EXERCICIS RESOLTS - DISTRIBUCIÓ BINOMIAL

Exemple 1

Calculeu la probabilitat d'obtenir dues cares en llançar deu vegades una moneda.

Resolució:

Primer de tot, ens adonem que es tracta d'un experiment aleatori (llançar una moneda) i que verifica les propietats següents:

- L'experiment el repetim **n**=10 vegades
- Les observacions són independents, és a dir,el resultat de cada repetició no depèn dels resultats anteriors.
- Solament hi ha dos resultats possibles, sortir cara (*èxit*) i sortir creu (*fracàs*).
- La probabilitat de l'*èxit* (sortir cara) val **p**=1/2 i és la mateixa en totes les realitzacions del experiment. També la probabilitat del *fracàs* (sortir creu) i val **q**=1/2

Per tant la variable aleatòria ***X***, que compta el número de cares en llançar 10 vegades una moneda, segueix *un model de distribució binomial* de paràmetres **n**=10 i **p**=1/2.Això es simbolitza, X **: B(10,1/2).**

Per tant, estem en condicions d'aplicar la fórmula que ens dona la probabilitat d'obtenir k èxits desprès de la realització de n proves :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

Si substituïm les nostres dades, n =10 , k =2, p =1/2=0,5 i q =1/2=0,5 obtenim:

$$P(X=2)=\binom{10}{2}0,5^2\cdot 0,5^{10-2}=\frac{10\cdot 9}{2}\cdot 0,5^2\cdot 0,5^8=0,04394$$

És a dir, *la probabilitat d'obtenir dues cares en llançar deu vegades una moneda* és **0,04394**.

Exemple 2

Calculeu la probabilitat d'obtenir almenys dues cares en llançar deu vegades una moneda.

Resolució:

Les condicions d'aquest problema són idèntiques a l'anterior, per tant també es tracta d'una distribució binomial B**(10,1/2).**

Però, ara, ens demanen la probabilitat d'obtenir almenys dues cares en llançar deu vegades una moneda.
Obtenir almenys dues cares, significa obtenir dues cares , o tres, o quatre, o cinc, o sis, o set, o vuit, o nou, o deu.

I, el càlcul d'aquesta probabilitat es simbolitza de la següent manera:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \ldots + P(X = 9) + P(X = 10)$$

Evidentment, aquest càlcul és molt feixuc. Però és pot simplificar molt, si tenim en compta la següent propietat que verifica la funció de probabilitat:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots P(X = n-1) + P(X = n) = 1$$

Ara, a partir d'aquesta fórmula, aïllarem el que ens interessa:

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots P(X = 9) + P(X = 10) = 1$$
$$P(X = 2) + \ldots P(X = 9) + P(X = 10) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$P(X = 2) + \ldots P(X = 9) + P(X = 10) = 1 - \binom{10}{0} 0,5^{0} \cdot 0,5^{10} - \binom{10}{1} 0,5^{1} \cdot 0,5^{9}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 1 \cdot 0,5^{10} - 10 \cdot 0,5 \cdot 0,5^{9} = 0,9892$$

Per tant, la probabilitat d'obtenir almenys dues cares en llançar deu vegades una moneda és **0,9892**.

Exemple 3

El 3% dels articles produïts en una fàbrica és defectuós .En una mostra de 20 articles, calculeu la probabilitat que hi hagi exactament dos que siguin defectuosos.

Resolució:

Primer de tot, ens fixem que es tracta d'una situació d'èxit (ser defectuós) o fracàs (no ser defectuós), en la que la probabilitat d'èxit val **p=3/100=0,03** i la probabilitat del fracàs és **q= 1-0,03=0,97**

L'experiment (observar si un article és defectuós)es repeteix 20 vegades, i el resultat de cada observació no depèn de l'anterior. Solament comptem el nombre d'articles defectuosos.

En aquest cas, la nostra variable aleatòria X segueix una distribució binomial de paràmetres n=20 i p=0,03, X **: B(20,0,03)**

Per tant, podem aplicar la fórmula:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

Això ens donarà la probabilitat que hi hagi exactament dos articles que siguin defectuosos:

$$P(X=2)=\binom{20}{2}0,03^2\cdot 0,972^{20-2}=\frac{20\cdot 19}{2}0,03^2\cdot 0,97^{18}=0,0988$$

Exemple 4

Ara, continuant amb l'exemple anterior, ens preguntem, *quina serà la probabilitat que hi hagi menys de dos articles que siguin defectuosos?*

Evidentment es tracta de la mateixa binomial, amb els mateixos paràmetres però canvia la pregunta.
Ara, el que ens demanen que calculem, es simbolitza per: $P(X<2)$. I significa que quan repetim l'observació 20 vegades, hi hagi un article defectuós, o no n'hi hagi cap.
Per tant,
$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$

$$P(X\leq 2)=\binom{20}{0}0,03^0\cdot 0,97^{20}+\binom{20}{1}0,03^1\cdot 0,97^{19}=0,8801$$

Exemple 5

El 20% de bombetes d'un model determinat són defectuoses. En una mostra de 5 bombetes, calculeu la probabilitat que exactament 2 bombetes siguin defectuoses.

Solució: L'experiment aleatori que consisteix a seleccionar una bombeta només hi pot haver dos resultats: que sigui defectuosa (amb una probabilitat p= 0,2) o que no ho sigui (amb una probabilitat q= 0,8).
L'experiment es pot repetir tantes vegades com es vulgui i el resultat d'una extracció no està condicionat pels de les anteriors.
Podem aplicar, doncs, la llei de la distribució binomial:

$$P(X=2)=\binom{5}{2}0,2^2\cdot 0,8^3=\frac{5\cdot 4}{2}0,04\cdot 0,512=0,2048$$