

Matemàtiques Aplicades a les CCSS _Bloc 2 Batxillerat

Exercicis resolts de Probabilitat

Algunes indicacions pràctiques per resoldre problemes de probabilitat



Habitualment els problemes de probabilitat responen a alguns d'aquests tipus:

- Aplicació directa de la **Regla de Laplace**. Aquesta fórmula és aplicable solament, si els successos són equiprobables. S'utilitza, en general, en experiments aleatoris simples.

$$\text{Regla de Laplace} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}$$

- Problemes susceptibles de ser plantejats amb **diagrama en arbre**.

Un diagrama en arbre és un esquema en el que queden reflectits tots els camins possibles de l'experiment aleatori.

S'inicia el diagrama partint d'un punt (nus) i s'obre una branca per a cada possibilitat diferent de l'experiment. Si hi ha repetició de la situació, s'obren noves

branques que surten dels nusos anteriors.

Cada branca del diagrama ha de ser disjunta de la resta, és a dir que la **suma de probabilitats** de les **branques** de cada **nus** ha de donar **1**.

Çlarament a més intents, més complicat és el diagrama en arbre i més possibilitats finals hi ha.

La probabilitat de cada camí final és el producte de les probabilitats anteriors.

No sempre és possible escriure sencer el diagrama, però iniciar-lo dóna idea dels càlculs matemàtics necessaris. En general, els problemes d'aquest tipus són els que hi ha repetició de la situació de partida, experiments compostos.

- **Probabilitat del contrari.** En ocasions és més fàcil calcular la probabilitat del succès contrari del que es demana. Es tindrà en compte la propietat

$$P(A)=1 - P(\text{Contrari de } A)$$

Un mateix exercici, en ocasions, pot requerir de les tres situacions.

