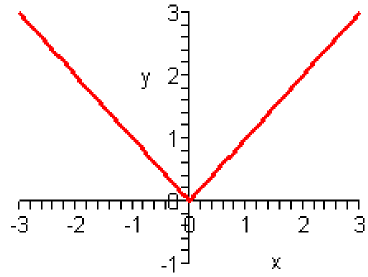
Estudia la continuïtat de la funció f(x)= |x|

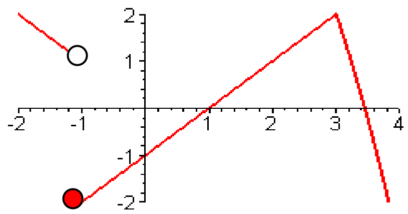
Donat que $|x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ i que f(0)= 0 tindrem:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 \end{array}\right\} = \mathrm{f}(0) \Rightarrow$$ la funció és contínua en 0



Estudia la continuïtat lateral de la funció $f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x < -1 \\ x-1 & si \quad -1 \leq x < 3 \\ -x^2+2x+5 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$

en els punts x_0=–1 i x_0=3.



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} x = 1 \neq f(-1) \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x-1 = -1-1 = -2 = f(-1) \end{array}\right. \Rightarrow$$

- f no és contínua lateralment per l'esquerra en x=–1
- f és contínua lateralment per la dreta en x=–1

Per tant la funció f no és discontínua en x=–1

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 3-1 = 2 = f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -3^2 + 2\cdot 3 + 5 = 2 = f(3) \end{array}\right. \Rightarrow$$ f és contínua lateralment en x=3 per l'esquerra i per la dreta i, per tant, és contínua en aquest punt.

Sigui f contínua en [1 , 5], f(1)=-2, f(2)=-1 i f(5)=3. Raona si són certes les afirmacions següents:

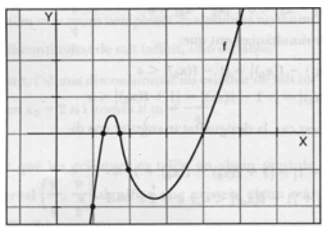
a) f(x) > 0 $\forall$ x $\in$ (2 , 5)

Falsa. Pel teorema de conservació del signe, com que f es continua en x = 2 $\in$ [1, 5] i f(2) = -2 < 0, existeix un entorn E_r (2) en què f es negativa. Per tant, f serà negativa en $E_r(2) \cap (2, 5) \neq \varnothing$

aleshores, $\exists$ x $\in$ (2, 5) tal que f(x) < 0.

b) f talla l'eix OX en l'interval [1 , 5]

Certa. Com que f és continua en [1,5] i ja que f(1) = -2 < 0 i f(5) = 3 > 0, es compleixen les hipòtesis del teorema de Bolzano; aleshores, $\exists$ x $\in$ (1,5) tal que f(c)=0. Per tant, f talla l'eix OX en c $\in$ [1,5].

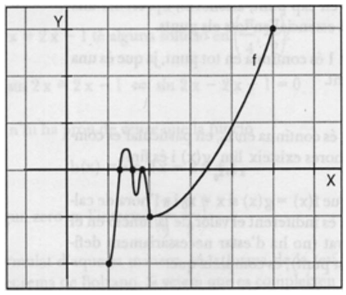


c) f no talla l'eix OX en l'interval [1 , 2]

Falsa (en general), ja que f podria tenir una gràfica com la de la figura

d) f pot tenir més de dos zeros en [1 , 2]

Certa, ja que la seva gràfica podria oscil·lar al voltant de l'eix OX entre les abscisses x=1 i x=2.



e) Existeix c ∈ [1 , 5] tal que f(c)=2.5

Certa. Pel teorema dels valors intermedis, com que f és contínua en l'interval [1,5] i 2.5 ∈ (f(1) , f(5)) = (-2 , -3) ⇒ ∃ c∈ (1, 5) ⊆ [1 , 5] tal que f(c) = 2.5

f) f està afitada en l'interval [1 , 2]

Certa. Pel teorema de Weieirstrass, com que f és contínua en l'interval [1 , 2], assoleix el seu mínim absolut en aquest interval, m, i el seu màxim absolut en aquest interval, M, en sengles punts x_1 i x_2 d'aquest interval; aleshores,

$\forall$ x ∈ [1 , 2] , m = $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ = M ⇒ m ≤ f ≤ M en [1 , 2]

