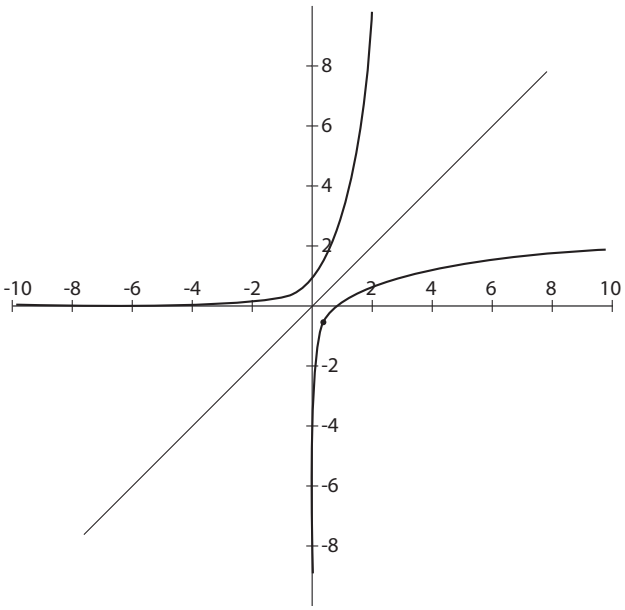
$f(x) = 3^x$

$g(x) = \log_3 x$

Elabora també una llista de les característiques de cada corba i compara-les.

x	$f(x) = 3^x$
–2	1/9
–1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27

x	$g(x) = \log_3 x$
1	0
2	0,631
3	1
9	2



Característiques de $y = 3^x$:

$D_y = \mathbb{R}$, $R_y = \mathbb{R}^+$, contínua, creixent, passa per (0, 1), $\lim_{x\to-\infty} y = 0$

$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$

Característiques de $y = \log_3 x$:

$D_y = \mathbb{R}^+$, $R_y = \mathbb{R}$, contínua, creixent, passa per (1, 0), $\lim_{x\to 0^+} y = -\infty$,

$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$

Les dues funcions són creixents i contínues. A més, són simètriques de respecte la bisectriu del primer quadrant, ja que són inverses una de l'altra.

2. Resol les equacions i el sistema següents:

a) $\log_5 x = -3$

b) $3^{x+1} = 150$

c) $9^x - 3^{x+1} - 54 = 0$

d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

e) $2 \log x = \log(3 - x) + \log 4$

f) $\left.\begin{array}{l}\log x + \log(y+12) = 1\\ 2x - y = 4\end{array}\right\}$

a) $5^{-3} = x \to x = \frac{1}{125}$

b) $x + 1 = \log_3 150 \to x + 1 = \log 150/\log 3 \to x = 3{,}5609$

c) $3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 54 = 0 \to$ canvi $t = 3^x$, $t^2 - 3t - 54 = 0 \to t = 9$, $t = -6$ (no té sentit) $\to x = 2$

d) canvi $t = 2^x$, $t + 2t + 4t + 8t = 480 \to 15t = 480 \to t = 32 \to x = 5$

e) $\log x^2 = \log(12 - 4x) \to x^2 + 4x - 12 = 0 \to x = 2$, $x = -6$ (no té sentit)

f) $y = 2x - 4 \to$ substituint a la primera equació

$\log x + \log(2x + 8) = 1 \to \log(2x^2 + 8x) = \log 10 \to$

$2x^2 + 8x - 10 = 0 \to x = 1$,

$x = -5$ (no té sentit) $\to y = -2$.

3. Si $\log_3 p = 5$ i $\log_3 q = -2$, calcula el resultat de les expressions següents aplicant les propietats dels logaritmes:

a) $\log_3 (p \cdot q)$

b) $\log_3 p^2$

c) $\log_3 (p \cdot q^3)$

d) $\log_3 \frac{p^5}{q}$

a) $\log_3 p + \log_3 q = 5 - 2 = 3$

b) $2 \log_3 p = 10$

c) $\log_3 p + 3 \log_3 q = 5 - 6 = -1$

d) $5 \log_3 p - \log_3 q = 25 + 2 = 27$

4. La datació de restes arqueològiques es pot fer a partir de la quantitat de carboni 14 (^{14}C) que contenen. La quantitat residual de ^{14}C que es troba al fòssil segueix la funció exponencial $q(t) = q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5700}}$, on q_0 és la quantitat inicial de ^{14}C que contenia el fòssil quan era viu i t, el temps en anys. Calcula l'edat d'una mòmia si la quantitat de ^{14}C que presenta és la meitat de la que tenia quan era viva.

