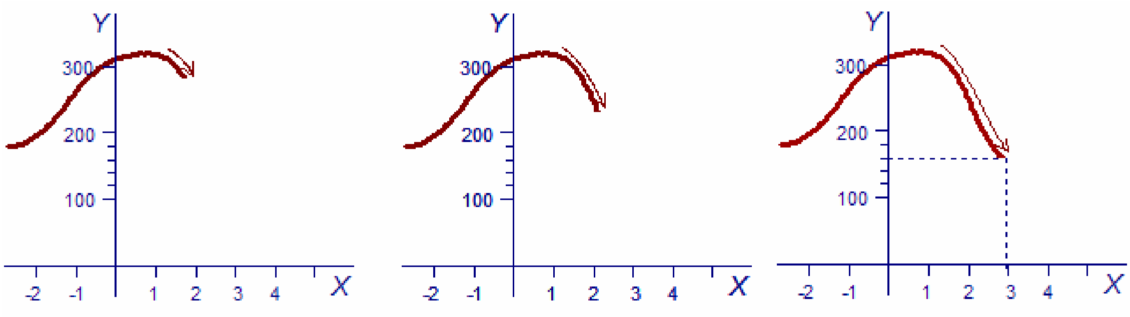
A PROPÒSIT DELS LÍMITS (I d'altres temes relacionats): 1a PART

(Rotllo pel·liculer en tres o quatre capítols... : És que pregunteu, caram!)

Les calculadores gràfiques i els ordenadors dibuixen la gràfica d'una funció fent córrer un punt sobre la pantalla, tal com nosaltres ho faríem amb llapis i paper. Elles calculen les coordenades del punt que genera la gràfica i el situen, i ho fan tan ràpidament que ni tan sols arribem a seguir amb la vista la trajectòria del punt. Si tot fos més lent, potser tindríem temps de respondre preguntes del tipus: *I ara cap on va la gràfica?* (o semblants).



Aquest "ara" pot tenir diferents significats: Podem estar parlant de l'hora actual o, tal com passa amb moltes gràfiques utilitzades en Física i altres ciències, pot ser que el temps sigui la nostra variable independent o "variable *x*"...

Així, en un llenguatge col·loquial, parlant de la gràfica anterior com si fos la gràfica posició temps d'un objecte que es mou, avança i retrocedeix (un passejant, un cotxe), podríem preguntar: *Cap a on s'adreça el mòbil quan ens acostem a les tres (hores)?*

Pel que sembla, s'adreça *al punt situat en la posició marcada com a 160.*

En matemàtiques tenim una forma de dir aquestes coses. En aquest cas, ho diem així:

El límit de la posició del mòbil quan el temps (x) s'acosta a les 3 és (la posició) 160.

Més concretament, però també d'una forma més general: Si ens estiguessin referint a variables arbitràries *y* i *x*, on es suposa que *y* és funció de *x* ($y = f(x)$), hauríem dit que

El límit de y (o de la funció f(x)), quan x tendeix a 3, és 160

I hauríem escrit això en la forma $\lim_{x\to 3} y = 160$ o, encara millor, $\lim_{x\to 3} f(x) = 160$.

Encara ho podem millorar (?), escrivint $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 160$, on $x \to 3^-$ es llegeix "*x* tendeix a 3 per l'esquerra" i representa que *x* s'acosta a 3 però "venint de l'esquerra".

Altrament dit, significa que estem observant valors de *x* pròxims a 3, que s'acosten a 3, però situats sempre "davant" o "a l'esquerra" de 3. Aquesta, en aparença, excessiva precaució, es deu a que encara no hem vist què passa amb el mòbil després de les 3...

I, què pot passar? D'aquí a uns moments farem una mica de "ciencia-ficció"!).

