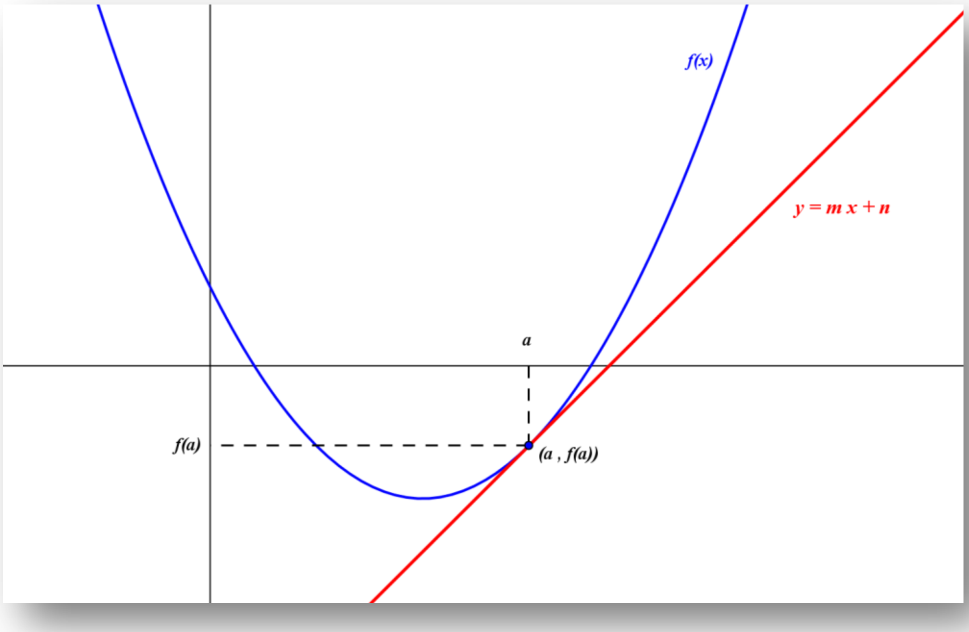
RECTA TANGENT A LA GRÀFICA D'UNA FUNCIÓ

Per trobar l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció *f(x)* en el punt *(a,f(a))* cal tenir en compte que :

L'equació de la recta demanada és de la forma ***y = mx+b*** on:

- *m = f'(a)* (recorda que per definició f'(a) és el pendent m de la recta tangent a la gràfica de la funció f(x) en *x=a*)
- b surt d'imposar que el punt (a,f(a)) és també un punt d'aquesta recta i per tant es compleix *f(a) =m·a+b*



EXEMPLES :

Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$ ***quan x = -1***

La recta que busquem té per equació y = mx+b. Cal esbrinar el valor de m i b. Per calcular els valors de m i b utilitzarem que

1. $m = f'(-1)$
2. La recta passa pel punt (-1, f(-1))

$$f'(x)=3x^2-4x \underset{\text{Condició 1}}{\uparrow\!\!\rightarrow} m=f'(-1)=3\cdot(-1)^2-4(-1)=3+4=7$$