$$q(t) = q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5700}} \to \frac{q_0}{2} = q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5700}} \to 2^{-\frac{t}{5700}} = \frac{1}{2} \to -\frac{t}{5700} =$$

$$= \log_2 \frac{1}{2} \to -\frac{t}{5700} = -1 \to t = 5700 \to t = 5700 \text{ anys}$$

5. La taxa de població d'un país és del 2 % anual. Suposant que aquesta taxa no es modifica en els pròxims 10 anys, calcula la població que tindrà el país d'aquí a 8 anys si actualment té 10 milions d'habitants. Quants anys hauran de transcórrer perquè la població actual augmenti 1 milió d'habitants?

Si anomenem h_0 la població actual; r, a la taxa, i t el temps transcorregut, d'aquí a 8 anys, la població del país serà de:

$$h(t) = h_0(1+r)^t = 100\,000\,00(1+0{,}02)^8 \simeq$$
$$\simeq 117\,165\,94 \text{ habitants}$$

Perquè la població augmenti un milió d'habitants, han de transcórrer:

$$h(t) = h_0(1+r)^t = 100\,000\,00(1+0{,}02)^t \simeq$$
$$\simeq 110\,000\,00 \text{ habitants}$$

$$t = \log_{1{,}02}\frac{11}{10} = \frac{\log 1{,}1}{\log 1{,}02} = 4{,}8 \text{ anys}$$

Unitat 6

1. Indica raonadament si són certes o falses les afirmacions següents:

***a*) Un capital col·locat al 5 % d'interès simple anual triga 20 anys a duplicar-se.**

***b*) A interès compost, un 2 % trimestral és equivalent a un 8 % anual.**

***c*) Els interessos disminueixen a mesura que augmenta la freqüència de capitalització.**

***d*) La TAE és superior a la taxa nominal.**

a) Cert, perquè el capital es dupliqui cal que $I = C_0$.

$I = C_0$ i $t = C_0 \cdot 0{,}05 \cdot 20 = C_0$

b) Fals.

$i = (1 + i_f)^f - 1 = 1{,}024 - 1 = 0{,}0824 \rightarrow 8{,}24\,\%$

Un 2 % trimestral equival a un 8,24 % anual.

c) Fals. Els interessos augmenten ja que també augmenta la taxa anual equivalent.

d) Cert. És així perquè la taxa d'interès anual és més gran com més capitalitzacions es produeixen durant l'any.

2. A quina taxa anual d'interès compost s'han d'ingressar 250 € perquè en 6 anys produeixin uns interessos de 59,10 €? I quina serà la taxa anual a interès simple?

$309{,}10 = 250\,(1+i)^6 \rightarrow i = 0{,}036 \rightarrow 3{,}6\,\%$ anual

$59{,}10 = 250 \cdot i \cdot 6 \rightarrow i = 0{,}0394 \rightarrow 3{,}94\,\%$ anual

3. En obrir una llibreta d'estalvis ens ofereixen dues possibilitats: un nominal del 3,6 % convertible bimensualment o una TAE del 3,63 %. Quina de les dues possibilitats ens resulta més avantatjosa?

3,6 % nominal convertible bimensualment correspon a una TAE de:

$$\text{TAE} = \left(1 + \frac{0{,}036}{6}\right)^6 - 1 = 0{,}365 \rightarrow 3{,}65\,\%$$

I per tant és millor que la TAE del 3,63 %.

4. Un estudiant universitari decideix obrir un compte habitatge en un banc i ingressar 2 400 € al principi de cada any durant 5 anys en una llibreta que dóna un interès compost del 4,6 % anual. Passats els 5 anys decideix comprar un pis que val 200 000 € i dóna els diners que havia estalviat d'entrada. Per a la resta li concedeixen una hipoteca al 6 % anual que cal tornar en 20 anys en pagaments mensuals.

