Unitat 10. Distribució de probabilitat

Activitats

1. Llancem tres monedes. Definim la variable aleatòria *X* com el nombre de creus que surtin.

a) Determina la funció de probabilitat i la funció de distribució de la variable *X*.

b) Representa gràficament la funció de probabilitat i la funció de distribució.

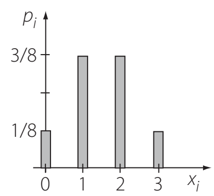
c) Calcula l'esperança matemàtica i la desviació típica.

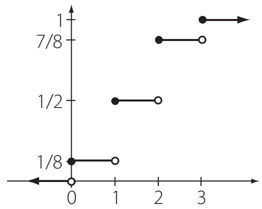
a) $p[X = 0] = \frac{1}{8}$; $p[X = 1] = \frac{3}{8}$;

$p[X = 2] = \frac{3}{8}$; $p[X = 3] = \frac{1}{8}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

b)





c) $\mu = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} =$

$= \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - \mu^2} =$

$= \sqrt{0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{6}{8}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. En l'experiment aleatori de llançar dos daus enlaire definim la variable aleatòria *X* com *X*(*a*, *b*) = màx(*a*, *b*), on (*a*, *b*) són els resultats que mostren els dos daus. Determina la funció de probabilitat i calcula l'esperança matemàtica.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

$\mu = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{5}{36} +$

$+ 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{11}{36} =$

$= \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + \frac{5}{12} + \frac{7}{9} + \frac{5}{4} + \frac{11}{6} = \frac{161}{36} = 4{,}47\hat{2}$

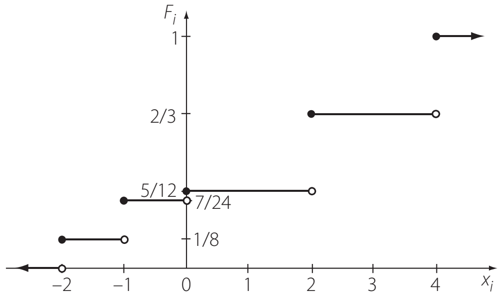
3. La funció de probabilitat d'una variable aleatòria discreta està expressada en aquesta taula:

x_i	−2	−1	0	2	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

a) Determina la funció de distribució i representa-la gràficament.

b) Troba l'esperança, la variància i la desviació típica.

a) $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-2\\ \frac{1}{8} & \text{si } -2\leqslant x<-1\\ \frac{7}{24} & \text{si } -1\leqslant x<0\\ \frac{5}{12} & \text{si } 0\leqslant x<2\\ \frac{2}{3} & \text{s } 2\leqslant x<4\\ 1 & \text{si } x\geqslant 4\end{cases}$$



b) $$\mu=\sum_{i=1}^{5}x_ip_i=-2\cdot\frac{1}{8}-1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{8}+$$

$$+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{17}{12}=1{,}41\hat{6}$$

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{5}x_i^2p_i-\mu^2=(-2)^2\cdot\frac{1}{8}+(-1)^2\cdot\frac{1}{6}+$$

$$+0^2\cdot\frac{1}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{17}{12}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+1+\frac{16}{3}-\frac{289}{144}=\frac{719}{144}=4{,}9930\hat{5}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{719}{144}}=\frac{\sqrt{719}}{12}=2{,}2345$$

4. La variable aleatòria discreta uniforme és aquella que pren valors 1, 2, 3 ... *n*, amb probabilitats:

$$p_i=\frac{1}{n}\qquad\forall i=1,2,3,\dots,n.$$

Calcula la funció de distribució, l'esperança i la desviació típica d'aquesta variable.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ \frac{1}{n} & \text{si } 1\leqslant x<2\\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n-1\leqslant x<n\\ 1 & \text{si } x\geqslant n\end{cases}$$

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=1\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n}+\dots$$

$$\dots+n\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}(1+2+3+\dots+n)=$$

$$=\frac{1}{n}\binom{n+1}{2}=\frac{1}{n}\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n+1}{2}$$

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\mu^2=1^2\cdot\frac{1}{n}+2^2\cdot\frac{1}{n}+$$

$$+3^2\cdot\frac{1}{n}+\dots+n^2\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n}(1+4+9+\dots+n^2)-\frac{(n+1)^2}{4}=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{[n(2n+3)+1]n}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n^2-1}{12}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$$

5. A partir de la variable aleatoria de l'exemple 2:

a) Comprova la segona propietat de la funció de probabilitat de la distribució binomial.

b) Defineix la funció de distribució.

a) $$\sum_{i=1}^{6}p[X=i]=p[X=0]+p[X=1]+p[X=2]+$$

$$+p[X=3]+p[X=4]+p[X=5]+p[X=6]=$$

$$\frac{15\,625}{5^6}=\frac{5^6}{5^6}=1$$

b) $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{4\,096}{15\,625} & \text{si } 0\leqslant x<1\\ \frac{2\,048}{3\,125} & \text{si } 1\leqslant x<2\\ \frac{2\,816}{3\,125} & \text{si } 2\leqslant x<3\\ \frac{3\,072}{3\,125} & \text{si } 3\leqslant x<4\\ \frac{624}{625} & \text{si } 4\leqslant x<5\\ \frac{15\,624}{15\,625} & \text{si } 5\leqslant x<6\\ 1 & \text{si } x\geqslant 6\end{cases}$$

6. Calcula:

a) $p[X=5]$**, en** $B\left(7,\frac{1}{3}\right)$

b) $p[X\leqslant 2]$**, en** $B\left(5,\frac{1}{2}\right)$

c) $p[X > 3]$, **en** $B\left(8, \frac{2}{3}\right)$

d) μ, σ^2 **i** σ, **en** $B\left(10, \frac{3}{5}\right)$

a) $p[X = 5] = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

$= 21 \cdot \frac{1}{3^5} \cdot \frac{4}{3^2} = \frac{21 \cdot 4}{3^7} = \frac{7 \cdot 4}{3^6} = \frac{28}{729}$

b) $p[X \leqslant 2] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] =$

$= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$

$= \frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{10}{2^5} = \frac{16}{2^5} = \frac{2^4}{2^5} = \frac{1}{2}$

c) $p[X > 3] = 1 - p[X \leqslant 3] = 1 - (p[X = 0] +$

$+ p[X = 1] + p[X = 2] + p[X = 3]) =$

$= 1 - \left[\binom{8}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^8 + \binom{8}{1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^7 +\right.$

$\left. + \binom{8}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \binom{8}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^5\right] =$

$= 1 - \left(\frac{1}{3^8} + \frac{16}{3^8} + \frac{112}{3^8} + \frac{448}{3^8}\right) =$

$= 1 - \frac{577}{3^8} = 1 - \frac{577}{6\,561} = \frac{5\,984}{6\,561}$

d) $\mu = np = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$

$\sigma^2 = npq = 10 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{12}{5}} = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$

