INDETERMINACIONS

Si considerem $-\infty$ i $+\infty$ com una extensió dels nombres reals $\Re$, podem definir les operacions següents en els casos d'operacions amb límits de funcions:

$a+\infty \to +\infty$	$a-\infty \to -\infty$	$\infty+0 \to \infty$	$\infty-\infty \to ?$
$a\cdot\infty \to \pm\infty$	$a\cdot 0 \to 0$	$\infty\cdot\infty \to \pm\infty$	$\infty\cdot 0 \to ?$
$\frac{\infty}{a} \to \pm\infty$	$\frac{a}{0} \to \pm\infty$	$\frac{0}{a} \to 0$	$\frac{0}{0} \to ?$
$\frac{0}{\infty} \to 0$	$\frac{\infty}{0} \to \pm\infty$	$\frac{a}{\infty} \to 0$	$\frac{\infty}{\infty} \to ?$

Per tant tenim els casos d'indeterminació:

$\infty-\infty$	$\infty\cdot 0$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$

També podem establir el comportament amb potències

$$\begin{cases} \text{Si } 0<a<1 \Rightarrow \begin{cases} a^{\infty} \to 0 \\ a^{-\infty} \to \infty \end{cases} \\ \text{Si } 0 \ \ a>1 \Rightarrow \begin{cases} a^{\infty} \to \infty \\ a^{-\infty} \to 0 \end{cases} \end{cases}$$

I tenim els casos d'indeterminació següents:

∞^0	0^∞	0^0	1^∞

INFINITÈSIMS

Recordeu que un **infinitèsim**, quan $x \to a$ (x tendeix a a), és una funció que compleix la següent propietat: $\lim_{x\to a} f(x)=0$.

Dos infinitèsims es diuen equivalents, quan $x \to a$, si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ í s'escriu que

$f(x)\approx g(x)$ si $x \to a$

Exemples d'infinitèsims equivalents:

Quan $x \to 0$

$\sin x \approx x$	$tg\, x \approx x$	$arc\sin x \approx x$
$e^x \approx 1+x$	$\ln(1+x)\approx x$	$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$

Quan calculem el límit d'una expressió que sigui indeterminada, podem substituir qualsevol terme per un infinitèsim equivalent i el límit no varia:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$ ja que $\begin{cases}\ln(1+2x)\approx 2x \\ \sin(3x)\approx 3x\end{cases}$ quan $x \to 0$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-e^{x-2}}{1-\cos(2-x)}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-(1+x-2)}{1-(1-\frac{(2-x)^2}{2})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-2\cancel{(x-2)}}{(2-x)^{\cancel{2}}}=-\infty$

ja que $\begin{cases} e^{x-2}\approx 1+(x-2) \\ \cos(2-x)\approx 1-\dfrac{(2-x)^2}{2} \end{cases}$ quan $x\to 2$

INFINITS

Recordeu que un **infinit**, quan $x\to a$ (x tendeix a a) , és una funció que compleix la següent propietat: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Dos infinits es diuen **equivalents**, quan $x\to a$, si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ í s'escriu que $f(x)\approx g(x)$ si $x\to a$

Exemples d'infinits equivalents:

Quan $x\to\infty$

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_0\approx a_nx^n$
$\sqrt[m]{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_0}\approx\sqrt[m]{a_nx^n}$
$\log_b(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_0)\approx\log_b(a_nx^n)$
F. de Stirling (curiositat): $x^x\cdot e^{-x}\sqrt{2\pi x}\approx x!$

Quan calculem el límit d'una expressió que sigui indeterminada, podem substituir qualsevol terme per un infinit equivalent i el límit no varia:

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{\ln(2+3x^4)}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2x^2)}{\ln(3x^4)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln 2+\ln x^2}{\ln 3+\ln x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x^2}{\ln x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\ln x}{4\ln x}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Es diu que f(x) és un **infinit d'ordre superior** a g(x), quan $x\to a$, si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ i s'escriu que $f(x)>>g(x)$ si $x\to a$

Per a $x\to\infty$, tenim el següent ordre d'infinits:

$$\boxed{x^x>>x!>>a^x>>x^p>>(\log_b x)^m \text{ amb } a>1,\ b>1,\ p>0 \text{ i } m>0}$$

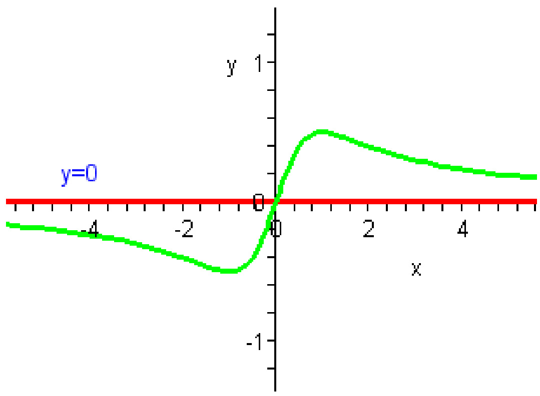
4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+2x^2+3x^6)}{1+x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\left\{\begin{matrix}\text{l'infinit del denominador ès d'ordre}\\ \text{superior al infinit del numerador}\end{matrix}\right\}=0$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2^x}{x^{12}+5x^{20}}=\dfrac{\infty}{\infty}=\left\{\begin{matrix}\text{l'infinit del numerador ès d'ordre}\\ \text{superior al infinit del denominador}\end{matrix}\right\}=\infty$