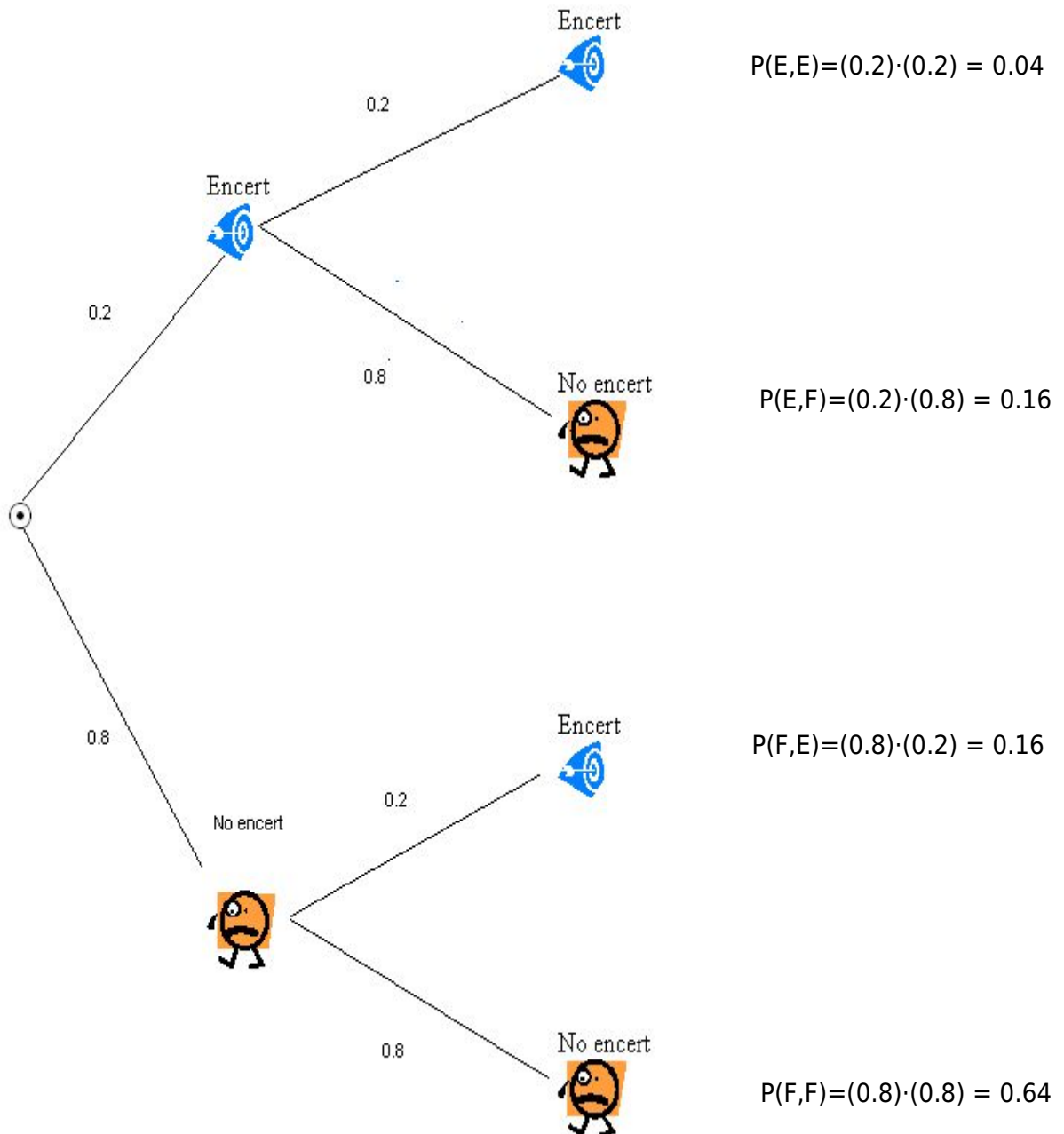
1. Exercici

La probabilitat de que un tirador amb arc, faci diana és 0,2. Si fa 2 intents, calcula la probabilitat que faci exactament 2 dianes.

Calcula la probabilitat de que faci al menys 1 diana.

Aquest és un exemple de problema típic susceptible de ser plantejat amb un diagrama en arbre. Donat que s'han de fer 2 intents, repetir 2 vegades la situació de partida.

- Aquí hi ha dos possibilitats: Encert (E) o Fallida (F), acompanyada de la seva probabilitat
- Per cada camí del primer intent (nus) s'obren dos nous camins : Encert (E) o Fallida (F), pel segon intent i així succesivament, si hi hagués més intents.



$P(\text{exactament dos dianes})= P(\text{Encert,Encert})=P(E,E)= (0.2)\cdot(0.2) = 0.04$

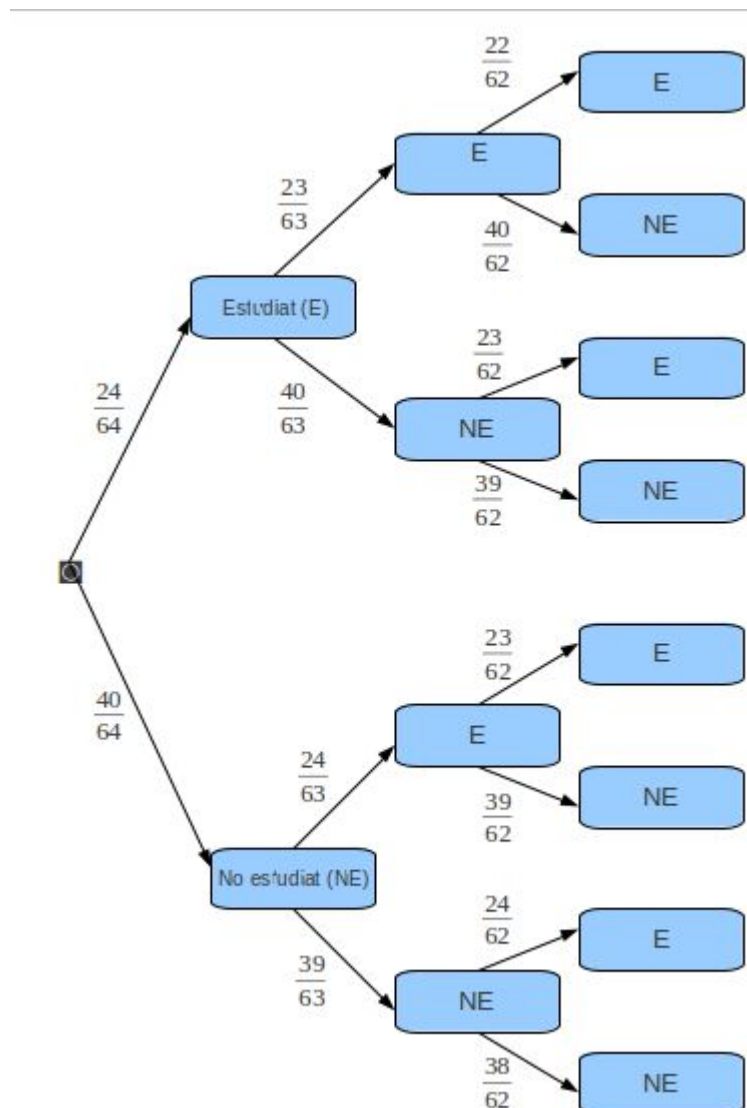
$P(\text{al menys 1 dianes})= P(E,E)+P(E,F)+P(F,E)= (0.2)\cdot(0.2)+(0.2)\cdot(0.8)+(0.8)\cdot(0.2) = 0.36$