7. Llancem una moneda enlaire 100 vegades. Estableix la probabilitat d'obtenir:

a) **47 cares.**

b) **35 creus.**

c) **Almenys 2 cares.**

d) **Cap creu.**

X: «nombre de cares» $\rightarrow B\left(100, \frac{1}{2}\right)$

a) $p[X = 47] = \binom{100}{47}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \binom{100}{47} 2^{-100}$

b) $p[X = 65] = \binom{100}{65}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \binom{100}{35} 2^{-100}$

c) $p[X \geqslant 2] = 1 - p[X < 2] =$

$= 1 - (p[X = 0] + p[X = 1]) =$

$= 1 - \left[\binom{100}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \binom{100}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right] =$

$= 1 - (2^{-100} + 100 \cdot 2^{-100}) =$

$= 1 - [2^{-100}(1 + 100)] = 1 - 101 \cdot 2^{-100}$

d) $p[X = 100] = \binom{100}{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 2^{-100}$

8. Una família de Tarragona té cinc fills. Suposant que la probabilitat que un dels fills sigui nen és 0,45, calcula la probabilitat que siguin:

a) **Tres nens i dues nenes.**

b) **Menys nens que nenes.**

c) **Una sola nena.**

d) **Cap nen.**

X: «nombre de nens» $\rightarrow B(5; 0{,}45)$

a) $p[X = 3] = \binom{5}{3} 0{,}45^3 \cdot 0{,}55^2 =$

$= 10 \cdot 0{,}091125 \cdot 0{,}3025 = 0{,}27565$

b) $p[X \leqslant 2] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] =$

$= \binom{5}{0} 0{,}55^5 + \binom{5}{1} 0{,}45 \cdot 0{,}55^4 + \binom{5}{2} 0{,}45^2 \cdot 0{,}55^3 =$

$= 0{,}0503284 + 0{,}205889 + 0{,}3369093 = 0{,}59313$

c) $p[X = 4] = \binom{5}{4} 0{,}45^4 \cdot 0{,}55 =$

$= 5 \cdot 0{,}0410062 \cdot 0{,}55 = 0{,}11277$

d) $p[X = 0] = \binom{5}{0} 0{,}55^5 = 0{,}05033$

9. El 2 % dels articles produïts en una fàbrica són defectuosos. Calcula el nombre esperat i també la desviació tipus d'articles defectuosos en una comanda de 10 000 unitats.

X: «nombre d'articles defectuosos»

$B\left(10\,000, \frac{1}{50}\right)$

$\mu = np = 10\,000 \cdot \frac{1}{50} = \frac{10\,000}{50} = 200$ articles defectuosos

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10\,000 \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{49}{50}} = \sqrt{\frac{10^4 \cdot 7^2}{50^2}} =$

$= \frac{10^2 \cdot 7}{50} = \frac{100 \cdot 7}{50} = 14$ articles defectuosos

10. Determina el nombre esperat de nenes en una família de vuit fills, si suposem igualment probable la distribució de sexes. Quina és la probabilitat que la família tingui el nombre esperat de nenes?

X: «nombre de nenes» $\rightarrow B\left(8, \frac{1}{2}\right)$

$\mu = np = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ nenes

$p[X = 4] = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{70}{2^8} = \frac{35}{2^7} = \frac{35}{128}$

11. Tenim un dau en forma de tetràedre, és a dir, amb quatre cares que són triangles equilàters. Numerem les cares de l'1 al 4 i considerem la variable aleatòria *X*: «nombre d'1» per a *n* = 5.

a) Estudia la distribució binomial corresponent.

b) Defineix les funcions de probabilitat i de distribució.

c) Calcula'n l'esperança i la desviació típica.

a) $p = \frac{1}{4} \to B\left(5, \frac{1}{4}\right)$

b) $p[X = 0] = \binom{5}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{1\,024}$

$p[X = 1] = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3^4}{4^4} = \frac{405}{1\,024}$

$p[X = 2] = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{3^3}{4^3} = \frac{270}{1\,024} = \frac{135}{512}$

$p[X = 3] = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \frac{3^2}{4^2} = \frac{90}{1\,024} = \frac{45}{512}$

$p[X = 4] = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{3}{4} = 5 \cdot \frac{1}{4^4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{1\,024}$

$p[X = 5] = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1\,024}$

$F(0) = p[X \leqslant 0] = p[X = 0] = \frac{243}{1\,024}$

$F(1) = p[X \leqslant 1] = p[X = 0] + p[X = 1] =$

$= \frac{243}{1\,024} + \frac{405}{1\,024} = \frac{648}{1\,024} = \frac{81}{128}$

$F(2) = p[X \leqslant 2] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] =$

$= \frac{81}{128} + \frac{135}{512} = \frac{459}{512}$

$F(3) = p[X \leqslant 3] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] +$

$+ p[X = 3] = \frac{459}{512} + \frac{45}{512} = \frac{504}{512} = \frac{63}{64}$

$F(4) = p[X \leqslant 4] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] +$

$+ p[X = 3] + p[X = 4] = \frac{63}{64} + \frac{15}{1\,024} = \frac{1\,023}{1\,024}$

$F(5) = p[X \leqslant 5] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] +$

$+ p[X = 3] + p[X = 4] + p[X = 5] = \frac{1\,023}{1\,024} + \frac{1}{1\,024} =$

$= \frac{1\,024}{1\,024} = 1$

d'on s'obté la funció de distribució:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{243}{1\,024} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{81}{128} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{459}{512} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ \frac{63}{64} & \text{si } 3 \leqslant x < 4 \\ \frac{1\,023}{1\,024} & \text{si } 4 \leqslant x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 5 \end{cases}$$

c) $\mu = np = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{4} = 0{,}968246$

12. El 3 % de les peces elaborades per una màquina és defectuós. Les peces es venen en caixes de 25 unitats cadascuna. Quina és la probabilitat que una caixa contingui com a màxim una peça defectuosa?

X: «nombre de peces defectuoses»

$B\left(25, \frac{3}{100}\right)$

$p[X \leqslant 1] = p[X = 0] + p[X = 1] =$

$= \binom{25}{0}\left(\frac{97}{100}\right)^{25} + \binom{25}{1}\frac{3}{100}\left(\frac{97}{100}\right)^{24} =$

$= 0{,}4669747 + 0{,}3610629 = 0{,}82804$

13. Una determinada malaltia té un índex de mortalitat del 20 %. Si en un hospital hi ha sis persones afectades, calcula la probabilitat que almenys la meitat dels pacients sobrevisqui.

X: «nombre de persones que sobreviuen» $\to B\left(6, \frac{4}{5}\right)$

$p[X \geqslant 3] = 1 - p[X < 3] =$

$= 1 - (p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2]) =$

$= 1 - \left[\binom{6}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^6 + \binom{6}{1}\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^4\right] =$

$= 1 - (0{,}000064 + 0{,}001536 + 0{,}01536) =$

$= 1 - 0{,}01696 = 0{,}98304$

14. El 55 % dels treballadors d'un ajuntament són dones. Per llei, el 25 % dels alts càrrecs han de ser dones. Si es trien 5 funcionaris a l'atzar, quina és la probabilitat que 3 siguin dones? I si l'eleccció només es fa entre els alts càrrecs?