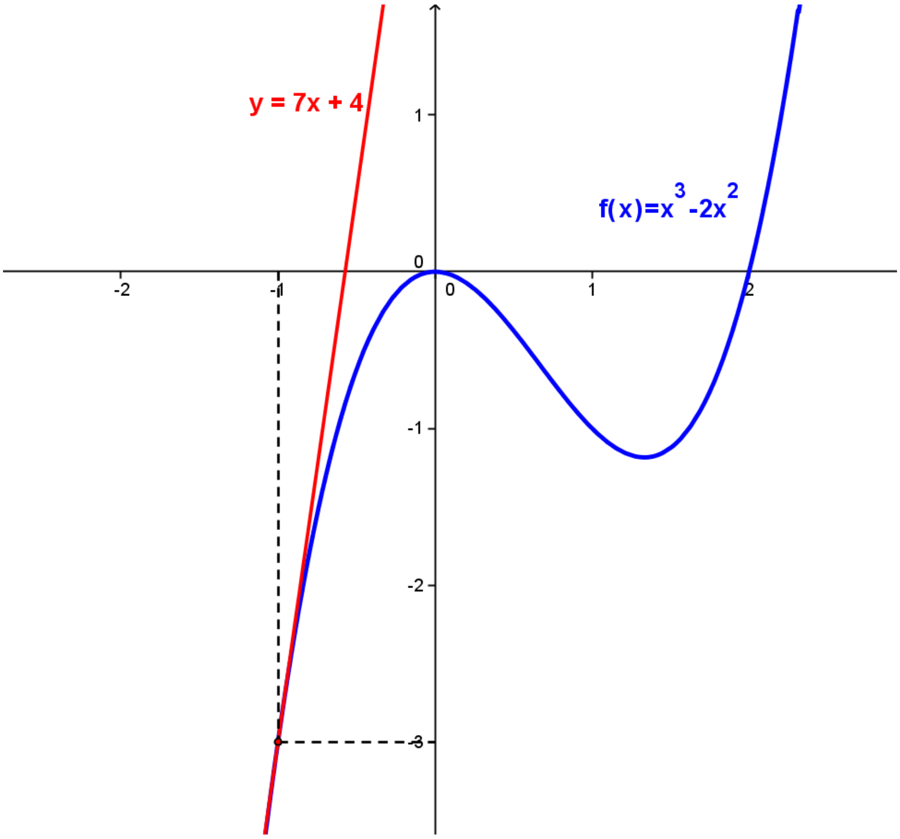
Condició 1

$$f(-1)=(-1)^3-2(-1)^2=-1-2=-3 \rightarrow -3=m\cdot(-1)+b \rightarrow -3=7(-1)+b \rightarrow b=4$$

Condició 2 m = 7

L'equació de la recta buscada és doncs $\boxed{y = 7x + 4}$

Veiem aquest resultat gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $\mathbf{f(x)=x^3-2x^2}$ ***en el punt*** $\left(\frac{2}{3},-\frac{16}{27}\right)$

La recta que busquem té per equació y = mx+b. Cal esbrinar el valor de m i b. Per calcular els valors de m i b utilitzarem que

1. $m=f'\left(\frac{2}{3}\right)$
2. La recta passa pel punt $\left(\frac{2}{3},f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\left(\frac{2}{3},-\frac{16}{27}\right)$

$$f'(x)=3x^2-4x \quad \rightarrow m=f'\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\frac{4}{9}-\frac{8}{3}=-\frac{4}{3}$$

