Derivació implícita

Aplicació de la derivació implícita per calcular l'equació de la recta tangent a una circumferència en un punt

Considereu la circumferència del pla d'equació $x^2+y^2-6x+4y+8=0$. Comproveu que el punt (4,0) pertany a la circumferència i determineu l'equació de la seva tangent en aquest punt

Per comprovar que el punt (4,0) pertany a la circumferència es suficient substituir l'x per 4 i l'y per 0, en la seva equació, i confirmar que es verifica la igualtat:
4^2+0-6·4+0+8= 16-24+8=0

Càlcul de l'equació de la tangent en el punt (4,0)
El pendent de la recta és la derivada en el punt (4,0)
Derivem implícitament:

$$x^2+y^2-6x+4y+8=0 \Rightarrow 2x+2y\cdot y'-6+4y'=0 \Rightarrow (2y+4)y'=6-2x \Rightarrow y'=\frac{6-2x}{2y+4}$$

Ara hem de calcular el valor de la derivada en el punt (4,0)

$$y'_{(4,0)}=\frac{6-2\cdot4}{2\cdot0+4}=\frac{6-8}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

L'equació de la recta tangent $y-f(a)=f'(a)(x-a) \Rightarrow y-0=-\frac{1}{2}(x-4) \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{2}x+2}$

Interpretació geomètrica de la derivada

Calcula el pendent de la recta secant a la gràfica de la funció f(x)=x2+2x en els punts d'abscissa x1=-1 i x2=2.

El pendent de la recta coincideix amb la taxa de variació mitjana de la funció entre els dos punts d'abscissa considerats:

m=TVM(-1,2)=$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{8+1}{3}=\boxed{3}$

Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f(x)=-x^2 +6x-3 en el punt d'abscissa x=2.

L'equació de la recta tangent a la funció f(x) en el punt d'abscissa x=2 és:

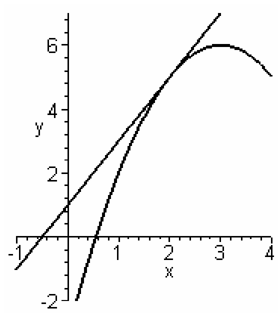
y– f(2) = f'(2)(x-2)

Calculem f(2) i f'(2):

f(2)= -2^2+ 6·2 – 3 = 5

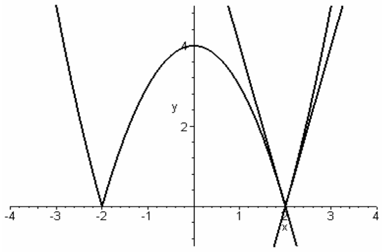
$$f'(x)=-2x+6 \Rightarrow f'(2)=-2\cdot2+6=2$$

Per tant l'equació de la recta tangent és y – 5 = 2 (x – 2) ⇒ y = 2x +1



Derivabilitat i continuïtat

Estudia la continuïtat i derivabilitat de la funció f(x) = |x²-4|, en x=2



Escrivim f com una funció definida a trossos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty) \\ -x^2+4 & si \quad x \in (-2,2)\end{cases}$$

f és contínua en x=2 si compleix

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-2^2+4=0$; $\lim_{x\to 2^+} f(x)= 2^2-4=0$; $f(2)=\left|2^2-4\right|=0$ i per tant f és contínua en x=2.

Calculem f'(2⁻) i f'(2⁺) tenim en compte que f té expressions diferents a l'esquerra i a la dreta de 2:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty) \\ -2x & si \quad x \in (-2,2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2^+)=4 \\ f'(2^-)=-4\end{cases}$$

Atès que són diferents f'(2⁻) i f'(2⁺), no existeix f'(2) i, per tant f no és derivable en x=2

Observeu, en el gràfic de la funció f, el pendent de les rectes tangents a f per la dreta i per l'esquerra en el punt d'abscissa 2

Derivada de la funció inversa

Calcula la derivada de la funció f(x)=ex amb el mètode de la funció de la derivada inversa i comprova que coincideixen amb els resultats que ja coneixes

La funció f(x) =e^x és la funció inversa de la funció g(x) = ln x , o sigui,

$$\left(\underline{g\circ f}\right)(x)=g(f(x))=\ln(e^x)=x$$

Si anomenem y=e^x $\Rightarrow$ ln y = x i com que ln y = ln f(x) és un funció composta de la funció g(x)=ln x i de f(x) = e^x, derivem g(f(x))= ln (f(x)) = ln y :

$$I'(x)=1=\left(\underline{g\circ f}\right)'(x)=g'(fx)\cdot f'(x)=(\ln y)'\cdot f'(x)=\frac{1}{y}y'\Rightarrow\frac{y'}{y}=1\Rightarrow y'=y \;\; o\ sigui\ \ y' = e^x$$

Derivades succesives

Troba la derivada segona de les funcions: f(x) = ln sin x i g(x)= arc tg x

$$f\ '(x)=\frac{\cos\ x}{\sin\ x} \quad\Rightarrow\quad f\ ''(x)=\frac{-(\sin x)(\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$g\ '(x)\ =\ \frac{1}{1+x^2}\Rightarrow\ g''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$