X: «nombre de dones» $\to B\left(5, \frac{11}{20}\right)$

$$p\,[X = 3] = \binom{5}{3}\left(\frac{11}{20}\right)^3\left(\frac{9}{20}\right)^2 = 10 \cdot \frac{11^3}{20^3} \cdot \frac{9^2}{20^2} =$$

$$= \frac{1\,078\,110}{20^5} = \frac{1\,078\,110}{3\,200\,000} = \frac{107\,811}{320\,000} = 0{,}33691$$

X: «nombre de dones» $\rightarrow B\left(5, \frac{1}{4}\right)$

$$p\,[X = 3] = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \frac{3^2}{4^2} =$$

$$= \frac{90}{4^5} = \frac{90}{1\,024} = \frac{45}{512} = 0{,}08789$$

15. Si X representa una variable aleatòria contínua:

a) Demostra que $f(x)$ és una funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

b) Representa-la gràficament.

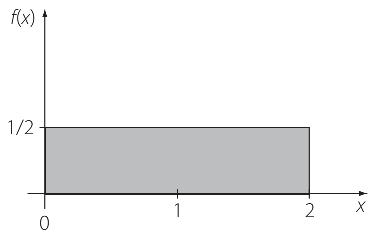
a) 1. Per la mateixa definició de $f(x)$, tenim que $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. L'àrea del recinte que determina la gràfica de $f(x)$ amb l'eix OX és:

$$A = (2 - 0) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\text{u}^2$$

Per 1 i 2 tenim que $f(x)$ és una funció de densitat.

b)



16. Per a la funció de densitat de l'exercici anterior, calcula:

a) $p\,[X \leqslant 1]$ **b)** $p\left[X \geqslant \frac{1}{2}\right]$ **c)** $p\left[\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3}{2}\right]$

a) $p\,[X \leqslant 1] = \frac{1}{2}$

b) $p\left[X \geqslant \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}$

c) $p\left[\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3}{2}\right] = p\left[X \leqslant \frac{3}{2}\right] - p\left[X \leqslant \frac{1}{4}\right] =$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

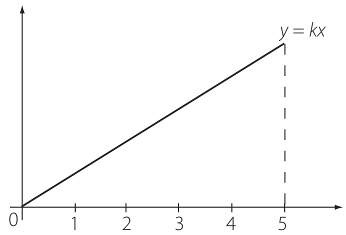
17. En una variable aleatòria contínua X es defineix la funció:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in [0, 5] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 5] \end{cases}$$

a) Calcula el valor de k per tal que la funció $f(x)$ sigui una funció de densitat.

b) Troba $p\,[2 \leqslant X \leqslant 3{,}5]$ per al valor de k calculat en l'apartat anterior.

a)



$$A = \frac{5 \cdot 5k}{2} = \frac{25k}{2}$$

$$\frac{25k}{2} = 1 \rightarrow k = \frac{2}{25}$$

b) $p\,[2 \leqslant X \leqslant 3{,}5] = p\,[X \leqslant 3{,}5] - p\,[X \leqslant 2] =$

$$= \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{25}}{2} - \frac{2 \cdot \frac{4}{25}}{2} = \frac{49}{100} - \frac{4}{25} = \frac{33}{100}$$

18. Contesta raonadament cadascuna d'aquestes qüestions a partir de la taula de la distribució normal reduïda:

a) Per què el primer valor de probabilitat que es troba a la taula és 0,5?

b) Quin és el valor de $p\,[Z \leqslant 4{,}5]$? I el valor de $p\,[Z \leqslant -5]$?

a) Perquè la gràfica de la funció de densitat de la distribució normal $N(0, 1)$ és simètrica respecte del valor $Z = 0$ i sabem que $p\,[Z \leqslant 0] = 0{,}5$.

b) $p\,[Z \leqslant 4{,}5] = 1$, ja que segons la taula: $p\,[Z \leqslant 4] \simeq 1$

$p\,[Z \leqslant -5] = 0$, ja que: $p\,[Z \leqslant -5] = p\,[Z \geqslant 5]$ i

$p\,[Z \geqslant 5] = 1 - p\,[Z \leqslant 5] = 1 - 1 = 0$

19. Si Z és una variable $N(0, 1)$, calcula:

a) $p\,[Z \leqslant -2{,}38]$ **b)** $p\,[Z \leqslant 1{,}64]$

c) $p\,[Z \geqslant -1{,}03]$ **d)** $p\,[Z \geqslant 0{,}82]$

e) $p\,[1{,}5 \leqslant Z \leqslant 3]$ **f)** $p\,[-0{,}79 \leqslant Z \leqslant 0{,}79]$

a) $p\,[Z \leqslant -2{,}38] = p\,[Z \geqslant 2{,}38] = 1 - p\,[Z \leqslant 2{,}38] =$

$= 1 - 0{,}9913 = 0{,}0087$

b) $p\,[Z \leqslant 1{,}64] = 0{,}9495$

c) $p\,[Z \geqslant -1{,}03] = p\,[Z \leqslant 1{,}03] = 0{,}8485$

d) $p\,[Z \geqslant 0{,}82] = 1 - p\,[Z \leqslant 0{,}82] = 1 - 0{,}7939 = 0{,}2061$

e) $p\,[1{,}5 \leqslant Z \leqslant 3] = p\,[Z \leqslant 3] - p\,[Z \leqslant 1{,}5] =$

$= 0{,}99865 - 0{,}9332 = 0{,}06545$

f) $p[-0,79 \leqslant Z \leqslant 0,79] = 2(p[Z \leqslant 0,79] - 0,5) =$

$= 2(0,7852 - 0,5) = 2 \cdot 0,2852 = 0,5704$

20. A partir de la taula, comprova a la distribució $N(0, 1)$ que:

a) A l'interval (–1, 1) es troba el 68,26 % del total de la probabilitat.

b) A l'interval (–2, 2) es troba el 95,44 % del total de la probabilitat.

c) L'interval (–3, 3) inclou el 99,74 % del total de la probabilitat.

a) $p[-1 \leqslant Z \leqslant 1] = 2(p[Z \leqslant 1] - 0,5) =$

$= 2(0,8413 - 0,5) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$

$p[-1 \leqslant Z \leqslant 1] = 0,6826 \rightarrow 68,26\,\%$

b) $p[-2 \leqslant Z \leqslant 2] = 2(p[Z \leqslant 2] - 0,5) =$

$= 2(0,9772 - 0,5) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$

$p[-2 \leqslant Z \leqslant 2] = 0,9544 \rightarrow 95,44\,\%$

c) $p[-3 \leqslant Z \leqslant 3] = 2(p[Z \leqslant 3] - 0,5) =$

$= 2(0,9987 - 0,5) = 2 \cdot 0,4987 = 0,9974$

$p[-3 \leqslant Z \leqslant 3] = 0,9974 \rightarrow 99,74\,\%$

21. Considerem X una variable $N(8, 3)$. Calcula:

a) $p[X \leqslant 9]$ **b) $p[X \geqslant 7]$**

c) $p[6 \leqslant X \leqslant 7,5]$ **d) $p[7,2 \leqslant X \leqslant 8,7]$**

a) $p[X \leqslant 9] = p[Z \leqslant 0,33] = 0,6293$

b) $p[X \geqslant 7] = p[Z \geqslant -0,33] = p[Z \leqslant 0,33] = 0,6293$

c) $p[6 \leqslant X \leqslant 7,5] = p[-0,67 \leqslant Z \leqslant -0,17] =$

$= p[0,17 \leqslant Z \leqslant 0,67] = p[Z \leqslant 0,67] - p[Z \leqslant 0,17] =$

