

Alguns problemes resolts de Matemàtica Financera



Aquest serà el formulari de matemàtica financera que es facilitarà a l'examen

$$C_f = C_0 \cdot (1+i)^t$$

Fórmula interès compost

$$C_f = A \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Per anualitats de capitalització

$$a = \frac{D \cdot i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

Per anualitats d'amortització

TAE

La TAE taxa anual equivalent, permet comparar dos productes financers.

Per entendre la funció de la TAE farem un símil amb la compra de productes en un supermercat.

Observem aquests dos productes i el seu preu:



A
600 g
PVP 1,25 €



B
6 pots de 570 g
PVP 15 €

Quin és més car?. Un preu fa referència a un pot, mentre que el segon preu fa referència a 6 pots. Tampoc no tenen el mateix pes. Com podem comparar el seu preu?

El preu per kg és la dada que pot ajudar a saber quin dels dos és més car. Un altre tema és la qualitat que és mesura amb d'altres paràmetres.

Producte A

$$1\text{kg} \cdot \frac{1.25\text{€}}{0.600\text{kg}} = 2.08\text{€/kg}$$

Producte B

$$1\text{ pot} \cdot \frac{15\text{€}}{6\text{ pots}} = 2.5\text{€/pot}$$

$$1\text{kg} \cdot \frac{2.5\text{€}}{0.570\text{kg}} = 4.38\text{€/kg}$$

Ara ja es poden comparar els preus.

Aquest exemple ens pot servir per entendre el concepte de TAE.

Definició i concepte de TAE

TAE és la forma abreujada de Taxa Anual Equivalent

Es el resultat d'una fórmula matemàtica-financera. La seva finalitat és ajudar al client d'una entitat bancària a comparar l'interès real de diferents ofertes.

Conèixer La TAE d'una operació comercial és fonamental. El Banc d'Espanya obliga a les entitats financeres a facilitar-la als seus clients en qualsevol producte financer.

TAE= Interès que produeix 1€ a 1 any amb capitalització anual o inferior.

Exemple:

Una caixa d'estalvis ofereix un producte financer al 5% nominal, quina és la TAE si la capitalització és:

- a) anual
- b) semestral
- c) mensual
- d) diària

a) Anual

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \text{ €} \\ t &= 1 \text{ any} \\ i &= \frac{5}{100} \end{aligned} \quad C_f = C_0 \cdot (1+i)^t \quad C_f = 1 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^1 = 1.05$$

Resposta: 5 % nominal correspon al 5 % TAE.

b) Semestral

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \text{ €} \\ t &= 2 \text{ semestres} \\ i &= \frac{5}{2 \cdot 100} \end{aligned} \quad C_f = C_0 \cdot (1+i)^t \quad C_f = 1 \cdot \left(1 + \frac{5}{200}\right)^2 = 1.025^2 = 1.050625$$

Resposta: 5 % nominal correspon al 5.062 % TAE.

c) Mensual

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \text{ €} \\ t &= 12 \text{ meses} \\ i &= \frac{5}{12 \cdot 100} \end{aligned} \quad C_f = C_0 \cdot (1+i)^t \quad C_f = 1 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{12} = 1.051161$$

Resposta: 5 % nominal correspon al 5.111 % TAE.

d) Diari

$$C_0 = 1 \text{ €}$$
$$t = 360 \text{ dies}$$
$$i = \frac{5}{360 \cdot 100}$$
$$C_f = C_0 \cdot (1+i)^t \quad C_f = 1 \cdot \left(1 + \frac{5}{36000}\right)^{360} = 1.05126$$

Resposta: 5 % nominal correspon al 5.126 % TAE.

Exercici:

Es vol col·locar 750 000 € en un banc. Hi ha dues ofertes diferents.
Oferta A. Interès nominal del 3 % anual durant 1 any amb capitalització mensual
Oferta B. Interès nominal del 3.2 % anual durant 1 any amb capitalització semestral.
Quina és la millor?

Es pot fer la TAE i així comparar les dues ofertes:

Oferta A

$$C_0 = 1 \text{ €}$$
$$t = 12 \text{ meses}$$
$$i = \frac{3}{12 \cdot 100}$$
$$C_f = C_0 \cdot (1+i)^t \quad C_f = 1 \cdot \left(1 + \frac{3}{1200}\right)^{12} = 1.03041$$

Resposta: TAE 3.04 %

Oferta B

$$C_0 = 1 \text{ €}$$
$$t = 2 \text{ semestres}$$
$$i = \frac{3.2}{2 \cdot 100}$$
$$C_f = C_0 \cdot (1+i)^t \quad C_f = 1 \cdot \left(1 + \frac{3.2}{200}\right)^2 = 1.03225$$

Resposta TAE 3.22% Per tant la millor oferta és la segona.