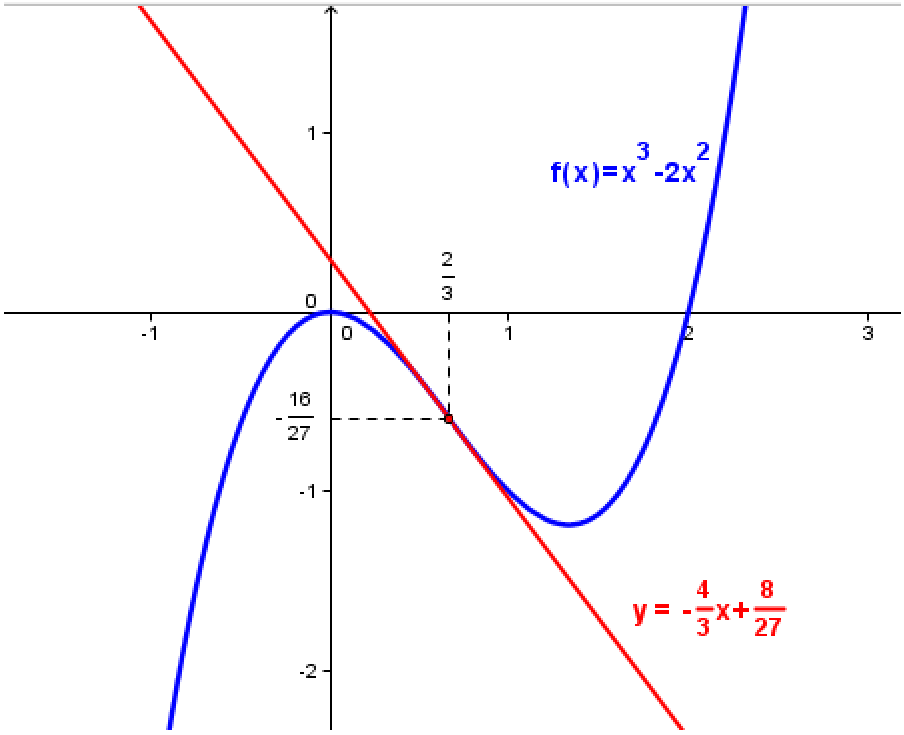
Condició 1

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{16}{27} \quad \rightarrow -\frac{16}{27}=m\cdot\frac{2}{3}+b \rightarrow -\frac{16}{27}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}+b \rightarrow b=-\frac{16}{27}+\frac{8}{9}=\frac{8}{27}$$

Condició 2 m = -4/3

L'equació de la recta buscada és doncs $y=\boxed{-\frac{4}{3}x+\frac{8}{27}}$

Veiem aquest resultat gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=x^3-2x^2$ en els punts on la funció talla a l'eix d'abscisses

Primer cal buscar aquests punts resolent l'equació f(x)=0

$$x^3-2x^2=0$$
$$x^2(x-2)=0$$

$$x^2=0 \rightarrow x=0 \rightarrow \text{punt} \quad (0,f(0))=(0,0)$$
$$x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow \text{punt} \quad (2,f(2))=(2,0)$$

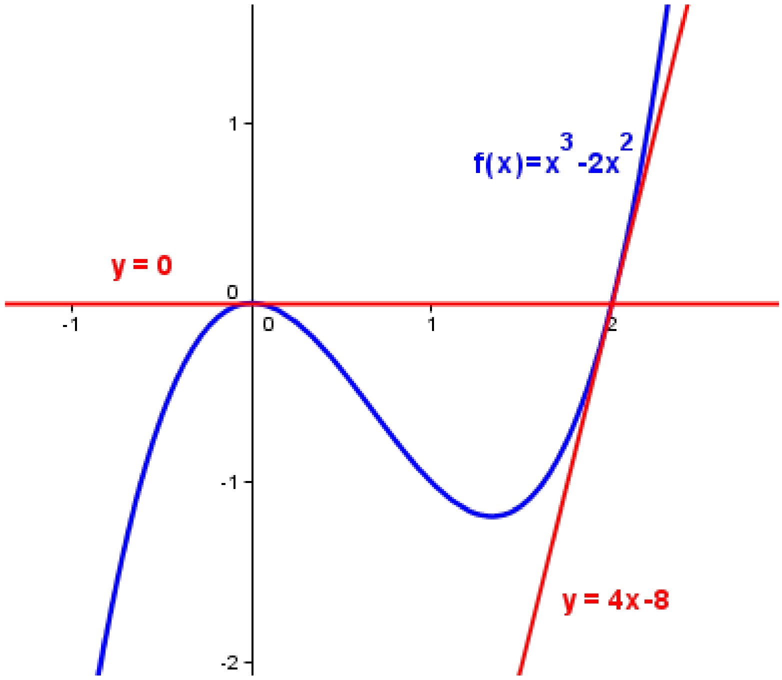
- Equació de la recta tangent en el punt (0,0)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x \quad \to m=f'(0)=0 \\ f(0)=0\cdot 0+b \to 0=b \end{array}\right\} \to \boxed{y=0} \text{ és l'equació de la recta tangent en el punt (0,0)}$$

- Equació de la recta tangent en el punt (2,0)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x \quad \to m=f'(2)=4 \\ f(2)=4\cdot 2+b \to 0=8+b \to b=-8 \end{array}\right\} \to \boxed{y=4x-8} \text{ és l'equació de la recta tangent en el punt (2,0)}$$

Veiem aquest resultat gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $\mathbf{f(x)=x^3-2x^2}$ ***en els punts on la tangent és horitzontal***

