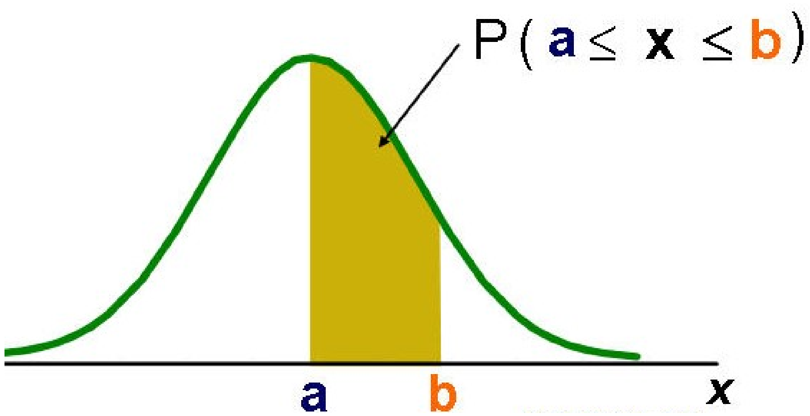
Alguns problemes resolts sobre distribució normal

Bitllet de 10 marcs alemanys on apareix Gauss i la distribució Normal de Gauss

Aquí teniu un recull d'exercicis sobre **distribucions normals**. La normal és una de les distribucions contínuas més importants, ja que s'ajusta a molts fenòmens naturals i socials. També anomenada corba normal o **campana de Gauss**, té aquesta representació gràfica:



El suport teòric sobre el que es basa els raonaments apareguts en aquest dossier, el trobareu a tots llibres de text de Matemàtiques 1r de batxillerat.

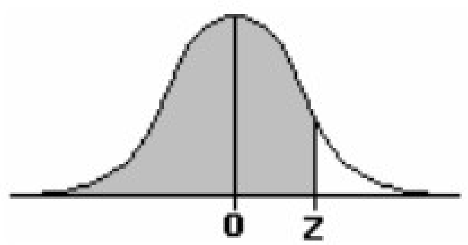
El mètode emprat en la resolució dels exercicis requereix l'utilització de la taula de la Normal de Gauss N(0,1) que teniu disponible al final d'aquest document.

A l'inici de cada exercici cal "tipificar" la variable, transformar-la en una N(0,1), per poder consultar la taula:

$$Z = \frac{X - \bar{x}}{\sigma} \quad on \quad Z = N(0,1)$$

La taula permet calcular probabilitats del tipus:

P(Z ≤ z)= àrea de la regió sota la corba entre (-∞, z) = cua esquerra.

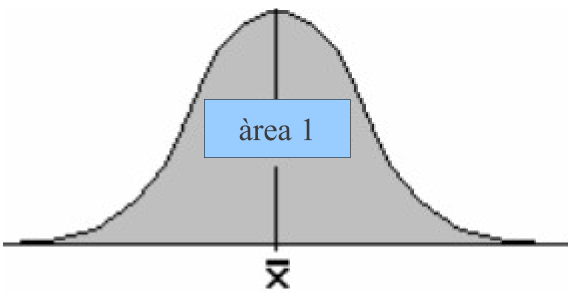


En ocasions cal trobar altres probabilitats que no són directes, com ara:

P(Z ≥ a) ; P(Z ≥ -a) ; P(Z ≤ -a).

Serà necessari aplicar propietats de la Normal com la simetria:

P(Z ≥ a) = P(Z ≤ -a) i el fet que l'àrea total entre (-∞ , ∞) és 1.