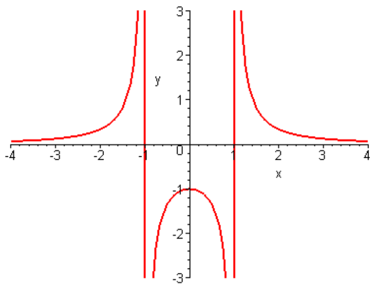
es a dir, f està fitada en [1 , 2]

Troba els punts de discontinuïtat de la funció $i(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ i determina de quins tipus són:

Com es tracta d'una funció racional, els punts de discontinuïtats es troben entre els zeros del denominador: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Calculem els límits laterals en x = -1 i x = 1.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x=-1 \text{ és asímptota vertical}$$

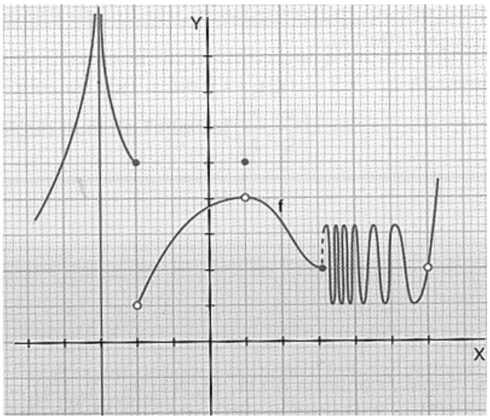


per tots dos costats i f presenta una discontinuïtat de salt infinit en x = -1.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x=1 \text{ és asímptota vertical}$$

per tots dos costats i f presenta una discontinuïtat de salt infinit en x = 1.

Considera la gràfica de la funció f:
Indica els punts de discontinuïtats de la funció f i determina de quins tipus són.



Els punts de discontinuïtat són aquells en què s'interromp la gràfica de la funció: -3, -2, 1, 3 i 6.

En x = - 3 tenim:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{f presenta una}$$

discontinuïtat de salt infinit i la recta x = -3 és una asímptota vertical de f

En x = -2 tenim:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 1 \end{cases} \text{ i } f(-2) = 5 \right\} \Rightarrow$$ f presenta una discontinuïtat de salt finit.

En x = 1 tenim:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 \end{cases} \text{ i } f(1) = 5 \right\} \Rightarrow$$ f presenta una discontinuïtat evitable.

En x = 3 tenim:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \text{ no existeix} \end{cases} \text{ i } f(3) = 2 \right\} \Rightarrow$$ f presenta una discontinuïtat essencial.

En x = 6 tenim:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = 2 \end{cases} \text{ i } 6 \notin \text{domini de } f \right\} \Rightarrow$$ f presenta una discontinuïtat evitable.

Troba els punts de discontinuïtats de les funcions següents i indica de quins tipus són:

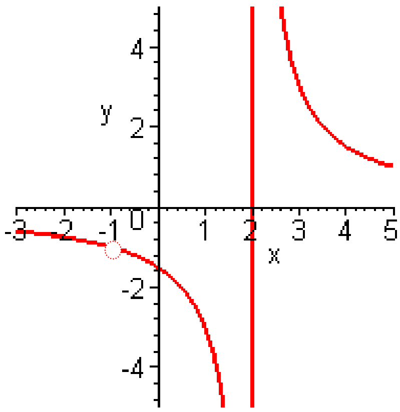
a. $f(x) = \dfrac{3x+3}{x^2 - x - 2}$

Com es tracta d'una funció racional, els punts de discontinuïtats es troben entre els zeros del denominador: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Calculem els límits laterals en x = -1 i x = 2.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{3x+3}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{3\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-2)} = \frac{3}{-3} = -1 = \lim_{x \to -1^+} \frac{3x+3}{x^2 - x - 2}$$ i per tant f presenta una discontinuïtat evitable en x = -1.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x+3}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-2)} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x+3}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-2)} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \end{cases}$$ i



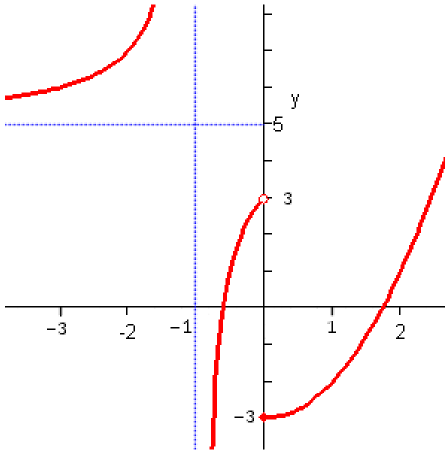
per tant f presenta una discontinuïtat de salt infinit en x = 2 i la recta x = 2 és asímptota vertical de f.

b. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{5x+3}{x+1} & \text{si } x<0 \\ x^2-3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Es tracta d'una funció definida a trossos.