Si la recta tangent és horitzontal en un punt (a, f(a)) llavors f'(a)=0 ja que

les rectes horitzontals tenen pendent m=0

Primer doncs cal buscar aquests punts resolent l'equació f'(x)=0

$f'(x)=3x^2-4x$

$3x^2-4x=0$

$x(3x-4)=0$ ⟨ $x=0\rightarrow \text{punt} \quad (0,f(0))=(0,0)$; $3x-4=0\rightarrow x=\frac{4}{3}\rightarrow \text{punt} \quad \left(\frac{4}{3},f\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\left(\frac{4}{3},-\frac{32}{27}\right)$

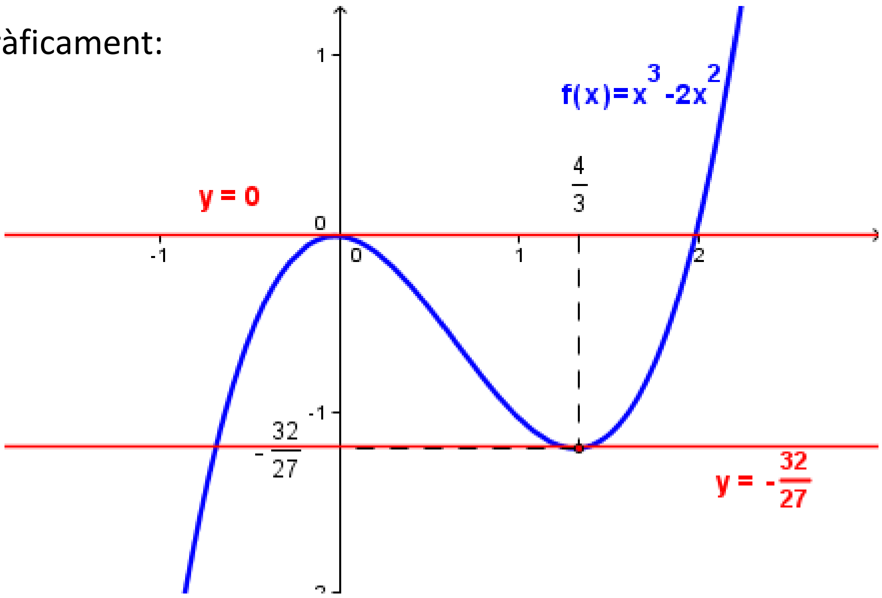
- Equació de la recta tangent en el punt (0,0)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x \quad \rightarrow m=f'(0)=0 \\ f(0)=0\cdot 0+b\rightarrow 0=b \end{array}\right\}\rightarrow \boxed{y=0}$$ és l'equació de la recta tangent en el punt (0,0)

- Equació de la recta tangent en el punt $\left(\frac{4}{3},-\frac{32}{27}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x \quad \rightarrow m=f'\left(\frac{4}{3}\right)=0 \\ f\left(\frac{4}{3}\right)=0\cdot\frac{4}{3}+b\rightarrow -\frac{32}{27}=0+b\rightarrow b=-\frac{32}{27} \end{array}\right\}\rightarrow \boxed{y=-\frac{32}{27}}$$ és l'equació de la recta tangent en el punt $\left(\frac{4}{3},-\frac{32}{27}\right)$

Veiem aquest resultat gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=x^3-2x^2$ ***en els punts on la tangent és paral·lela a la recta y = 4x - 2***

Totes les rectes paral·leles a la recta y = 4x-2 tenen la mateixa pendent m=4

i per tant la seva equació és de la forma y = 4x + b

Ara cal buscar els punts (a, f(a)) que compleixen f'(a)=4

$$f'(x)=3x^2-4x$$

$$3x^2-4x=4\to 3x^2-4x-4=0\to$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\frac{4\pm 8}{6} \begin{cases} x=2\to \text{punt} \quad (2,f(2))=(2,0) \\ x=-\dfrac{2}{3}\to \text{punt} \quad \left(-\dfrac{2}{3},f\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right)=\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{32}{27}\right) \end{cases}$$