***a*) Quin capital tindrà en el compte habitatge passats els 5 anys?**

***b*) Quants diners haurà de tornar al banc al cap dels 20 anys?**

***c*) Si amortitza la hipoteca en pagaments mensuals, quant haurà de pagar cada mes?**

a) $C = 2400 \cdot 1{,}046\,\dfrac{1{,}046^5 - 1}{0{,}046} = 13\,761{,}14$ €

b) Hipoteca = 200 000 − 13 761,14 = 186 238,86 € a pagar en 20 anys amb pagaments mensuals al 6 % anual

$$D = 186\,238{,}86\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12\cdot 20} = 616\,488{,}71 \text{ €}$$

c) Les mensualitats d'amortització seran:

$$616\,488{,}71 = \frac{a\left(\left(1+\dfrac{0{,}06}{12}\right)^{240} - 1\right)}{\dfrac{0{,}06}{12}}$$

$a = 1\,334{,}27$ €

5. Un préstec de 120 000 € al 9 % anual, s'ha de retornar en 8 anys.

***a*) Calcula l'anualitat d'amortització.**

***b*) Quants diners s'hauran retornat al cap dels 8 anys?**

***c*) Elabora'n el quadre d'amortització.**

a) Calculem primer el valor de cada anualitat:

$$a = \frac{120\,000 \cdot 0{,}09 \cdot 1{,}09^8}{1{,}09^8 - 1} = 21\,680{,}93$$

b) Hauran retornat $8a = 173\,447{,}44$ €.

c)

Temps	Anualitat	Quota interès	Quota amortització	Capital amortitzat	Capital pendent
0	–	–	–	–	120 000
1	21 680,93	10 800,00	10 800,93	10 880,93	109 119,07
2	21 680,93	9 820,72	11 860,21	22 741,13	97 258,87
3	21 680,93	8 753,30	12 927,63	35 668,76	84 331,24
4	21 680,93	7 589,81	14 091,11	49 759,88	70 240,12
5	21 680,93	6 321,61	15 359,31	65 119,19	54 880,81
6	21 680,93	4 939,27	16 741,65	81 860,84	38 139,16
7	21 680,93	3 432,52	18 248,40	100 109,24	19 890,76
8	21 680,93	1 790,17	19 890,76	120 000,00	0,00

Unitat 7

1. Les alçades dels jugadors d'un equip de bàsquet són donades per la taula següent:

Alçades (m)	Nre. de jugadors
[1,70 1,80)	2
[1,80 1,90)	4
[1,90 2,00)	5
[2,00 2,10)	3
[2,10 2,20)	1

Calcula'n:

***a*) La mitjana aritmètica.**

***b*) La mediana i la classe modal.**

***c*) La variància i la desviació típica.**

Mitjana aritmètica	1,93
Mediana	1,99
Classe modal	[1,90, 2,00)
Desviació mitjana	0,090 666 67
Variància	0,012 266 67
Desviació típica	0,110 754 98

2. A partir de la taula de la variable discreta *X*:

x_i	3	4	5	6	7	8
n_i	3	7	10	12	6	2

Calcula'n la mitjana aritmètica, la desviació mitjana, la mediana, la variància i la desviació típica.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} = \frac{217}{40} = 5{,}42$$

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i - \bar{x}| n_i}{n} = \frac{43}{40} = 1{,}08$$

Mediana = 5,5

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x}) n_i}{n} = \frac{65{,}78}{40} = 1{,}64$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1{,}67} = 1{,}28$$

3. Les superfícies en hectàrees de 50 explotacions agrícoles d'una regió són les següents:

16	16	17	16	18	20	11	26	11	13
12	15	12	14	28	17	17	21	15	14
11	12	14	12	17	14	18	17	15	25
13	19	17	18	10	29	27	19	24	21
13	16	17	16	16	10	15	16	15	20

***a*) Construeix les taules de freqüència absoluta i relativa agrupant les dades en classes d'amplitud 3.**

***b*) Calcula els paràmetres de centralització.**

***c*) Calcula els paràmetres de dispersió.**

***d*) Dibuixa l'histograma i el polígon de freqüències acumulades.**

***e*) L'interval $(\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma)$, anomenat *interval de confiança*, conté aproximadament el 98 % de les dades. Calcula l'interval de confiança per a aquesta activitat i verifica si en aquest cas conté el 98 % de les dades.**

Intervals	Marca de classe	Freqüències	
	x_i	f_i	*fr*
[10,13)	11,5	9	0,18
[13,16)	14,5	12	0,24
[16,19)	17,5	16	0,32
[19,22)	20,5	5	0,10
[22,25)	23,5	2	0,04
[25,28)	26,5	3	0,06
[28,31)	29,5	3	0,06
Sumes		50	1

Mitjana aritmètica	17,5
Mediana	1,95
Moda	[16,19)
Rang	21
Desviació mitjana	3,6
Variància	24,48
Desviació típica	4,95
Coeficient de variació	0,28

En l'interval de confiança esmentat hi ha només el 88 % de les dades.