$= 0,7486 - 0,5675 = 0,1811$

d) $p[7,2 \leqslant X \leqslant 8,7] = p[-0,27 \leqslant Z \leqslant 0,23] =$

$= p[Z \leqslant 0,23] - p[Z \leqslant -0,27] =$

$= p[Z \leqslant 0,23] - (1 - p[Z \leqslant 0,27]) =$

$= 0,5910 - 1 + 0,6064 = 0,1974$

22. Tenint en compte que l'àrea que es dóna fa referència a una distribució normal $N(0, 1)$, determina el valor o els valors de la variable Z en cadascun dels casos següents:

a) L'àrea entre 0 i z és 0,3770.

b) L'àrea a l'esquerra de z és 0,8621.

c) L'àrea entre –1,5 i z és 0,0217.

a) $p[0 \leqslant Z \leqslant z] = 0,3770 \rightarrow p[Z \leqslant z] = 0,8770 \rightarrow$

$\rightarrow z = 1,16$

b) $p[Z \leqslant z] = 0,8621 \rightarrow z = 1,09$

c) $p[-1,5 \leqslant Z \leqslant z] = 0,0217 \rightarrow$

$\rightarrow p[Z \leqslant z] - p[Z \leqslant -1,5] = 0,0217$

$p[Z \leqslant -1,5] = p[Z \geqslant 1,5] = 1 - p[Z \leqslant 1,5] =$

$= 1 - 0,9332 = 0,0668$

$p[Z \leqslant z] - 0,0668 = 0,0217 \rightarrow$

$\rightarrow p[Z \leqslant z] = 0,0885 \rightarrow p[Z \geqslant -z] = 0,0885$

$p[Z \leqslant -z] = 1 - 0,0885 = 0,9115 \rightarrow$

$\rightarrow -z = 1,35 \rightarrow z = -1,35$

23. En una població s'estableixen dos grups A i B. Els quocients intel·lectuals d'ambdós grups es distribueixen segons $N(100, 30)$ i $N(120, 35)$, respectivament. S'escull un individu de cada grup de manera aleatòria i independent. Calcula:

a) La probabilitat que l'individu del grup A tingui un quocient intel·lectual superior a 90.

b) La probabilitat que l'individu del grup B tingui un quocient intel·lectual superior a 90.

c) La probabilitat que ambdós tinguin un quocient intel·lectual superior a 90.

X: «quocient intel·lectual del grup A»; B: «quocient intel·lectual del grup B»

a) $p[X \geqslant 90] = p[Z \geqslant -0,33] = p[Z \leqslant 0,33] = 0,6293$

b) $p[Y \geqslant 90] = p[Z \geqslant -0,86] = p[Z \leqslant 0,86] = 0,8051$

c) $p[X \geqslant 90] \cdot p[Y \geqslant 90] = 0,6293 \cdot 0,8051 = 0,50665$

24. Suposem que el pes dels atletes de marató segueix una distribució normal $N(62, 3,4)$.

a) Calcula la probabilitat que un atleta pesi més de 65 kg.

b) El 70 % dels atletes no supera un determinat pes. Quin és aquest pes?

X: «pes en kg»

a) $p[X \geqslant 65] = p[Z \geqslant 0,88] = 1 - p[Z \leqslant 0,88] =$

$= 1 - 0,8106 = 0,1894$

b) $p[X \leqslant x] = 0,7$

$p[Z \leqslant z] = 0,7 \rightarrow z = 0,52 \rightarrow x = \sigma z + \mu =$

$= 3,4 \cdot 0,52 + 62 = 63,768$ kg

25. Calcula la probabilitat d'obtenir entre 4 i 7 creus, ambdues incloses, en fer 12 llançaments d'una moneda utilitzant:

a) La distribució binomial.

b) L'aproximació normal de la distribució binomial.

X: «nombre de creus»

a) $B\left(12, \frac{1}{2}\right)$

$p[4 \leqslant X \leqslant 7] = p[X = 4] + p[X = 5] +$

$+ p[X = 6] + p[X = 7] =$

$= \binom{12}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{12}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{12}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{12}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} =$

$= \frac{1}{2^{12}}\left[\binom{12}{4} + \binom{12}{5} + \binom{12}{6} + \binom{12}{7}\right] =$

$= \frac{1}{2^{12}}(495 + 792 + 924 + 792) = \frac{3\,003}{2^{12}} =$

$= \frac{3\,003}{4\,096} = 0{,}73315$

b) $B\left(12, \frac{1}{2}\right)$; $\mu = np = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$;

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3} = 1{,}732$

$N(6;\ 1{,}732)$

$p[3{,}5 \leqslant X \leqslant 7{,}5] = p[-1{,}44 \leqslant Z \leqslant 0{,}87] =$

$= p[Z \leqslant 0{,}87] - p[Z \leqslant -1{,}44] =$

$= p[Z \leqslant 0{,}87] - p[Z \geqslant 1{,}44] =$

$= p[Z \leqslant 0{,}87] - (1 - p[Z \leqslant 1{,}44]) =$

$= 0{,}8078 - (1 - 0{,}9251) = 0{,}8078 - 0{,}0749 = 07329$

26. Es llança un dau 180 vegades. Troba la probabilitat d'obtenir el número 6 entre 29 i 32 vegades (ambdues incloses).

$B\left(180, \frac{1}{6}\right)$; X: «nombre de 6»

$\mu = np = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{25} = 5$

$N(30,\ 5)$

$p[28{,}5 \leqslant X \leqslant 32{,}5] = p[-0{,}3 \leqslant Z \leqslant 0{,}5] =$

$= p[Z \leqslant 0{,}5] - p[Z \leqslant -0{,}3] =$

$= p[Z \leqslant 0{,}5] - p[Z \geqslant 0{,}3] =$

$= p[Z \leqslant 0{,}5] - (1 - p[Z \leqslant 0{,}3]) =$

$= 0{,}6915 - (1 - 0{,}6179) = 0{,}6915 - 0{,}3821 = 0{,}3094$

27. Tirem enlaire 500 vegades una moneda que ha estat trucada, de manera que la probabilitat d'obtenir creu és $\frac{2}{5}$. Calcula la probabilitat que el nombre de cares no difereixi de 300:

a) En més de 10 tirades.

b) En més de 20 tirades.

X: «nombre de cares» $\rightarrow B\left(500, \frac{3}{5}\right)$

$\mu = np = 500 \cdot \frac{3}{5} = 300$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{120} = 10{,}95$

$N(300;\ 10{,}95)$

a) $p[289{,}5 \leqslant X \leqslant 310{,}5] = p[-0{,}96 \leqslant Z \leqslant 0{,}96] =$

$= 2(p[Z \leqslant 0{,}96] - 0{,}5) =$

$= 2(0{,}8315 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}3315 = 0{,}663$

b) $p[279{,}5 \leqslant X \leqslant 320{,}5] = p[-1{,}87 \leqslant Z \leqslant 1{,}87] =$

$= 2(p[Z \leqslant 1{,}87] - 0{,}5) =$

$= 2(0{,}9693 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}4693 = 0{,}9386$

28. Quan llancem 120 vegades un dau normal, quina és la probabilitat que la cara 4 surti exactament 24 vegades? I que surti 14 vegades com a màxim?