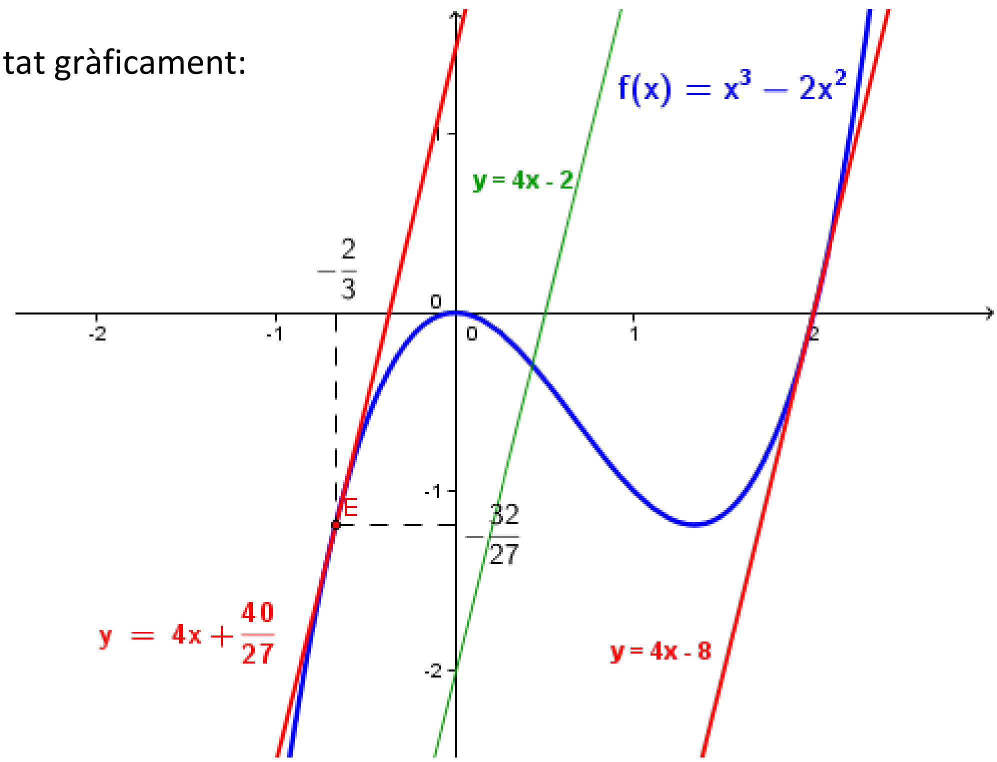
- Equació de la recta tangent en el punt (2,0)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x \quad \to m=f'(2)=4 \\ f(2)=4\cdot 2+b\to 0=8+b\to b=-8 \end{array}\right\}\to \boxed{y=4x-8} \text{ és l'equació de la recta tangent en el punt (2,0)}$$

- Equació de la recta tangent en el punt $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{32}{27}\right)$

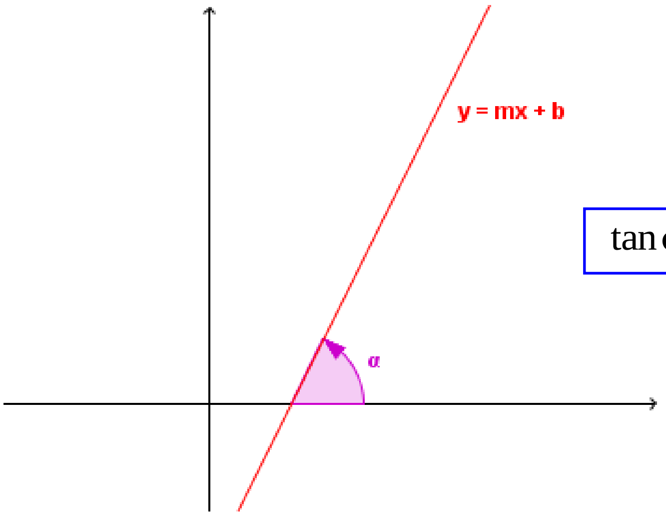
$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x \quad \to m=f'\left(-\dfrac{2}{3}\right)=4 \\ f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=4\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+b\to -\dfrac{32}{27}=-\dfrac{8}{3}+b\to b=\dfrac{40}{27} \end{array}\right\}\to \boxed{y=4x+\dfrac{40}{27}} \text{ és l'equació de la recta tangent en el punt } \left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{32}{27}\right)$$

