Matemàtica financera

Introducció

A la societat podem distingir, des del punt de vista econòmic, els **oferents de fons**, que són les persones o entitats que disposen de diners per poder-los deixar, i els **demandants de fons**, que són les persones o entitats que necessiten diners.
Les entitats financeres són els intermediaris entre els oferents i els demandants de fons.
Deixar diners a través d'una entitat financera sempre té una compensació econòmica per a aquesta.
Si l'entitat financera deixa diners a un particular, a un comerç o a una empresa, aquestes persones hauran de retornar els diners prestats més una quantitat que representarà el preu que han pagat per aquests diners, en funció de la quantitat que han demanat i el temps que els han tingut.
Aquests diners extres s'anomenen **interès**.
Si el particular, el comerç o l'empresa disposa d'uns diners que no ha de fer servir en un cert període de temps, també els pot prestar a una entitat financera, i ara serà aquesta entitat qui pagarà un interès per haver pogut disposar d'aquests diners.
Com ja deus saber, l'interès que cobra l'entitat financera és superior al que ofereix.
Darrerament han proliferat les entitats financeres per Internet que ofereixen als clients un interès més alt pels seus diners i un preu més baix per als préstecs.

Interès simple i interès compost:

Conceptes inicials:
Ja hem comentat que quan es diposita un capital $\mathbf{C_0}$ en una entitat financera, aquesta abona al client (dipositari) un interès determinat, **I,** que dependrà del tipus de contracte que es faci amb l'entitat financera.

Què factors i condicions intervenen en aquest tipus de contracte a fi de calcular l'interès, **I**?

- Capital inicial $\mathbf{C_0}$, o quantitat dipositada inicialment a l'entitat financera.
- El tipus d'interès **r,** que representa el tant per cent anual que paga l'entitat financera (també s'anomena *rèdit, taxa* o *tant d'interès*, és el tipus d'interès que s'utilitza a la pràctica, però a les fórmules matemàtiques s'utilitza el tant per u, i es representa per **i** (taxa d'interès anual en tant per u).

  La relació que hi ha entre elles és $\mathbf{i = \frac{r}{100}}$.
- **Freqüència de capitalització:** és el nombre de vegades que es cobren els interessos al llarg de l'any. La representarem amb la lletra **f**.
- **Període de capitalització:** és el temps que el banc deixa transcórrer perquè un capital produeixi interessos, és a dir, el temps comprès entre dos pagaments consecutius d'interessos.

La relació que hi ha entre el període de capitalització i la freqüència de capitalització és la següent:

a) Si el període de capitalització és anual, això significa que ha de transcórrer un any per cobrar els interessos. La freqüència de capitalització, és a dir, el nombre de vegades que es cobren els interessos al llarg de l'any és 1, per tant, **f=1.**
b) Si el període de capitalització és semestral, això significa que han de transcórrer sis mesos (mig any) per cobrar els interessos. La freqüència de capitalització, és a dir, el nombre de vegades que es cobren els interessos al llarg de l'any és 2 (un any té 2 semestres), per tant, **f=2.**
c) Si el període de capitalització és quadrimestral, això significa que han de transcórrer quatre mesos per cobrar els interessos. La freqüència de capitalització, és a dir, el nombre de vegades que es cobren els interessos al llarg de l'any és 3 (un any té 3 quadrimestres), per tant, **f=3.**
d) Si el període de capitalització és trimestral, això significa que han de transcórrer tres mesos per cobrar els interessos. La freqüència de_capitalització, és a dir, el nombre de vegades que es cobren els interessos al llarg de l'any és 4 (un any té 4 trimestres), per tant, **f=4.**
e) Si el període de capitalització és mensual, això significa que ha de transcórrer un mes per cobrar els interessos. La freqüència de capitalització, és a dir, el nombre de vegades que es cobren els interessos al llarg de l'any és 12 (un any té 12 mesos), per tant, **f=12.**

➢ Interès simple

L'interès simple es caracteritza pel fet que els interessos no produeixen cap benefici.

Definició: *"Un capital "C_0" està sotmès a un règim d'interès simple al* ***r %*** *(tipus d'interès anual expressat en tant per cent) quan, en finalitzar el període mínim de temps de dipòsit contractat ,els interessos "**I**" són retirats".*

Les fórmules que s'utilitzen per al càlcul d'interessos són :

$I = C_0 \cdot i$, que representa l'interès rebut en finalitzar el primer any.

$I = C_0 \cdot i \cdot t$, que és l'interès total rebut en finalitzar t anys.

La suma del capital inicial i els interessos C_t, ens dóna la quantitat que s'acumula durant els t anys que dura l'operació i s'anomena, capital final.

$$C_t = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot i \cdot t = C_0\,(1 + i\,t)$$

- Interès compost :

Definició: *"Un capital està sotmès a un règim d'interès compost quan, en finalitzar el període mínim del dipòsit, els interessos s'afegeixen al capital per a produir nous interessos".*

La fórmula que ens permet calcular el capital final C_t, havent ingressat un capital C_0 al **r** % ($i = \frac{r}{100}$) d'interès compost anual, al cap de t anys és :

$$C_t = C_0(1 + i)^t$$

Observeu que de la fórmula per calcular l'interès compost, podem aïllar la dada que més ens interessi.
Si volem calcular el capital inicial, la fórmula quedarà de la manera següent:

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

I si el que volem calcular és el tipus d'interès (en tant per u):

$$i = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}} - 1$$

Per últim si el que volem és calcular el temps,

$$t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_o}\right)}{\log(1+i)} = \frac{\log(C_t) - \log(C_0)}{\log(1+i)}$$

També, a partir de la fórmula de l'interès compost, i sense calcular prèviament el capital final, es pot calcular els interessos que produeix una certa quantitat de diners C_o.