De moment, ens quedem amb aquesta idea:

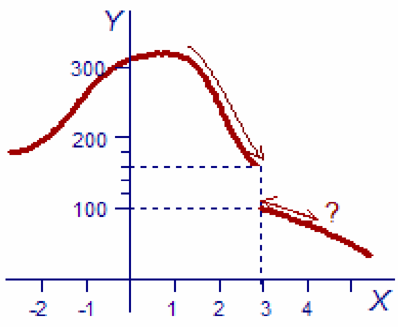
El límit d'una variable subjecta a una altra, quan aquesta altra s'acosta a un valor determinat, seria el valor al qual s'acosta la primera.

La situació se sembla a la d'una típica "persecució" o "seguiment d'un sospitós" (milers d'exemples al cinema!). El sospitós és el mòbil, qui el vigila va informant a la central:

- ***Central? Són pràcticament les tres i, tal com ens pensàvem, el sospitós sembla adreçar-se al número 160 del carrer Four, on creiem que es troba el seu enllaç.***
- ***KGT 07, avisa quan entri... i segueix-lo dins de l'edifici, sense que et vegi.***

- ...
- *KGT 07? KGT 07? Què passa? Ja són les tres i no t'escolto... Ha arribat el sospitós al 160? Ha entrat? És a dins?*
- *Aixoooò.. Central? No us ho creureu.*
- *Què passa ara?*
- *Ja us dic que no us ho creureu.*
- *Vols dir d'una vegada què redimonis passa?*
- *Just a les tres, quan ja era a l'entrada del 160, el sospitós ha desaparegut, s'ha esfumat... Click! Igual que en un truc de màgia! He vist amb els meus propis ulls com es difuminava la seva imatge, com desapareixia... No el veig en lloc, he entrat ràpidament, he mirat dins i fora, vora l'entrada no hi ha portes ni trampes ni cap lloc on es pugui haver amagat, és tal com he dit, ho juro...*
- *Què t'has begut l'enteniment??? Ah, no! Segur que t'has begut alguna cosa més forta, ja! No crec que el teu enteniment sigui prou potent per produir-te al·lucinacions, no! Es pot saber què KXFTÑGXC...!!!*
- *Central, central? Aquí KGT 09, tinc una novetat que comunicar-vos, potser no us ho creureu, però no sé com explicar el que he vist... Central?*
- *Vaja! Un altre! Sí? Què passa, KGT 09?*
- *Estic en un pub en front del 160 del carrer Four, vigilant per si apareixia el sospitós o algun dels seus col·laboradors... Ja he dit que no us ho creureu, però és el que acabo de veure: El sospitós ha aparegut quan quasi bé eren les tres i l'agent KGT 07 el seguia... Semblava que anava a entrar al 160 quan, de sobte, ha desaparegut i, el que és encara més sorprenent!: Immediatament l'he vist com si sortís del portal del número 100 del mateix carrer... però tot això ha passat en un mil·lisegon, o menys... No ha tingut temps material de recórrer l'espai que separa tots dos immobles... És com si...*
- *Merda! Un altre que ha begut! Deu haver acabat amb tota la ginebra i cervesa del pub... Ara resultarà que estem perseguint un extraterrestre amb poders de teletransportació! Com no ens haurem adonat que potser estàvem seguint el capità de la Start Trek? O és el senyor Nimoy... ? Qualsevol dia em faig una jaqueta amb la pell d'aquesta banda de trekes que tenim com a agents! Veiem: ALGÚ HEM POT DIR ON ERA EXACTAMENT EL SOSPITÓS A LES 3 HORES???*
- *Bé, eeeh... – respon KGT 07 - Jo hauria dit que es trobava a l'entrada del 160, però tot va succeir d'una forma tan sobtada que si KGT 09 diu que es trobava al portal del 100, doncs... pot ser, no?*
- *Jo tampoc no garanteixo que a les tres en punt estigués a un lloc o a l'altre, - afegeix KGT 09 - només puc dir que un mil·lisegon abans de les tres era a l'entrada del 160 i, un mil·lisegon després, a la del 100, i tot això, sense que en cap moment el veiéssim recórrer l'espai intermedi (Glups!).*
- *Vaja! Que, definitivament, això és un fenomen paranormal, no? KTRKGÑKXK!!!*