Veiem aquest resultat gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=x^3-2x^2$ en els punts on la tangent forma un angle de 135 ^{o} amb l'eix d'abscisses

La pendent m d'una recta y=mx+b està directament relacionada amb la tangent de l'angle α que forma la recta amb l'eix d'abscisses de tal manera que tan α = m.



$$\boxed{\tan\alpha = m}$$

Llavors se'ns demana trobar les rectes tangents a la gràfica de la funció f(x) que tenen

per pendent m = tan 135 ^{o} = -1.

Busquem ara els punts on la seva recta tangent té pendent m = -1 resolent

L'equació f'(x) = -1

$$f'(x)=3x^2-4x$$

$$3x^2-4x=-1 \rightarrow 3x^2-4x+1=0 \rightarrow$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6} \begin{cases} x=1 \rightarrow \text{punt} \quad (1, f(1))=(1,-1) \\ x=\dfrac{1}{3} \rightarrow \text{punt} \quad \left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{5}{27}\right) \end{cases}$$

- Equació de la recta tangent en el punt (1,-1)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x \quad \rightarrow m=f'(1)=-1 \\ f(1)=-1\cdot 1+b \rightarrow -1=-1+b \rightarrow b=0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{y=-x} \text{ és l'equació de la recta tangent en el punt (1,-1)}$$

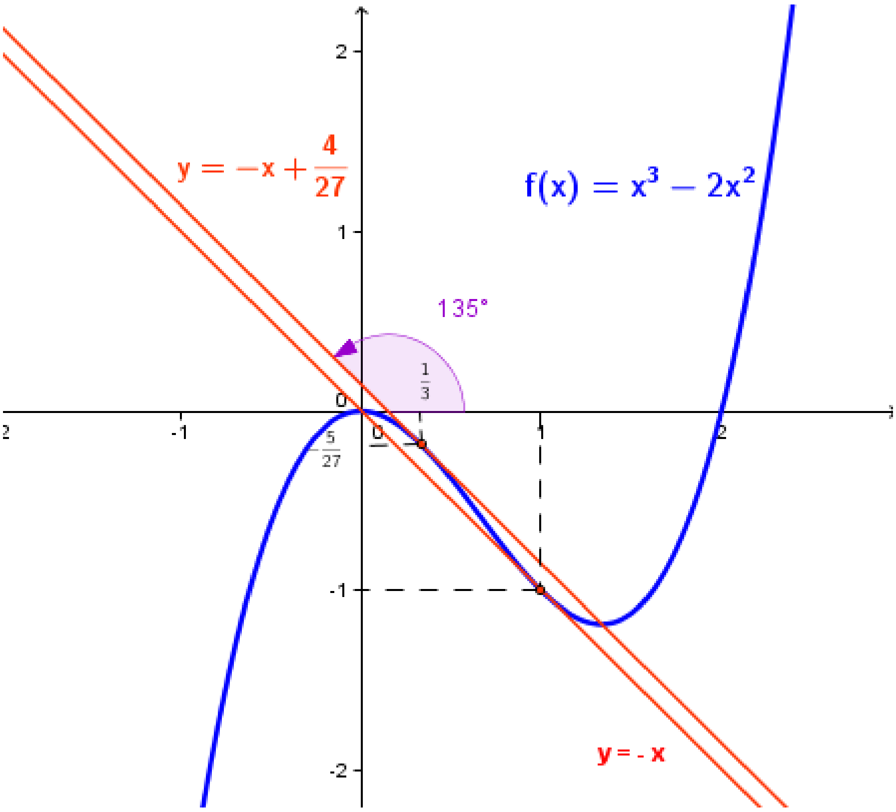
- Equació de la recta tangent en el punt $\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{27}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x \quad \to m=f'\left(\frac{1}{3}\right)=-1 \\ f\left(\frac{1}{3}\right)=-1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+b \to -\frac{5}{27}=-\frac{1}{3}+b \to b=\frac{4}{27} \end{array}\right\} \to \boxed{y=-x+\frac{4}{27}} \text{ és l'equació de}$$

la recta tangent en el punt $\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{27}\right)$