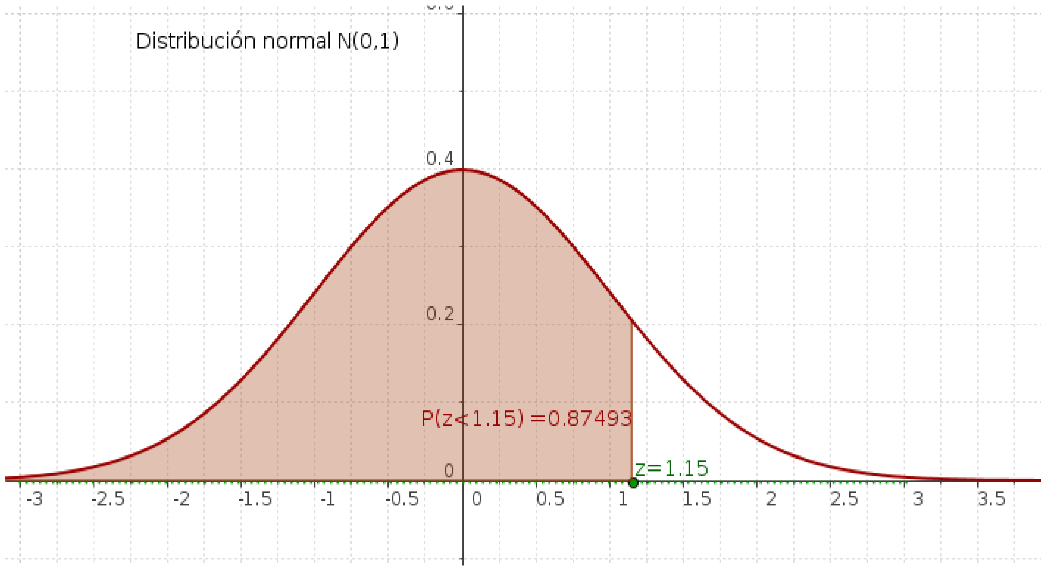
Com s'utiliza la taula?

La majoria de situacions que es plantejen en els problemes es poden resumir en les que explicarem a continuació i que hem marcat amb (●).

Partirem de Z=N(0,1), si no és així, caldrà primer tipificar la variable.

Estudiarem 4 casos concrets.

- **P(Z < 1.15)= 0.8749**



Gràficament P(Z < 1.15)= àrea de la part ombrejada= "cua" de l'esquerra de z= 1.15

Aquesta àrea està calculada en la taula. Només cal saber trobar-la.

En la columna (z) es busca z=1.15. No hi és. Prenem dons, el més proper que és 1.1.

La probabilitat buscada és el valor comú entre la fila de l' **1.1** i la columna de **0.05**.

Per il·lustrar aquest procediment us mostrem un extracte de la taula:

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749

- **P(Z > 1.15)** = 1 - P(Z < 1.15) = 1- 0.8749 = 0.1251

  P(Z > 1.15) = correspon a l'àrea sota la corba i cap a la dreta del valor 1.15= àrea de la cua de la dreta.

  Per calcular aquesta probabilitat cal observar que aquesta taula no dóna les cues de la dreta. Cal buscar en la taula el valor corresponent a 1.15, però aquest valor correson a la probabilitat contrària i finalment restar d'1.
- **P(Z < -1.15)** = P(Z > 1.15) = 0.1251 per simetria
- **P(Z > -1.15)** = P(Z < 1.15) = 0.8749

De la mateixa forma es procedeix en els altres casos.

Dos exemples un xic diferents.

- **P(Z<a)=90%** Quant val "a"?

  P(Z<a)=0.9.

  Busquem el nombre més proper a 0.9 dins de la taula, en la part corresponent a les probabilitats (no en la columna de "z").

  En el següent extracte de la taula observem que el nombre més proper a 0.9 és el del requadre:

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

  Correspon al valor de z= 1.28, per tant

  P(Z<1.28)=0.8997 = 89.97%

  El valor "a"= 1.28

- **P(Z>a)=40%** Quant val "a"?

  Per tant la probabilitat complementària P(Z<a)=60%

Per tant: P(Z<a)=0.6

Busquem el nombre més proper a 0.6 dins de la taula, en la part corresponent a les probabilitats (no en la columna de "z"). La probabilitat més propera és 0.6026 que correspon al valor de z=0.26.

El valor "a"= 0.26

Resum:

1. Identificar el problema. Adonar-se que es tracta d'un exercici sobre distribucions normals.
2. Identificar la variable X, i reconèixer la mitjana i la desviació estàndard
3. Tipificar la variable $Z=\frac{X-\bar{x}}{\sigma}$ *on* $Z=N(0,1)$
4. Utilitzar la taula de N(0,1)
5. Interpretar el resultat.