Què ens estan dient amb aquesta conversa? Increïble, no? Gràficament, és com si hagués passat això:



Increïble o creïble, matemàticament ens "limitaríem" a dir, o a escriure:

> ***El límit per l'esquerra de …la posició del sospitós…*** **(o de** ***…la funció que descriu aquesta posició) … per a (o "quan")*** $x = 3$ ***és*** **160** à $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 160$.
>
> ***El límit per la dreta de …la posició del sospitós…*** **(o de** ***…la funció que descriu aquesta posició) … per a (o "quan")*** $x = 3$ ***és*** **100** à $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 100$.

Potser, tal com fa el cap dels "investigadors" us preguntareu: I què passa amb el valor de la funció (la posició del sospitós) exactament per a $x = 3$ (o sigui, a les 3 hores).

Ja em disculpareu si contesto:

- ***I quina importància té, davant d'un fenomen tan estrany? Quina importància pot tenir, vistos els fets, que sigui la posició y = 160, que sigui y = 100 o qualsevol altra (intermèdia o no), o que, senzillament, no considerem cap posició i acceptem que "no existeix y per a x = 3", o "que no existeix f(3)"?)…***

  Canvia això el fet que s'hagi produït aquest misteriós "salt" en la posició del sospitós? ("Salt"? No és així com denominen aquests fenòmens a les sèries de ciencia-ficció? "Salt a l'hiperespai", potser?).

Però aquests fenòmens (possiblement paranormals en una situació com la descrita) no tenen res d'extraordinari ni de paranormal en altres situacions.

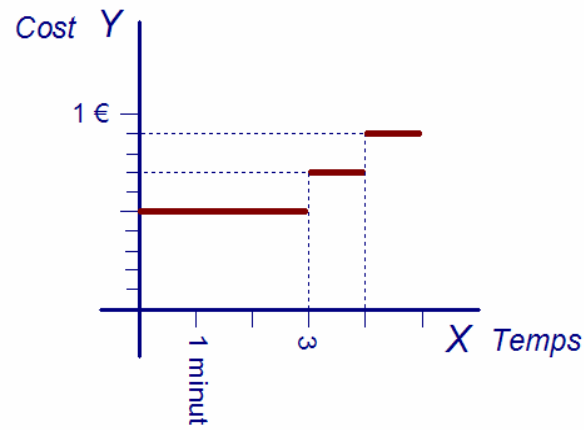
Parlem ara, per exemple, de coses que passen amb els telèfons (on també, amb certes companyies, també passen coses dignes del món dels fenòmens paranormals).

Imagina que truques des d'una cabina i fiques una moneda de 50 cèntims. Depenent del tipus de trucada, amb aquesta moneda pots parlar un cert temps, diguem 3 minuts. Imagina que, un cop esgotats els 3 minuts, cada minut addicional costa 20 cèntims…

Si no dipositem més monedes, en arribar als 3 minuts la trucada s'interromp; si en dipositem més, en arribar als 3 minuts la trucada passarà de costar 50 cèntims a costar 70, "sense continuïtat en el cobrament" (*). En definitiva, aquesta sí és una situació on la funció que descriu el cost de la trucada varia sense continuïtat en arribar als 3 minuts, fent un salt de 20 cèntims. La corresponent gràfica i les formes d'expressar matemàticament aquest "salt" (i "el següent, als quatre minuts") són aquestes:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 0{,}5 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 0{,}7$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 0{,}7 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 4^+} f(x) = 0{,}9$$



Respecte dels valors de $f(3)$ i $f(4)$, és a dir, els costos d'una trucada d'exactament 3 minuts, o d'una trucada d'exactament 4 minuts, podem considerar que, en teoria, han de ser $f(3) = 0{,}5$ i $f(4) = 0{,}7$, tot i que caldrà ser ràpid en penjar!