Veiem aquest resultat

gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=x^3-2x^2$ en els punts on la funció talla a la funció g(x) = x^3-8

Trobem primer els punts on es tallen les gràfiques de les funcions f(x) i g(x) resolent l'equació f(x) = g(x)

$$x^3-2x^2=x^3-8$$

$$2x^2=8$$

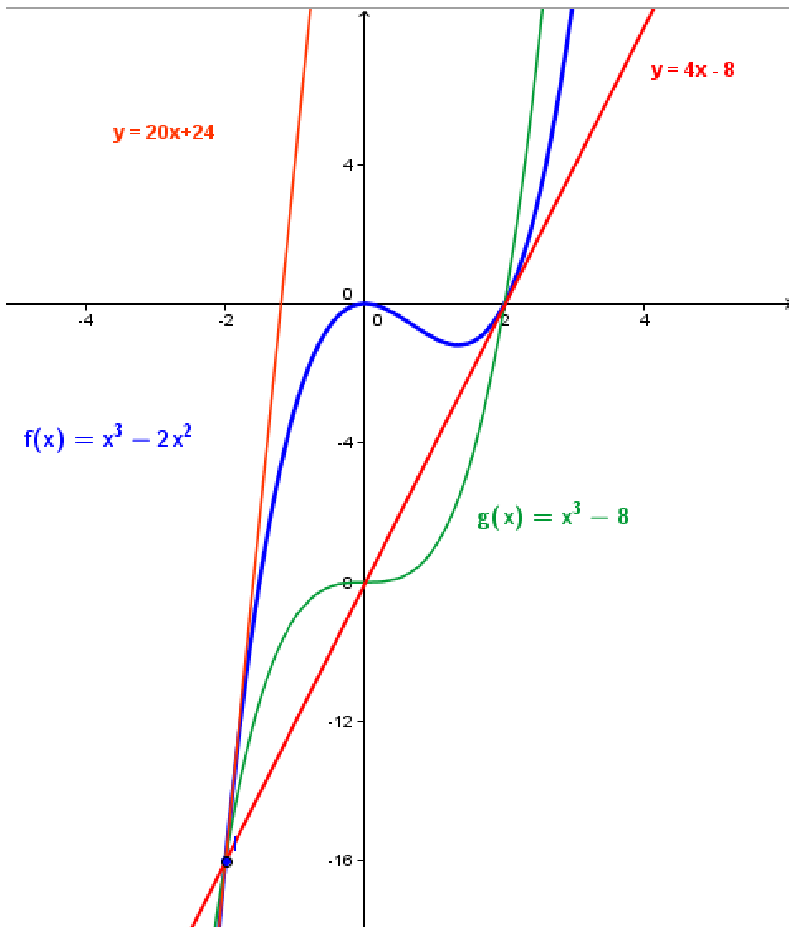
$$x^2=4 \to \begin{cases} x=2 \to \text{punt} \quad (2,f(2))=(2,0) \\ x=-2 \to \text{punt} \quad (-2,f(-2))=(-2,-16) \end{cases}$$

- Equació de la recta tangent en el punt (2,0)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x \quad \rightarrow m=f'(2)=4 \\ f(2)=4\cdot 2+b \rightarrow 0=8+b \rightarrow b=-8 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{y=4x-8}$$ és l'equació de la recta tangent en el punt (2,0)

- Equació de la recta tangent en el punt (-2,-16)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x \quad \rightarrow m=f'(-2)=20 \\ f(-2)=20\cdot(-2)+b \rightarrow -16=-40+b \rightarrow b=24 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{y=20x+24}$$ és l'equació de la recta tangent en el punt (-2,-16)



Aquest és el resultat gràficament