Exercici:

Analitzades 240 proves de colesterol en sang, es va observà que es distribueixen segons una normal de mitjana 100 i desviació estàndard 20.

a) Calculeu la probabilitat de que una prova doni inferior a 94.

b) Quina proporció de proves ténen valors entre 105 i 130?.

c) Quàntes proves van ser superiors a 138?.

1. El problema és de distribució normal, ja que l'enunciat diu "...es distribueix normalment..."

2. La variable X és N(100,20)

3. Tipificar la variable $Z=\frac{X-\bar{x}}{\sigma}$ *on* $Z=N(0,1)$ $Z=\frac{X-100}{20}$

4. Utilització de la taula:

a) $P(X<94)=P(Z<\frac{94-100}{20})=P(Z<-0.3)=1-P(Z<0.3)=61.79\%$

b) $P(105<X<130)=P(X<130)-P(X<105)$ =

$= \; P(Z < \frac{130-100}{20}) - P(Z < \frac{105-100}{20}) \; =$

$= \; P(Z < 1.5) - P(Z < 0.25) = 0.9332 - 0.5987 = 0.3345 = 33.45\,\%$

c) $P(X > 138) = 1 - P(X < 138) = 1 - P(Z < \frac{138-100}{20}) \; =$

$= \; 1 - P(Z < 1.9) = 1 - 0.9713 = 0.0287 = 2.87\,\%$

5. Interpretar el resultat.

Resposta a) P(menor 94) =0.6179
Resposta b) Proporció=33.45%
Resposta c) Quàntes proves=2.87% de 240=7 proves

Exercici:

En una mostra de 1000 persones d'una determinada població, es va obtenir que la mitjana aritmètica va ser de 170 cm amb una desviació estàndard de 10 cm. Si suposem que la talla es distribueix normalment, calcula el nombre de persones que:
a) mesuren menys de 160 cm
b) més de 2 m.

1. El problema és de distribució normal, ja que l'enunciat diu "...la talla es distribueix normalment..."
2. Identificar la variable X, i reconèixer la mitjana i la desviació estàndard.
   X= N(170,10)= Talla
3. Tipificar la variable $Z = \frac{X - \bar{x}}{\sigma}$ *on* $Z = N(0,1)$ $\qquad Z = \frac{X-170}{10}$
4. Utilitzar la taula de N(0,1)

a) $P(X < 160) \; = \; P(\frac{X-\bar{x}}{\sigma} < \frac{160-\bar{x}}{\sigma}) \; = \; P(Z < \frac{160-170}{10}) \; =$

$= \quad P(Z < \frac{-10}{10}) = P(Z < -1) \quad = \quad 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 = 15.87\%$

Com z = -1 no hi és a la taula, cal utilitzar la simetria de la funció

b) $P(X > 200) \quad = \quad P(Z > \frac{200-170}{10}) \quad = \quad P(Z > \frac{30}{10}) \quad =$

$= \quad P(Z > 3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013 = 0.13\%$

5. Interpretar el resultat.

   a) El 15.87% de les persones mesuren menys de 160 cm. Cal calcular el nombre de persones.

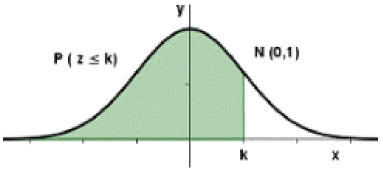
   $$15.87\% \quad de \quad 1000 = \frac{1000 \cdot 15.87}{100} = 159 \quad persones$$

   Resposta: 150 persones mesuren menys de 160 cm

   b) El 0.13 % de les persones mesuren més de 2 m.

   $$0.13\% \quad de \quad 1000 = \frac{1000 \cdot 0.13}{100} = 1 \quad persona$$

Resposta. Aproximadadament 1 persona de 1000 és previsible que mesuri més de 2m



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7652
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8930
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	>0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9561	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9934	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9901	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0.9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999