Però si els interessos es capitalitzen en períodes inferiors a un any, les fórmules que s'utilitzen per a calcular el capital final són les següents:

- Capitalització semestral: $C_t = C_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2t}$
- Capitalització quadrimestral: $C_t = C_0\left(1+\frac{i}{3}\right)^{3t}$

- Capitalització trimestral: $C_t = C_0\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4t}$
- Capitalització mensual: $C_t = C_0\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12t}$

Equivalències de taxes d'interès

Es diu que dues taxes d'interès són equivalents quan, aplicades al mateix capital inicial durant un període de temps igual, produeixen els mateixos interessos i, en con seqüència, el mateix capital final.

- En el cas de l'interès simple:

  i, taxa d'interès anual

  i_f, taxa d'interès corresponent a un període inferior a un any

  f, freqüència de capitalització

  Tenim

  $i = i_f \cdot f \rightarrow$ **$i_f = i/f$**
- En el cas de l'interès compost:

  $$\mathbf{i = (1+i_f)^f - 1}$$

  $$\mathbf{i_f = \sqrt[f]{1+i} - 1}$$

Observa que:

- Si f = 2, **i_2** correspondrà a un tipus d'interès semestral, és a dir, abonat cada sis mesos.
- Si f = 3, **i_3** correspondrà a un tipus d'interès quadrimestral, és a dir, abonat cada quatre mesos.
- Si f = 4, **i_4** correspondrà a un tipus d'interès trimestral, és a dir, abonat cada tres mesos.
- Si f = 12, **i_{12}** correspondrà a un tipus d'interès mensual, és a dir, abonat cada mes.

Taxa anual equivalent: TAE

Sempre que es capitalitza en períodes inferiors a un any, la taxa anual d'interès real és més gran que la teòrica. En operacions financeres d'aquestes característiques cal diferenciar doncs, la taxa anual teòrica de la real.

La taxa anual teòrica s'anomena **taxa nominal** (**i**) i la real s'anomena **TAE** (taxa anual equivalent). La **TAE**, doncs,representa el tipus d'interès real que s'aplica si els períodes de capitalització són inferiors a l'any.

La fórmula per a calcular la **TAE** és:

$$\mathbf{TAE} = \left(1 + \frac{i}{f}\right)^{f} - 1$$

És molt important, adonar-se, que la **TAE** és independent del capital invertit, donat que a la fórmula no figura el capital C (és independent de C).

CONCEPTE GENERAL D'ANUALITAT

Una anualitat, és una quantitat de diners que s'ingressa periòdicament (generalment cada any, però pots ser més sovint) en una entitat financera amb dues finalitats possibles,

- acumular un capital (*anualitat de capitalització*)
- saldar un deute (*anualitat d'amortització*).

Són exemples d'*anualitats de capitalització* les aportacions a **plans d'estalvi**, **plans de jubilació** i els **comptes habitatge**.

Són exemples d'*anualitats d'amortització* els pagaments de **préstecs** i de **crèdits hipotecaris**.

➢ Anualitats de capitalització

Les anualitats de capitalització, són quantitats de diners iguals, que s'ingressen al començament de cada any en una entitat financera per formar, juntament amb els interessos compostos que van generant, un capital determinat després d'un cert nombre d'anys.

La fórmula que s'utilitza per calcular el capital acumulat desprès de t anys és,

$$C = A(1+i)\frac{\left[(1+i)^{t} - 1\right]}{i}$$

Essent **A***, la anualitat de capitalització* i **i** la taxa d'interès anual.

Si aïllem la **A***,* obtindrem la fórmula per a calcular-la,

$$A = \frac{C \cdot i}{(1+i) \cdot \left[(1+i)^t - 1\right]}$$

Observació important:

Quan la freqüència de capitalització ***f*** és superior a un any, és a dir, les aportacions (ingressos) són més freqüents [aportacions semestrals (**f=2**), trimestrals (**f=4**), bimensuals (**f=6**), mensuals (**f=12**), etc.] la fórmula que s'ha d'utilitzar és:

$$C = A\left(1+\frac{i}{f}\right)\frac{\left[\left(1+\frac{i}{f}\right)^{ft} - 1\right]}{\frac{i}{f}}$$

i →taxa d'interès anual

f →freqüència d'ingrés de les anualitats

t →temps en anys

- Anualitats d'amortització

Les anualitats d'amortització són quantitats que s'abonen al final de cada any a una entitat financera per saldar un deute que s'hi té pendent. Aquestes quantitats, juntament amb els interessos compostos que comporten, no només han de permetre liquidar el deute, sinó també els interessos compostos que l'entitat financera cobra pel préstec.

Per cancel·lar un deute ***D*** en un termini de ***t*** anys a una taxa d'interès anual ***i***, caldrà pagar, en finalitzar cada any, una anualitat ***a***:

$$a = \frac{Di(1+i)^t}{\left[(1+i)^t - 1\right]}$$

En general, el cas més habitual és que els venciments per tornar un préstec no tinguin una periodicitat anual i la taxa d'interès fixada sí que ho sigui.

En aquest cas si ***f*** representa el nombre de pagaments anuals i **t** el temps que dura l'operació en anys i ***i*** la taxa d'interès anual,el valor de cadascú d'aquest pagaments és calcula mitjançant la fórmula:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{D}\dfrac{\mathbf{i}}{\mathbf{f}}\left(\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{i}}{\mathbf{f}}\right)^{\mathbf{ft}}}{\left[\left(\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{i}}{\mathbf{f}}\right)^{\mathbf{ft}}-\mathbf{1}\right]}$$