Unitat 8

1. Estudiant les qualificacions de matemàtiques i educació física dels alumnes d'un centre s'ha obtingut un coeficient de correlació entre dues variables igual a –0,02. Com interpretaries aquest resultat?

El signe negatiu indica una posició decreixent dels punts; el valor tan proper a 0 indica molt poca correlació lineal.

2. Explica què és la distribució bidimensional. Posa'n un exemple.

Experiment estadístic en el qual s'observen dos caràcters dels individus de la mostra. Exemple: pes i alçada dels alumnes de la classe.

3. La mitjana dels pesos d'una població és de 65 kg, i la de les altures és de 170 cm. Les desviacions típiques són de 5 kg i 10 cm, respectivament, i la covariància d'ambdues variables és 40. Calcula la recta de regressió dels pesos respecte de les alçades. Què pots preveure que pesarà un individu de 180 cm d'alçada?

$y = 0{,}4x - 3$

Per a un individu de 180 cm d'alçada el pes seria 69.

4. En quatre viatges del trajecte Barcelona-Girona un conductor ha observat les velocitats mitjanes i els consums de gasolina següents:

***X* velocitat (km/h)**	105	117	90	120
***Y* consum (L/100 km)**	6,5	7,5	6	8,2

a) **Calcula les variàncies de les variables *x* i *y*, la covariància i el coeficient de correlació.**

b) **Escriu la recta de regressió de *Y* sobre *X*.**

c) **Quin consum es podria esperar d'un viatge fet a 120 km/h de mitjana?**

a) $\bar{x} = 108$ $\quad \sigma_x = 11{,}811$

$\bar{y} = 7{,}05$ $\quad \sigma_y = 0{,}8559$

$\sigma_{xy} = 9{,}6$

$r = 0{,}9437$

b) $y = 0{,}069x - 0{,}382$

c) A 120 km/h de mitjana s'espera un consum de 7,876 L.

5. En una mostra de 12 individus s'han estudiat dues variables, de les quals sabem que:

$$\bar{x} = 6 \qquad \sigma_x = \sqrt{6} \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 380$$

Sabem també **que l'equació de la recta de regressió que expressa *X* en funció de *Y* és: *x* = 0,89*y* + 1,55.**

Calcula:

a) **La mitjana i la variància de la variable *Y*.**

b) **La covariància i el coeficient de correlació lineal.**

c) **L'equació de la recta de regressió de Y sobre *X*.**

a) $\bar{x} = 6 \rightarrow 6 = 0{,}89y + 1{,}55 \rightarrow 0{,}89y = 4{,}45 \rightarrow \bar{y} = 5$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{12} y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{380}{12} - 5^2 = 31{,}\widehat{6} - 25 = 6{,}\widehat{6}$$

b) $$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = 0{,}89 \rightarrow \frac{\sigma_{xy}}{6{,}\widehat{6}} = 0{,}89 \rightarrow \sigma_{xy} = 0{,}89 \cdot 6{,}\widehat{6} = 5{,}9\widehat{3}$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y} = \frac{5{,}9\widehat{3}}{\sqrt{6}\,\sqrt{6{,}\widehat{6}}} = \frac{5{,}9\widehat{3}}{6{,}3246} = 0{,}9381$$

c) $$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \rightarrow y - 5 = \frac{5{,}9\widehat{3}}{6}(x - 6) \rightarrow y - 5 =$$

$$= 0{,}9\widehat{8}(x - 6) \rightarrow y - 5 = 0{,}9\widehat{8}x - 5{,}9\widehat{3}$$

$$y = 0{,}9\widehat{8}x - 0{,}9\widehat{3}$$

Unitat 9

1. En un congrés a Berlín hi assisteixen 120 persones. Els organitzadors han optat per l'alemany i l'anglès com a llengües vehiculars. A les butlletes d'inscripció, 60 persones van dir que coneixien i parlaven l'alemany i 90, l'anglès. Quina és la probabilitat que dos assistents escollits no s'entenguin?

Denotem *A:* «parla alemany», *B:* «parla anglès».