En l'interval] −∞, 0 [hem de treure del domini els punts que anul·len el denominador: x+1=0⇒x=−1
Estudiem el límit en aquest punt

$$\lim_{x\to -1} \frac{5x+3}{x+1} = \begin{Bmatrix} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{5x+3}{x+1} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{5x+3}{x+1} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty \end{Bmatrix} = \infty$$



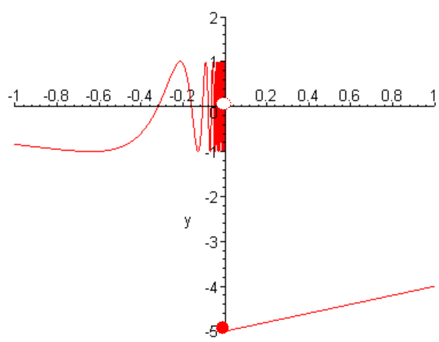
i per tant en -1 la funció f té una discontinuïtat de salt infinit i la recta x=−1 és una asímptota vertical

Hem d'estudiar la continuïtat en el punt separació dels trossos (zero)

$$\begin{Bmatrix} g(0) = 0^2 - 3 = -3 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{5x+3}{x+1} = 3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^2-3\right) = -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$ f presenta una discontinuïtat de salt finit en x=0

En l'interval] 0, ∞ [tenim una funció polinòmica i per tant contínua.

c. $h(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0 \\ x-5 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$



La funció $\sin\dfrac{1}{x}$ és contínua per a tot x<0 i presenta una discontinuïtat essencial en el punt 0, o sigui $\lim\limits_{x\to 0^-} \sin\dfrac{1}{x}$ no existeix.

Quan x ≥ 0 tenim una expressió polinòmica i per tant la funció és contínua en l'interval]0, ∞ [. L'únic punt discontinuïtat és x = 0 i tenim:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) \text{ no existeix} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x-5) = -5 \end{cases}$$

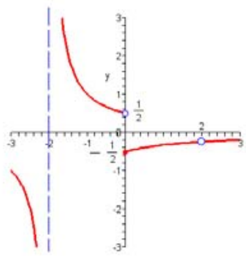
i per tant en x=0 es presenta una discontinuïtat esencial

Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+2x} & -3 \le x < 0 \\ \dfrac{2-x}{x^2-4} & 0 \le x \le 3 \end{cases}$ **definida en l'interval [- 3 , 3], estudieu la seva continuïtat en els punt x =−2, x = 0 i x = 2**

A l'interval [–3,0[: $x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow$ Domini [–3, 0 [– { –2 }

A l'interval [0, 3] : $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow$ Domini [0 , 3,] – { 2 }

Per tant, el domini de f és] –3 , 3 [– {–2 , 2}



$$\lim_{x\to -2}\frac{x}{x^2+2x} = \frac{-2}{0} = -\infty \Rightarrow \boxed{\text{en } x=-2 \text{ disc. asimpt.}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+2)} = \dfrac{1}{2} \\ f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-x}{x^2-4} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l}\text{en } x=0 \text{ discontinuïtat de salt finit i} \\ \text{és contínua lateralment per la dreta}\end{array}} \right.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \boxed{\text{en } x=2 \text{ disc. evitable}}$$

Determina els valors de a i b perquè la funció següent sigui contínua en ℜ:

$$f(x) = \begin{cases} 5\sin x & \text{si } x < -\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ 2\cos x + 3 & \text{si } x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

La funció f és una funció definida a trossos i en cada tros és contínua. Hem de veure si hi ha continuïtat en els extrems dels intervals de cada tros, o sigui quan $x = -\dfrac{\pi}{2}$ i quan $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} 5\sin x = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} (a\sin x + b) \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (a\sin x + b) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (2\cos x + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -a + b \\ a + b = 3 \end{cases}$$

Hem de resoldre el sistema d'equacions $\begin{cases} -a + b = -5 \\ a + b = 3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$ i per tant

la funció: $f(x) = \begin{cases} 5\sin x & \text{si } x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 4\sin x - 1 & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ 2\cos x + 3 & \text{si } x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ és contínua en $\Re$