X: «nombre de 4» $\rightarrow B\left(120, \frac{1}{6}\right)$

$\mu = np = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{600}{36}} = \frac{5}{3}\sqrt{6} = 4{,}08$

$N(20;\ 4{,}08)$

$p[23{,}5 \leqslant X \leqslant 24{,}5] = p[0{,}86 \leqslant Z \leqslant 1{,}1] =$

$= p[Z \leqslant 1{,}1] - p[Z \leqslant 0{,}86] = 0{,}8643 - 0{,}8051 = 0{,}0592$

$p[X \leqslant 14{,}5] = p[Z \leqslant -1{,}35] = p[Z \geqslant 1{,}35] =$

$= 1 - p[Z \leqslant 1{,}35] = 1 - 0{,}9115 = 0{,}0885$

29. Troba la probabilitat d'obtenir més de 36 vegades el número 6 en 50 tirades d'un parell de daus no trucats.

X: «nombre de 6» $\rightarrow B\left(50, \frac{11}{36}\right)$

$\mu = np = 50 \cdot \frac{11}{36} = 15{,}2\widehat{7}$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot \frac{11}{36} \cdot \frac{25}{36}} = 3{,}26$

$N(15{,}2\widehat{7};\ 3{,}26)$

$p[X \geqslant 35{,}5] = p[Z \geqslant 6{,}2] \simeq 0$

30. Es llança 2 500 vegades el dau de l'activitat 11. Calcula la probabilitat d'obtenir el número 3:

a) 400 vegades.

b) La meitat de les vegades que es llança.

c) Més de 1000 vegades.

X: «nombre de 3» $\rightarrow B\left(2\,500, \frac{1}{4}\right)$

$\mu = np = 2\,500 \cdot \frac{1}{4} = 625$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2\,500 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = 21{,}65$

$N(625; 21{,}65)$

a) $p[399{,}5 \leqslant X \leqslant 400{,}5] = p[-10{,}42 \leqslant Z \leqslant -10{,}37] =$

$= p[10{,}37 \leqslant Z \leqslant 10{,}42] =$

$= p[Z \leqslant 10{,}42] - p[Z \leqslant 10{,}37] \simeq 0$

b) $p[1\,249{,}5 \leqslant X \leqslant 1\,250{,}5] = p[28{,}84 \leqslant Z \leqslant 28{,}89] =$

$= p[Z \leqslant 28{,}89] - p[Z \leqslant 28{,}84] \simeq 0$

c) $p[X \geqslant 999{,}5] = p[Z \geqslant 17{,}3] \simeq 0$

31. Calcula $p[X = 8]$ per a una variable que segueix una distribució binomial $B\left(40, \frac{1}{5}\right)$.

Compara-ho amb el resultat que s'obté fent ús de l'aproximació normal. És bona aquesta aproximació? Per què?

$p[X = 8] = \binom{40}{8} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{32} = 0{,}15598$

$B\left(40, \frac{1}{5}\right)$

$\mu = np = 40 \cdot \frac{1}{5} = 8$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = 2{,}53$

$N(8; 2{,}53)$

$p[7{,}5 \leqslant X \leqslant 8{,}5] = p[-0{,}2 \leqslant Z \leqslant 0{,}2] =$

$= 2(p[Z \leqslant 0{,}2] - 0{,}5) = 2(0{,}5793 - 0{,}5) =$

$= 2 \cdot 0{,}0793 = 0{,}1586$

Tot i que $n > 30$, no és molt bona aproximació perquè $p = 0{,}2$ no és un valor proper a 0,5.

32. La probabilitat que un vaporitzador d'insecticida mati un mosquit és 0,75. Si dirigim el vaporitzador contra 100 mosquits, quina és la probabilitat de matar-ne almenys 75? I de matar-ne menys de 50?

$B(100; 0{,}75)$; X: «nombre de mosquits morts»

$\mu = np = 100 \cdot 0{,}75 = 75$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33$

$N(75; 4{,}33)$

$p[X \geqslant 74{,}5] = p[Z \geqslant -0{,}12] = p[Z \leqslant 0{,}12] = 0{,}5478$

$p[X \leqslant 50{,}5] = p[Z \leqslant -5{,}66] = 0$

Activitats finals

1. Troba la probabilitat d'obtenir:

a) Dos èxits mitjançant la distribució $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$.

b) Més de tres èxits mitjançant la distribució $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$.

c) Menys de dos fracassos mitjançant la distribució $B\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

a) $p[X = 2] = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

$= 6 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2^2}{3^2} = \frac{24}{3^4} = \frac{8}{3^3} = \frac{8}{27}$

b) $p[X > 3] = p[X = 4] + p[X = 5] + p[X = 6] =$

$= \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6 =$

$= \frac{1}{2^6}(15 + 6 + 1) = \frac{22}{2^6} = \frac{11}{2^5} = \frac{11}{32}$

c) $p[X > 2] = p[X = 3] + p[X = 4] =$

$= \binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{3}{4} + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4^4} =$

$= \frac{12}{4^4} + \frac{1}{4^4} = \frac{13}{4^4} = \frac{13}{256}$

2. Un equip A té una probabilitat $p = \frac{2}{3}$ de guanyar un partit. Si l'equip juga 6 partits, calcula la probabilitat que:

a) Guanyi dos partits.

b) Perdi més de la meitat dels partits.

X: «nombre de partits guanyats» $\rightarrow B\left(6, \frac{2}{3}\right)$

a) $p[X = 2] = \binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 =$

$= 15 \cdot \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{60}{3^6} = \frac{20}{3^5} = \frac{20}{243}$

b) $p[X < 3] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] =$

$= \binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \binom{6}{1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 =$

$= \frac{1}{3^6} + \frac{12}{3^6} + \frac{60}{3^6} = \frac{73}{3^6} = \frac{73}{729}$

3. Llancem 10 daus alhora. Definim la variable aleatòria X: «nombre de daus en què s'obté la cara 1». Calcula:

a) $p[X = 3]$

b) $p[X \geqslant 7]$

c) $p[X < 5]$

$B\left(10, \frac{1}{6}\right)$

a) $p[X = 3] = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 =$

$= 120 \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5^7}{6^7} = 0{,}15505$

b) $p[X \geqslant 7] = p[X = 7] + p[X = 8] +$

$+p[X = 9] + p[X = 10] =$

$= \binom{10}{7}\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{10}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^2 +$

$+\binom{10}{9}\left(\frac{1}{6}\right)^9 \frac{5}{6} + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 0{,}000248 + 0{,}0000186 +$

$+0{,}0000008 + 0{,}00000002 = 0{,}0002674$

c) $p[X < 5] = p[X = 0] + p[X = 1] +$

$+p[X = 2] + p[X = 3] + p[X = 4] =$

$= \binom{10}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^9 +$

$+\binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 + \binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6 =$

$= 0{,}1615055 + 0{,}3230111 + 0{,}29071 +$

$+0{,}1550453 + 0{,}0542658 = 0{,}98454$

4. Determina el nombre esperat de respostes correctes en un examen tipus test de 10 preguntes. Cada pregunta consta de 4 possibles respostes, de les quals només una és correcta i se suposa que cada pregunta es contesta a l'atzar.