Observem que $p(A \cap B) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

Volem que dues persones, a l'atzar (i per tant les probabilitats respectives es multipliquen) parlin exclusivament llengües diferents:

$p(\text{no s'entenguin}) = p(A - A \cap B) \cdot p(B - A \cap B)$

(parla alemany però no anglès: $A - A \cap B$; igualment per l'anglès)

$p(\text{no s'entenen}) = [p(A) - p(A \cap B)] \cdot [p(B) - p(A \cap B] =$

$$\left(\frac{90}{120} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{60}{120} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

2. Quina és la probabilitat que en ordenar a l'atzar 7 llibres, amb títols que comencin per lletres diferents quedin ordenats alfabèticament?

Com que els ordenem a l'atzar, els successos «ordenar el primer llibre», «ordenar el segon», ... són independents entre si, i la probabilitat serà:

$p(\text{ordenats}) = p(\text{primer al seu lloc}) \cdot p(\text{segon al seu lloc}) \cdot \ldots \cdot$

$p(\text{setè al seu lloc}) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{7!} = 0{,}000\,198\,41$

3. En una marató hi ha apuntats 125 atletes, dels quals 18 són dels EUA. Quina és la probabilitat que els atletes d'EUA aconsegueixin els tres llocs del podi?

Estem suposant que tots els corredors tenen la mateixa capacitat física per guanyar, i que només és qüestió d'atzar qui guanyi... Per tant, multiplicarem les possibilitats de cada lloc del podi, usant la fórmula de $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}$:

$p(3 \text{ podis}) = p(1\text{r podi}) \cdot p(2\text{n podi}) \cdot p(3\text{r podi}) =$

$= \frac{18}{125} \cdot \frac{17}{124} \cdot \frac{16}{123} = 0{,}002\,568$

4. Si consideres a l'atzar un nombre entre 0 i 999, quina és la probabilitat que la xifra de les desenes sigui més gran que les altres dues?

Si considerem que posem a la xifra de les desenes cada un dels nombres del 0 al 9, mirem quants possibles nombres compleixen la condició, comptarem els casos possibles en cada cas.

Observem que, per a les altres dues xifres, els casos possibles són els de les xifres més petites que la del mig, comptades amb repetició i amb ordre:

per a $n = \{1, 2, \ldots, 9\}$, tindrem n^2 xifres (compta el 0) que compleixen la condició $\rightarrow p(\text{la desena més gran}) =$

$= \frac{1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 9^2}{1\,000} = \frac{285}{1\,000} = 0{,}285$

5. En fer una sola travessa a l'atzar, calcula la probabilitat d'obtenir:

a) **Un catorze.**

b) **Un dotze.**

a) *A:* «obtenir un catorze»

$p(A) = \frac{2}{3^{14}}$

b) *B:* «obtenir un dotze»

$p(B) = \frac{1}{3^{12}}$

6. Els números d'un sorteig van del 0000 al 9 999. N'escollim un a l'atzar.

a) **Quina és la probabilitat que acabi en 0?**

b) **I que comenci per 20?**

c) **Calcula la probabilitat que el número escollit no sigui parell.**

a) *A:* «que acabi en 0»

$p(A) = \frac{1\,000}{10\,000} = \frac{1}{10}$

b) *B:* «que comenci per 20»

$p(B) = \frac{100}{10\,000} = \frac{1}{100}$

c) *C:* «que no sigui parell»

$p(C) = \frac{5\,001}{10\,000}$

7. Un producte està format per tres parts: *A*, *B* i *C*. En el procés de fabricació s'ha comprovat que la probabilitat que surti un defecte a *A* es 0,03; que en surti un a *B*, 0,02 i que el defecte surti a *C*, 0,01. Si sabem que els tres esdeveniments son independents, calcula la probabilitat que un producte escollit a l'atzar no tingui cap dels defectes.

D_A: esdeveniment tenir un defecte en A,
$p(D_A) = 0{,}03$ i $p(\bar{D}_A) = 0{,}97$

D_B: esdeveniment tenir un defecte en B,
$p(D_B) = 0{,}02$ i $p(\bar{D}_B) = 0{,}98$

D_C: esdeveniment tenir un defecte en C,
$p(D_C) = 0{,}01$ i $p(\bar{D}_C) = 0{,}99$

$p(\bar{D}_A \cap \bar{D}_B \cap \bar{D}_C) = 0{,}97 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99 = 0{,}941\,1$

Unitat 10

1. En l'experiment aleatori de llançar quatre monedes, determina la funció de probabilitat de la variable aleatòria *X*: «nombre de cares». Calcula l'esperança i la desviació típica de la variable.

Si definim la variable *X*: «nombre de cares», tindrem una funció que assigna el nombre de cares a cada element de l'espai mostral.