ASÍMPTOTES

Calculeu l'asímptota horitzontal de la funció $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$, per tant l'asímptota horitzontal és **y = 0**



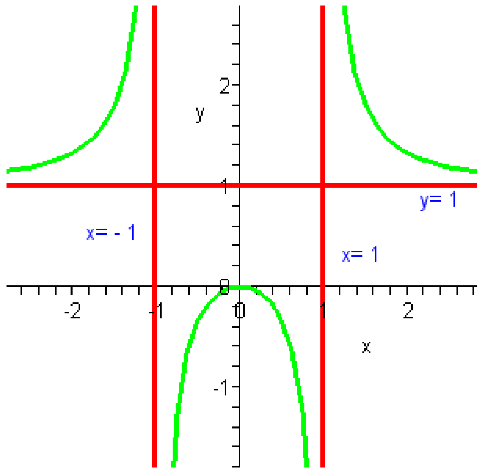
Calculeu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

Asímptota horitzontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1 \Rightarrow$ **y = 1.**

Domini :
$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm1$ per tant el domini és $\Re$–{-1,1}.

Asímptotes verticals (on el denominador valgui 0 i el numerador no)

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2}{x^2-1}=\infty$ i $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2}{x^2-1}=\infty \Rightarrow$ **x =–1** i **x = 1** són asímptotes verticals



Calculeu les asímptotes de la funció $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-8}$**. Calculeu també els seus punts d'intersecció amb els eixos.**

Domini :
$2x^2-8=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm2$ i per tant el domini és $\Re$–{-2,2}.

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-8}=\dfrac{4+2-2}{8-8}=\dfrac{4}{0}=\infty \Rightarrow$ **x = –2** és una asímptota vertical

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-8}=\dfrac{4-2-2}{8-8}=\dfrac{0}{0}=\left\{\begin{matrix}\text{aplicant}\\ \text{Ruffini}\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{2\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2+1}{2(2+2)}=\dfrac{3}{8} \Rightarrow$ no hi ha asímptota vertical

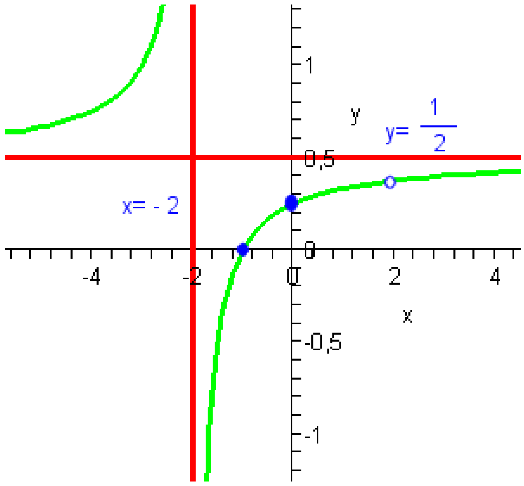
Asímptotes horitzontals

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-8}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ **y = ½** és l'asímptota horitzontal

Per trobar el punt de tall amb l'eix *y*, si és que n'hi ha cal cercar la imatge de x = 0, $f(0)=\frac{-2}{-8}=\frac{1}{4}$, o sigui el punt $\left(0\,,\frac{1}{4}\right)$

Per trobar el punt de tall amb l'eix x, si és que n'hi ha cal cercar lquan f(x) = 0

$\frac{x^2-x-2}{2x^2-8}=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\begin{cases}-1\\ 2\end{cases}$ i com que el punt x=2 no pertany al domini de la funció, l'unic zero de la funció és (-1,0)



Donada la funció $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x-1}$, indiqueu el seu domini, els seus punts d'intersecció amb els eixos i asímptotes.

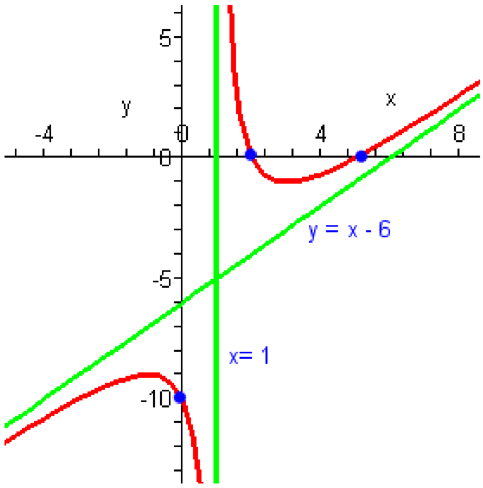
Domini : R - { 1 }

Talls amb els eixos:

Eix OY: Imatge de x = 0, $f(0)=\frac{10}{-1}=-10$, o sigui el punt **(0, -10)**

Eix OX: f(x) = 0

$\frac{x^2-7x-10}{x-1}=0 \Rightarrow x^2-7x-10=0 \Rightarrow x=\begin{cases}2\\ 5\end{cases}$, o sigui, **(2,0)** i **(5,0)**



Asímptota horitzontal: no en té perquè

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+10}{x-1}=\infty$$

Asímptotes verticals:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-7x+10}{x-1}=\frac{4}{0}=\infty$ i per tant existeixi asímptota vertical **x = 1**

Asímptota oblíqua d'equació y= mx + n

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+10}{x^2-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-7x+10}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+10-x^2+x}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-7x+10\cancel{-x^2}+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x+10+x}{x-1}=-6$$

i per tant existeixi asímptota oblíqua d'equació **y = x – 6**