El segon apartat es podria plantejar també pensat en el succès contrari:

$P(\text{al menys 1 dianes})=1-P(\text{cap diana})=1-P(F,F)=1-(0.8)\cdot(0.8) = 1-0.64=0.36$

2. Exercici

Un temari d'oposicions està format per 64 temes. Per poder aprovar, l'opositor ha d'exposar correctament 1 tema de 3 que haurà triat prèviament.
 Quina probabilitat d'aprovar té un aspirant que ha estudiat 24 dels 64 temes?



$P(\text{aprovar}) = P(\text{saber al menys 1 dels tres temes}) = 1 - P(\text{no saber-ne cap desl tres}) =$

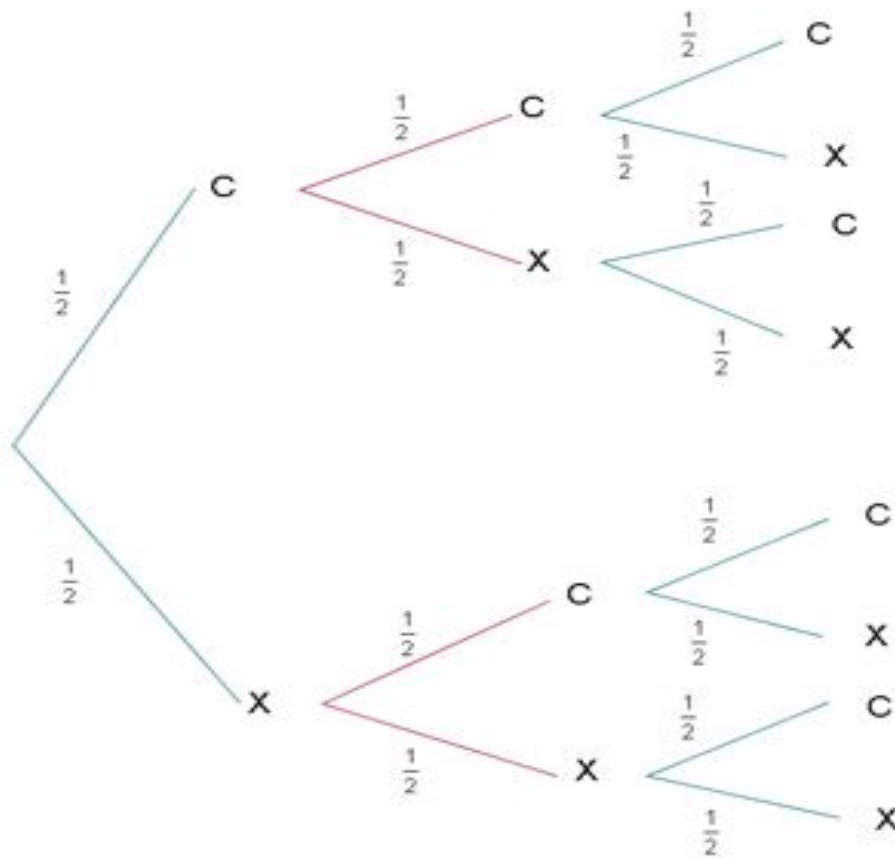
$$1 - P(\text{NE,NE,NE}) = 1 - \frac{40}{64} \cdot \frac{39}{63} \cdot \frac{38}{62} = 1 - \frac{1235}{5208} = 0.762$$

Resposta : La probabilitat d'aprovar és del 76%

3. Exercici

Calcular la probabilitat que al llançar tres monedes, surti:

- a) Tres cares.
- b) Exactament 2 cares
- c) Al menys dues cares



a) $P(C,C,C) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

b) $P(C,C,X) + P(C,X,C) + P(X,C,C) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$

c) $P(\text{Dues cares o tres cares}) = P(C,C,X) + P(C,X,C) + P(X,C,C) + P(C,C,C) =$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