Resultats possibles	Valor variable *X*	Funció de probabilitat
4 cares	4	$p[X = 4] = \frac{1}{16}$
3 cares, 1 creu	3	$p[X = 3] = \frac{4}{16}$
2 cares, 2 creus	2	$p[X = 2] = \frac{6}{16}$
1 cara, 3 creus	1	$p[X = 1] = \frac{4}{16}$
4 creus	0	$p[X = 0] = \frac{1}{16}$

L'esperança és:

$$\mu = \sum_{i=1}^{5} p_i x_i = 4 \cdot \frac{1}{16} + 3\frac{1}{4} + 2\frac{6}{16} + 1\frac{4}{16} + 0\frac{1}{16} = 2$$

La variància és:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{5} p_i x_i^2 - \mu^2 =$$

$$= 4^2 \cdot \frac{1}{16} + 3^2\frac{1}{4} + 2^2\frac{6}{16} + 1^2\frac{4}{16} + 0^2\frac{1}{16} - 2^2 = 1$$

La desviació típica és

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} p_i x_i^2 - \mu^2} = 1$$

2. Quina diferència hi ha entre variable estadística i variable aleatòria? Quines condicions ha de complir una distribució per seguir el model binomial?

Resposta oberta.

3. Tenim una moneda trucada de manera que la probabilitat de treure cara és quatre vegades la de treure creu. Tirem 6 vegades la moneda. Calcula la probabilitat de:

***a*) Treure dues vegades creu.**

***b*) Treure, com a màxim, dues vegades creu.**

a) $p[x = 2] = 0{,}24576$

b) $p[x \leq 2] = 0{,}90112$

4. De 1 000 mesures de talles, se n'ha obtingut una mitjana de 165 cm i una desviació típica de 8 cm. Se suposa que la distribució és normal i es demana:

***a*) Quantes mesures són més petites de 157 cm?**

***b*) Quantes estan entre 167 i 181 cm?**

a) $1\,000 \cdot p[x \leq 157] = 1\,000 \cdot 0{,}1587 \approx 159$

b) $1\,000 \cdot p[160 \leq x \leq 180] = 1\,000 \cdot 0{,}3785 = 378$

5. Si l'alçada mitjana de les persones adultes d'un país determinat és de 167 cm i les alçades es distribueixen normalment amb una desviació típica de 5 cm:

***a*) Quin percentatge de la població adulta d'aquest país té una alçada compresa entre 160 i 180 cm?**

***b*) Calcula quantes persones adultes del país d'una mostra de 500 mesurarien entre 160 i 180 cm.**

***c*) Quina és la probabilitat que una persona escollida a l'atzar tingui una alçada no superior a 175 cm?**

a) $p[160 \leq x \leq 180] =$

$= p[-1{,}4 \leq z \leq 2{,}6] = p[z \leq 2{,}6] - (1 - p[z \leq 1{,}4]) =$

$= 0{,}9953 + 0{,}9192 - 1 = 0{,}9145$

Aproximadament un 91 % de les persones adultes tenen una alçada compresa entre 160 i 180 cm.

b) $91\% \cdot 500 = 455$ persones

c) $p[X \leq 175] = p[Z \leq 1{,}6] = 0{,}9452$

Aproximadament el 95 % de les persones adultes tenen una alçada no superior a 175 cm.

6. La nota de tall per entrar en una facultat ha sigut de 7,732. Se sap que la mitjana de les notes d'accés dels alumnes que han demanat entrar en aquesta facultat és de 7,215 amb una desviació típica de 1,81.

***a*) Quin percentatge d'alumnes ha tingut accés als estudis d'aquesta facultat?**

***b*) Si hi haguessin entrat el 70 % dels alumnes que ho havien demanat, quina hauria sigut la nota de tall?**

a) X: «notes» $\rightarrow N(7{,}215; 1{,}81)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = 0{,}28$$

$p[X \geq 7{,}732] = p[Z \geq 0{,}28] = 1 - p[Z \leq 0{,}28] =$

$= 1 - 0{,}6103 = 0{,}3897 \rightarrow 39\%$

b) $p[X \geq x] = 0{,}7 \rightarrow p[Z \geq z] = 0{,}7 \rightarrow p[Z \leq -z] = 0{,}7 \rightarrow$

$z = -0{,}53$

$x = \sigma z + \mu = 1{,}81 \cdot (-0{,}53) + 7{,}215 = 6{,}2557$