$B\left(10, \frac{1}{4}\right)$; per X: «nombre de respostes correctes»

$\mu = np = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$ respostes correctes

5. Se sap que un determinat medicament millora els símptomes d'una malaltia en dos de cada tres pacients. Si administrem aquest medicament a set malalts, calcula la probabilitat que:

a) Millorin quatre persones.

b) Millorin tres persones com a mínim.

c) Millorin les set persones.

X: «nombre de persones que milloren amb el medicament» $\rightarrow B\left(7, \frac{2}{3}\right)$

a) $p[X = 4] = \binom{7}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

$= 35 \cdot \frac{2^4}{3^4} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{35 \cdot 2^4}{3^7} = \frac{560}{2\,187} = 0{,}25606$

b) $p[X \geqslant 3] = 1 - p[X < 3] =$

$= 1 - [p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2]] =$

$= 1 - \left[\binom{7}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \binom{7}{1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \binom{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^5\right] =$

$= 1 - (0{,}0004572 + 0{,}0064014 + 0{,}0384087) =$

$= 1 - 0{,}0452673 = 0{,}95474$

c) $p[X = 7] = \binom{7}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0{,}05853$

6. Estudis recents han confirmat que el 70 % dels portadors del virus de la SIDA ha consumit algun tipus de droga. A la sala d'espera d'una consulta especialitzada en aquesta malaltia s'hi troben, en un cert moment, sis persones portadores del virus. Determina la probabilitat que cap de les sis persones hagi consumit drogues.

X: «nombre de persones que han consumit droga»

$B(6; 0{,}7)$

$$p[X = 0] = \binom{6}{0} 0{,}3^6 = 0{,}000729$$

7. Se sap que només el 5 % de les persones que visiten un logopeda són de classe social baixa. Si a la consulta d'un logopeda hi ha cinc persones, troba la probabilitat que:

X: «nombre de persones de classe social baixa»

$B(5; 0{,}05)$

a) Cap sigui de classe social baixa.

$p[X = 0] = \binom{5}{0} 0{,}95^5 = 0{,}773781$

b) Almenys dues no siguin de classe social baixa.

$p[X \leqslant 3] = 1 - p[X > 3] =$

$= 1 - (p[X = 4] + p[X = 5]) =$

$= 1 - \left[\binom{5}{4} 0{,}05^4 \cdot 0{,}95 + \binom{5}{5} 0{,}05^5\right] =$

$= 1 - (0{,}0000296 + 0{,}0000003) =$

$= 1 - 0{,}0000299 = 0{,}99997$

8. Sigui X una variable aleatòria contínua que segueix una distribució normal $N(\mu, \sigma)$. Determina:

$\boldsymbol{p\left[\mu - \frac{3}{2}\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma\right]}$

$p\left[\mu - \frac{3}{2}\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma\right] = p\left[-\frac{3}{2} \leqslant Z \leqslant 2\right] =$

$= p[Z \leqslant 2] - p[Z \leqslant -1{,}5] = p[Z \leqslant 2] - p[Z \geqslant 1{,}5] =$

$= p[Z \leqslant 2] - (1 - p[Z \leqslant 1{,}5]) =$

$= 0{,}9772 - (1 - 0{,}9332) = 0{,}9772 - 0{,}0668 =$

$= 0{,}9104$

9. Demostra que el 99,74 % del total de l'àrea de recinte que determina la funció de densitat amb l'eix *OX* en una distribució normal $N(\mu, \sigma)$ es troba a l'interval:

$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$

$p[\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma] = p[-3 \leqslant Z \leqslant 3] =$

$= 2 \cdot (p[Z \leqslant 3] - 0{,}5) = 2 \cdot (0{,}9987 - 0{,}5) =$

$= 2 \cdot 0{,}4987 = 0{,}9974 \rightarrow 99{,}74\,\%$

10. Troba la probabilitat que una variable contínua prengui valors compresos entre 32 i 40 en una distribució *N*(50, 5).

$p[32 \leq X \leq 40] = p[-3{,}6 \leq Z \leq -2] = p[2 \leq z \leq 3{,}6] =$
$= p[Z \leq 3{,}6] - p[Z \leq 2] = 0{,}99984 - 0{,}9772 = 0{,}02264$

11. La durada de l'embaràs de les dones segueix una distribució normal, amb una mitjana de 266 dies i una desviació típica de 16 dies. Calcula el percentatge d'embarassos amb una durada màxima de 244 dies.

X: «durada de l'embaràs en dies» $\rightarrow N(266, 16)$

$p[X \leqslant 244] = p[Z \leqslant -1{,}38] = p[Z \geqslant 1{,}38] =$

$= 1 - p[Z \leqslant 1{,}38] = 1 - 0{,}9162 = 0{,}0838$

El 8,38 % d'embarassos.

12. La mitjana de pes de 500 persones és 70 kg i la desviació típica, 3 kg. Suposant que el pes es distribueix normalment, determina el nombre de persones que pesa:

a) Entre 60 i 75 kg.

b) Més de 90 kg.

c) Menys de 64 kg.

$N(70, 3)$; X: «pes en kg»

a) $p[60 \leq X \leq 75] = p[-3{,}33 \leq Z \leq 1{,}67] =$

$= p[Z \leq 1{,}67] - p[Z \leq -3{,}33] =$

$= p[Z \leq 1{,}67] - p[Z \geq 3{,}33] =$

$= p[Z \leq 1{,}67] - (1 - p[Z \leq 3{,}33]) =$

$= 0{,}9525 - (1 - 0{,}99957) = 0{,}9525 - 0{,}00043 = 0{,}95207$

500 · 0,95207 = 476 persones pesen entre 60 i 75 kg.

b) $p[X \geq 90] = p[Z \geq 6{,}67] = 0$

500 · 0 = 0 → cap persona pesa més de 90 kg.

c) $p[X \leq 64] = p[Z \leq -2] = p[Z \geq 2] = 1 - p[Z \leq 2] =$
$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

500 · 0,0228 = 11 persones pesen menys de 64 kg.

13. La nota mitjana de les proves d'accés a una facultat va ser de 5,8 amb una desviació típica d'1,75. Si van ser admesos tots els estudiants amb una nota superior a 6 i considerant que la distribució és normal:

a) Quin va ser el percentatge d'estudiants admesos?

b) Quina és la probabilitat que exactament quatre de cada deu estudiants fossin admesos?

c) Si haguessin admès el 55 % dels estudiants, quina hauria estat la nota de tall en aquesta facultat.