4. Exercici

Extracció amb reposició d'una bola d'una urna

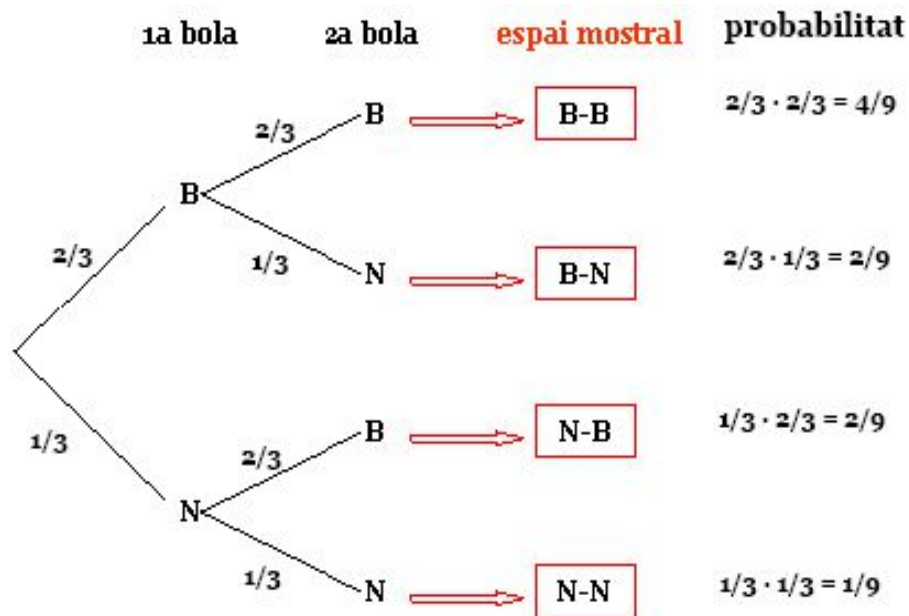
En una urna hi ha 2 boles blanques i 1 bola negra. L'experiment aleatori serà extreure 1 bola de la urna i mirar el color . Retornar-la i repetir l'extracció.
 Això es coneix com extracció amb reposició.

a) Fer el diagrama en arbre que esquematitza la situació.
 Calcular la probabilitat de :

b) Treure dues boles blanques
 c) Treure dues boles negres
 d) Treure la primera bola blanca i negra la segona
 e) Treure negra la primera i blanca la segona
 f) Treure una blanca i l'altra negra?

a) Indicarem amb B = Bola blanca i amb N bola negra

A sobre de cada branca s'ha escrit la probabilitat corresponent



L'espai mostral està format pels 4 resultats possibles:

		2a bola	
		B	N
1a bola	B	B-B	B-N
	N	N-B	N-N

$$\Omega = \{(B,B),(B,N)(N,B)(N,N)\}$$

Aquests successos, però, no són equiprobables i, per aquest motiu, calcularem la probabilitat pel mètode de la multiplicació de probabilitats i no per la regla de Laplace.

b) Quina és la probabilitat de treure dues boles blanques?

- Multiplicació de probabilitats

$$p(B,B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

c) I la probabilitat de treure dues boles negres?

- Multiplicació de probabilitats

$$p(N,N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

d) Treure la primera bola blanca i negra la segona

$$p(B,N) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

e) Treure negra la primera i blanca la segona

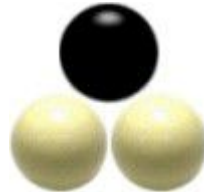
$$p(N,B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

f) Treure una blanca i l'altra negra?

$$p(N,B) + p(B,N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

5. Exercici

Extracció sense reposició d'una bola d'una urna
(exemple d'esdeveniments dependents)



En una urna hi ha 2 boles blanques i 1 bola negra. L'experiment aleatori serà extreure 1 bola de la urna i mirar el color . Repetir l'extracció sense retornar la bola.

Això es coneix com extracció sense reposició.

a) Fer el diagrama en arbre que esquematitza la situació.

Calcular la probabilitat de :

b) Treure dues boles blanques

c) Treure dues boles negres

d) Treure la primera bola blanca i negra la segona

e) Treure negra la primera i blanca la segona

f) Treure una blanca i l'altra negra?