Si apliquem la TAE al capital de 75000 € obtenim:

$$C_f = C_0 \cdot (1+i)^t$$
$$C_f = 750000 \cdot 1.03041 = 772807.5 \text{ €}$$
$$C_f = 750000 \cdot 1.03225 = 774187.5 \text{ €}$$

Exercici:

Calcula el temps que s'ha d'invertir un capital al 5,4% d'interès compost anual per tal que es dupli en cada una de les condicions següents:
a) la capitalització sigui semestral
b) la capitalització sigui mensual.

a) No s'especifica el capital. Suposarem 1€. Això no modifica el resultat .

$$\begin{aligned}C_0 &= 1 \text{ €} \\C_f &= 2 \text{ €} \\t &= ? \text{ en semestres} \quad C_f = C_0 \cdot (1+i)^t \quad 2 = 1 \cdot 1.027^t \\i &= \frac{5.4}{2 \cdot 100}\end{aligned}$$

Aquesta és una equació exponencial en la que s'ha d'aïllar "t"

$$t = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}1.027} = 26.01$$

Resposta: 26 semestres, o sigui 13 anys

b)

$$\begin{aligned}C_0 &= 1 \text{ €} \\C_f &= 2 \text{ €} \\t &= ? \text{ en mesos} \quad C_f = C_0 \cdot (1+i)^t \quad 2 = 1 \cdot 1.0045^t \\i &= \frac{5.4}{12 \cdot 100}\end{aligned}$$

Aquesta és una equació exponencial en la que s'ha d'aïllar "t"

$$t = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}1.0045} = 154.379$$

Resposta: 154 mesos, o sigui 12 anys i 10 mesos

Exercici:

Una persona ha d'amortitzar un crèdit hipotecari de 54 000 € amb un interès del 9,5% anual i la seva situació econòmica no li permet pagar una quantitat superior a 8 250 € cada any.

- a) Quants pagaments haurà de realitzar?
b) Serà complet l'últim d'aquests pagaments?

$$a = \frac{D \cdot i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

Aquesta és la fórmula per anualitats d'amortització.

$$a = \text{anualitat} = 8250 \text{ €} \quad i = \frac{9.5}{100} = 0.095 \quad D = \text{deute} = 54\,000 \text{ €}$$

Substituïm a la fórmula i queda:

$$8250 = \frac{54000 \cdot 0.095 \cdot (1.095)^t}{(1.095)^t - 1}$$

És una equació exponencial que resoldrem fent el canvi de variable: $z = (1.095)^t$

$$8250 = \frac{54000 \cdot 0.095 \cdot z}{z - 1}$$

$$8250 \cdot (z - 1) = 54000 \cdot 0.095 \cdot z$$

$$8250 \cdot z - 8250 = 5130 \cdot z$$

$$3120 \cdot z = 8250$$

$$z = 2.644$$

Ara cal desfer el canvi de variable : $z = (1.095)^t$

$$2.644 = (1.095)^t$$

$$t = \frac{\ln 2.644}{\ln 1.095} = 10.71 \text{ pagaments}$$

Resposta :

- a) 11 pagaments.
b) L'últim pagament no serà complet, donat que el resultat no arriba a 11.

Exercici:

En Ramon va néixer l'1 de gener de 1999. Els seus pares li van obrir una llibreta d'estalvi amb 250 € i van decidir ingressar-hi aquesta mateixa quantitat al principi de cada any, fins que fos major d'edat. De quin capital podrà disposar en Ramon quan compleixi 18 anys, si l'operació es va pactar al 6% anual?

$$C_f = A \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad \text{Aquesta és la fórmula per anualitats de capitalització.}$$

$$A = 250 \text{ €}$$

$$i = 0.06$$

$$t = 18 \text{ anys}$$

$$C_f = 250 \cdot (1.06) \cdot \frac{(1.06)^{18} - 1}{0.06}$$

$$C_f = 8190 \text{ €}$$

Resposta : Disposarà de 8190 €