X: «notes» → $N(5{,}8;\ 1{,}75)$

a) $p[X \geq 6] = p[Z \geq 0{,}11] = 1 - p[Z \leq 0{,}11] =$
$1 - 0{,}5438 = 0{,}4562 \rightarrow 45{,}62\,\%$

b) $B(10;\ 0{,}4562)$; Y: «nombre d'estudiants admesos»

$p[Y = 4] = \binom{10}{4} 0{,}4562^4 \cdot 0{,}5438^6 = 0{,}23522$

c) 5,57

14. La data de caducitat d'un medicament és el 31 de desembre d'un any determinat. Sabem que, després d'aquesta data, l'efectivitat del medicament segueix una distribució normal la mitjana de la qual és de 300 dies i la desviació típica, de 100 dies.

a) Calcula la probabilitat que no sigui efectiu el 31 de desembre de l'any següent.

b) Quin dia s'haurà de consumir si volem tenir un 80 % de probabilitat que sigui efectiu?

X: «dies que passen de la data de caducitat» $N(300, 100)$

a) $p[X \leq 360] = p[Z \leq 0{,}6] = 0{,}7257$

b) $p[X \geq x] = 0{,}8 \rightarrow p[Z \geq z] = 0{,}8 \rightarrow p[Z \leq -z] =$
$= 0{,}8 \rightarrow -z = 0{,}84$

$z = -0{,}84 \rightarrow x = \sigma z + \mu = 100 \cdot (-0{,}84) + 300 =$
$= 216$ dies
216 dies després de la data de caducitat.

15. En un estadi esportiu es volen instal·lar focus per il·luminar el terreny de joc. El temps de funcionament dels focus segueix una distribució normal, amb una mitjana de 40 hores i una desviació típica de 4 hores.

a) Si escollim un focus a l'atzar, quina és la probabilitat que il·lumini un mínim de 30 hores?

b) Si es compren 1500 focus, quants podem esperar que funcionin 30 hores com a mínim?

X: «temps de funcionament dels focus en hores» → $N(40, 4)$

a) $p[X \geq 30] = p[Z \geq -2{,}5] = p[Z \leq 2{,}5] = 0{,}9938$

b) 1 500 · 0,9938 = 1 490,7 ≃ 1 491 focus

16. Per aprovar unes oposicions es necessita obtenir en una prova 100 punts com a mínim. Sabem que la distribució dels

punts obtinguts és normal, amb una mitjana de 110 punts i una desviació típica de 15 punts.

a) Quina és la probabilitat que aprovi un opositor?

b) Si es presenten 1 000 opositors i només es disposa de 300 places, quants punts s'hauran d'aconseguir per guanyar una d'aquestes places?

X: «nombre de punts obtinguts» $\rightarrow N(110, 15)$

a) $p[X \geq 100] = p[Z \geq -0{,}67] = p[Z \leq 0{,}67] = 0{,}7486$

b) $p[X \geq x] = 0{,}3 \rightarrow p[Z \geq z] = 0{,}3 \rightarrow p[Z \leq z] = 0{,}7 \rightarrow$
$\rightarrow z = 0{,}52$
$x = \sigma z + \mu = 15 \cdot 0{,}52 + 110 = 117{,}8$ punts

17. El percentatge d'espanyols amb estudis mitjans és del 35 %. Si triem vuit persones a l'atzar, calcula la probabilitat que entre 3 i 5 (ambdós inclosos) tinguin estudis mitjans, aplicant:

a) La distribució binomial.

b) L'aproximació normal a la binomial.

X: «nombre d'espanyols que tenen estudis mitjans»

a) $B(8;\ 0{,}35)$

$$p[3 \leq X \leq 5] = p[X = 3] + p[X = 4] + p[X = 5] =$$
$$= \binom{8}{3} 0{,}35^3 \cdot 0{,}65^5 + \binom{8}{4} 0{,}35^4 \cdot 0{,}65^4 + \binom{8}{5} 0{,}35^5 \cdot 0{,}65^3 =$$
$$= 0{,}2785858 + 0{,}1875097 + 0{,}0807734 = 0{,}5468687$$

b) $\mu = np = 8 \cdot 0{,}35 = 2{,}8$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65} = 1{,}35$

$B(8;\ 0{,}35) \rightarrow N(2{,}8;\ 1{,}35)$

$$p[2{,}5 \leq X \leq 5{,}5] = p[-0{,}22 \leq Z \leq 2] =$$
$$= p[Z \leq 2] - p[Z \leq -0{,}22] = p[Z \leq 2] - p[Z \geq 0{,}22] =$$
$$= p[Z \leq 2] - (1 - p[Z \leq 0{,}22]) =$$
$$= 0{,}9772 - (1 - 0{,}5871) = 0{,}9772 - 0{,}4129 = 0{,}5643$$

18. El nombre de fulls que empaqueta una màquina segueix una distribució normal, amb una mitjana de 1 000 fulls i una desviació típica de 10 fulls. Un paquet de fulls s'accepta si en té entre 995 i 1 005. Es demana:

a) La probabilitat que un paquet sigui acceptat.

b) La probabilitat que exactament dos paquets de cada deu siguin acceptats.

c) Si el 65 % dels paquets té més d'un determinat nombre de fulls, quants fulls té cadascun d'aquests paquets?

X: «nombre de fulls» $\rightarrow N(1\,000, 10)$

a) $p[995 \leq X \leq 1\,005] = p[-0{,}5 \leq Z \leq 0{,}5] =$
$= 2(p[Z \leq 0{,}5] - 0{,}5) = 2(0{,}6915 - 0{,}5) =$
$= 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383$

b) $B(10;\ 0{,}383)$; Y: «nombre de paquets acceptats»

$$p[Y = 2] = \binom{10}{2} 0{,}383^2 \cdot 0{,}617^8 = 0{,}13864$$

c) $p[X \geq x] = 0{,}65 \rightarrow p[Z \geq z] = 0{,}65 \rightarrow p[Z \leq -z] =$
$= 0{,}65 \rightarrow -z = 0{,}39$

$z = -0{,}39 \rightarrow x = \sigma z + \mu = 10 \cdot (-0{,}39) + 1\,000 =$
$= 996$ fulls

19. Es llança 100 vegades un dau. Calcula la probabilitat d'obtenir el número 5:

a) Menys de 18 vegades.

b) Més de 14 vegades.

c) Exactament 20 vegades.

X: «nombre de vegades que surt el 5»

$B\left(100, \frac{1}{6}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 100 \cdot \frac{1}{6} = 16{,}\hat{6} \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 3{,}73 \end{array}\right\} N = (16{,}\hat{6};\ 3{,}73)$$

a) $p[X \leq 18{,}5] = p[Z \leq 0{,}49] = 0{,}6879$

b) $p[X \geq 13{,}5] = p[Z \geq -0{,}85] =$
$= p[Z \leq 0{,}85] = 0{,}8023$

c) $p[19{,}5 \leq X \leq 20{,}5] = p[0{,}76 \leq Z \leq 1{,}03] =$
$p[Z \leq 1{,}03] - p[Z \leq 0{,}76] = 0{,}8485 - 0{,}7764 =$
$= 0{,}0721$

20. El temps que es necessita perquè una ambulància arribi a l'hora a un hospital es distribueix normalment amb una mitjana de 12 minuts i una desviació típica de 3 minuts.

a) Determina la probabilitat que el temps que trigui a arribar es trobi entre 10 i 19 minuts.

b) Calcula el temps en minuts per al qual la probabilitat que l'ambulància es retardi sigui del 15 %.