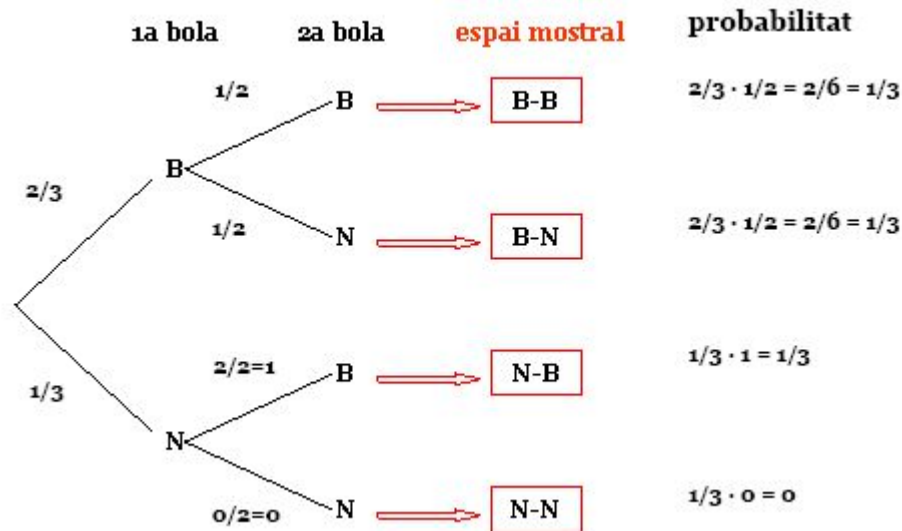
Fixeu-vos que, si la primera bola que traiem és blanca (probabilitat $2/3$), en la urna ens quedarà una bola blanca i una bola negra; en aquest cas, la probabilitat que la segona bola extreta sigui blanca serà $1/2$ i la probabilitat que la segona bola extreta sigui negra també serà $1/2$.

Si, pel contrari, la primera bola que traiem és la bola negra (probabilitat $1/3$), en la urna ens quedaran només les dues boles blanques; en aquest cas, la probabilitat que la segona bola extreta sigui blanca serà $2/2=1$ i la probabilitat que la segona bola extreta sigui negra serà $0/2=0$.

Per aquest motiu, es tracta d'esdeveniments dependents, ja que la realització d'un, influeix en l'altre: la probabilitat en la segona extracció és diferent segons quina hagi estat la primera extracció.

Ara, trobarem el corresponent espai mostral fent el diagrama d'arbre i la taula de doble entrada. Farem servir la lletra B per indicar bola blanca i la lletra N per indicar bola negra:

a)



		2a bola	
		B	N
1a bola	B	B-B	B-N
	N	N-B	N-N

L'espai mostral està format pels 4 resultats possibles:

$$\Omega = \{(blanca, blanca), (blanca, negra), (negra, blanca), (negra, negra)\} \rightarrow 4 \text{ resultats}$$

Aquests successos no són equiprobables, per aquest motiu calcularem les probabilitats pel mètode de la multiplicació de probabilitats i no per la regla de Laplace.

b)) Quina és la probabilitat de treure dues boles blanques?

- Multiplicació de probabilitats:

$$p(B,B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

c) I la probabilitat de treure dues boles negres?

- Multiplicació de probabilitats:

$$p(N,N) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

Fixeu-vos que és lògic que el resultat sigui zero, ja que és esdeveniment impossible: com que només hi ha una bola negra a la urna, si a la primera extracció traiem la bola negra no és possible que la segona també sigui negra!

d) I que sigui blanca la primera i negra la segona?

- Multiplicació de probabilitats:

$$p(B,N) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

e) I que sigui negra la primera i blanca la segona?

- Multiplicació de probabilitats:

$$p(N,B) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

f) I que una sigui blanca i l'altra negra?

- Multiplicació de probabilitats:

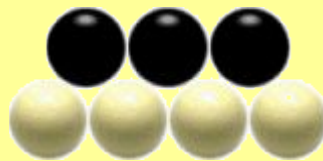
$$p(B,N) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$p(N,B) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$p = p(B,N) + p(N,B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Exemple per practicar

En una caixa tenim tres boles negres i quatre de blanques.



Considerem l'experiment aleatori extreure una bola de la caixa, mirar de quin color és, retornar-la a la caixa i, després, extreure'n una segona bola. Responen les preguntes següents :

- a) Quina és la probabilitat que la 1a bola sigui negra?
- b) Quina és la probabilitat que la 1a bola sigui blanca?
- c) Quina és la probabilitat que la 1a bola sigui blanca i la 2a sigui negra?
- d) Quina és la probabilitat que una bola sigui blanca i l'altra negra (en qualsevol ordre)?