X: «temps que necessita l'ambulància» $\rightarrow N(12, 3)$

a) $p[10 \leq X \leq 19] = p[-0{,}67 \leq Z \leq 2{,}33] =$
$= p[Z \leq 2{,}33] - p[Z \leq -0{,}67] =$
$= p[Z \leq 2{,}33] - p[Z \geq 0{,}67] =$
$= p[Z \leq 2{,}33] - (1 - p[Z \leq 0{,}67]) =$
$= 0{,}9901 - (1 - 0{,}7486) = 0{,}9901 - 0{,}2514 = 0{,}7387$

b) $p[X \leq x] = 0{,}15 \rightarrow p[Z \leq z] = 0{,}15 \rightarrow p[Z \leq -z] =$
$= 0{,}85 \rightarrow -z = 1{,}04$
$z = -1{,}04 \rightarrow x = \sigma z + \mu = 3 \cdot (-1{,}04) + 12 =$
$= 8{,}88$ minuts

21. La mitjana del pes dels habitants d'una ciutat és de 65 kg, amb una desviació típica de 5 kg. Suposant una distribució normal del pes, és zero la probabilitat que en escollir una persona a l'atzar pesi més de 100 kg? Justifica'n la resposta.

X: «pes en kg» $\rightarrow N(65, 5)$

$p[X \geq 100] = p[Z \geq 7] = 0$. Sí, és zero.

22. Se sap que les notes d'un determinat examen segueixen una distribució normal. El 17,5 % dels alumnes que s'han examinat ha obtingut una nota que supera els 7 punts, mentre que la nota del 15,7 % no arriba als 5 punts. Calcula:

X: «notes» $\rightarrow N(\mu, \sigma)$

$p[X \geqslant 7] = 0{,}175$

$p[X \leqslant 5] = 0{,}157$

a) La nota mitjana de l'examen.

$p[Z \geqslant z_1] = 0{,}175 \rightarrow$

$\rightarrow p[Z \leqslant z_1] = 0{,}825 \rightarrow z_1 = 0{,}93$

$p[Z \leqslant z_2] = 0{,}157 \rightarrow$

$\rightarrow p[Z \leqslant -z_2] = 0{,}843 \rightarrow$

$\rightarrow -z_2 = 1{,}01 \rightarrow z_2 = -1{,}01$

$$\left.\begin{aligned} 0{,}93 &= \frac{7-\mu}{\sigma} \\ -1{,}01 &= \frac{5-\mu}{\sigma} \end{aligned}\right\} \text{ d'on s'obté:}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{7-\mu}{0{,}93} \\ \sigma &= \frac{5-\mu}{-1{,}01} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{7-\mu}{0{,}93} = \frac{5-\mu}{-1{,}01} \rightarrow \mu = 6{,}04$$

b) El percentatge d'alumnes que van obtenir una nota compresa entre 5 i 7 punts.

$p[5 \leqslant X \leqslant 7] = p[X \leqslant 7] - p[X \leqslant 5] =$

$= 1 - p[X \geqslant 7] - p[X \leqslant 5] =$

$= 1 - 0{,}175 - 0{,}157 = 0{,}668$

23. Llancem una moneda 50 vegades. Troba la probabilitat que el nombre de cares que obtinguem es trobi entre 12 i 16 (ambdues incloses). Utilitza:

a) La distribució binomial corresponent.

b) L'aproximació normal a la binomial.

X: «nombre de cares»

a) $B\left(50, \frac{1}{2}\right)$

$p[12 \leqslant X \leqslant 16] = p[X = 12] + p[X = 13] +$
$+ p[X = 14] + p[X = 15] + p[X = 16] =$

$$= \binom{50}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} + \binom{50}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} + \binom{50}{14}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} + \binom{50}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} +$$

$$+ \binom{50}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = 0{,}00763$$

b) $\mu = np = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 3{,}54$

$N(25; 3{,}54)$

$p[11{,}5 \leq X \leq 16{,}5] - p[-3{,}81 \leq Z \leq -2{,}4] =$

$= p[2{,}4 \leq Z \leq 3{,}81] = p[Z \leq 3{,}81] - p[Z \leq 2{,}4] =$

$= 0{,}99993 - 0{,}9918 = 0{,}00813$

24. Suposem una distribució normal $N(50, \sigma)$ en què $p[X \geqslant 70] = 0{,}0228$. Determina el valor de σ i calcula $p[X \leqslant 45]$.

$p[X \geqslant 70] = 0{,}0228$

$p[Z \geqslant z] = 0{,}0228 \rightarrow p[Z \leqslant z] = 0{,}9772 \rightarrow z = 2$

$2 = \frac{70-50}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{70-50}{2} = 10$

$N(50, 10)$

$p[X \leqslant 45] = p[Z \leqslant -0{,}5] = p[Z \geqslant 0{,}5] =$

$= 1 - p[Z \leqslant 0{,}5] = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

25. Dues variables aleatòries contínues X i Y segueixen una distribució normal la mitjana de la qual és zero. A més, $p[X \geqslant 2] = p[Y \geqslant 3] = 0{,}1587$. Calcula'n les variàncies corresponents.

= 0 en ambdues.

$p[X \geqslant 2] = 0{,}1587$

$p[Z \geqslant z] = 0{,}1587 \rightarrow p[Z \leqslant z] = 0{,}8413 \rightarrow z = 1$

$p[Y \geqslant 3] = 0{,}1587$

$1 = \frac{2}{\sigma_1} \rightarrow \sigma_1 = 2 \rightarrow \sigma_1^2 = 4$, de la variable X

$1 = \frac{3}{\sigma_2} \rightarrow \sigma_2 = 3 \rightarrow \sigma_2^2 = 9$, de la variable Y

Avaluació

1. Quina diferència hi ha entre variable estadística i variable aleatòria? Quines condicions ha de complir una distribució perquè segueixi el model binomial?

Resposta oberta.

2. Tenim una moneda trucada de manera que la probabilitat de treure cara és quatre vegades la de treure creu. Tirem 6 vegades la moneda. Calcula la probabilitat de:

a) Treure dues vegades creu.

b) Treure com a màxim dues vegades creu.

a) $p[x = 2] = 0{,}24576$

b) $p[x \leqslant 2] = 0{,}90112$

3. De 1000 mesures de talles se'n va obtenir una mitjana de 165 cm i una desviació típica de 8 cm. Se suposa que la distribució és normal i es demana:

a) Quantes mesures són més petites de 157 cm?

b) Quantes estan entre 167 i 181 cm?

a) $1000 \cdot p[x \leqslant 157] = 1000 \cdot 0{,}1587 \approx 159$

b) $1000 \cdot p[160 \leqslant x \leqslant 180] = 1000 \cdot 0{,}3785 = 378$

4. Si l'alçada mitjana de les persones adultes d'un país és de 167 cm i les alçades es distribueixen normalment, amb una desviació típica de 5 cm:

a) Quin percentatge de la població adulta té una alçada compresa entre 160 i 180 cm?

b) Quin percentatge té una alçada no superior a 175 cm?