Però… importa massa, ara, discutir sobre els valors de $f(3)$ i $f(4)$? NO!!!

(*) La continuïtat, parlant de diners, és una utopia, perquè hi ha una unitat mínima, el cèntim, que obliga a que el cost de les coses, per molt que el vulguem afinar, sempre varíï "a salts", com a mínim d'un cèntim; ja saps, però, que sovint es dibuixen gràfiques cost-consum contínues, sense tenir present aquesta observació… i no és considera cap disbarat!

Abans de seguir, cal precisar algunes coses:

Que aquest límits "per l'esquerra" i "per la dreta" s'anomenen *límits laterals*.

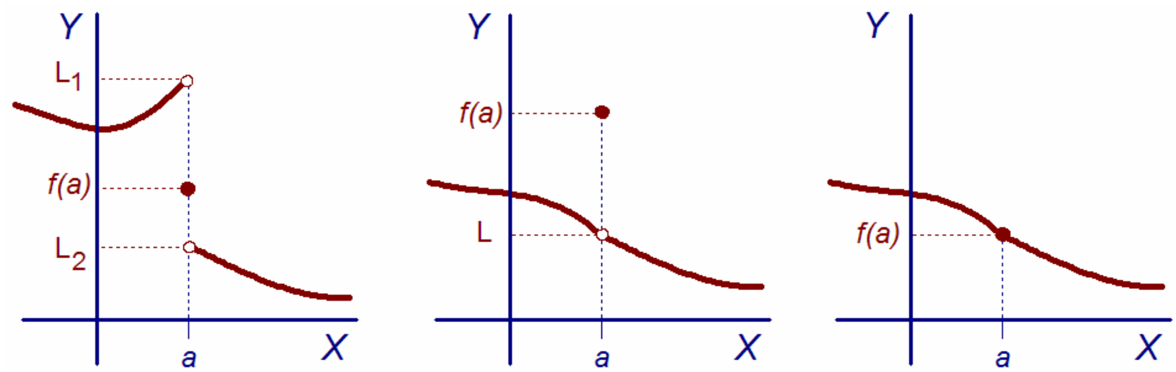
Que el *límit* pròpiament dit només existeix si existeixen els dos límits laterals i són iguals (2a figura).

Que això últim, malgrat sembli que obliga a la funció a ser contínua, no exclou el cas que el valor de la funció no coincideixi amb el valor del límit, perquè el valor del límit es calcula "per a valors pròxims a $x = a$", <u>no exactament per a</u> $x = a$...

I encara podria passar que el valor de la funció en $x = a$ no coincidís amb el valor del límit (2a figura) o, senzillament, que no existís (2a figura, si esborrem el punt de la gràfica que indica el valor de $f(a)$).

Només quan el valors dels límits laterals coincideixen (també, doncs, el valor del límit) i també són coincidents amb el valor de la funció, diem que la funció és *contínua* per a aquell valor de a (3a figura).

Que de tot això tornem a parlar de seguida (Ho dic per si encara no ho enteneu).



$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$ $\lim_{x\to a} f(x)$ no existeix **Discontinuïtat "de salt".** Ni canviant de lloc el valor de $f(a)$ aconseguiríem que la funció fos contínua en $x = a$.	$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$ $\lim_{x\to a} f(x) = L$, però no coincideix amb $f(a)$ **Discontinuïtat "evitable"** (f deixaria de ser discontínua si situéssim $f(a)$ on és L)	$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ **La funció és contínua per a $x = a$** (i també per als altres valors que veiem, és clar)

Ara, però, deixeu-me afegir que allò que ens ha semblat una raresa en el cas d'una gràfica posició-temps "normaleta", no ho és en certes gràfiques de posició descriptives de fenòmens constatats científicament, propis de la física quàntica. I, tal com acabem de veure, la desaparició i aparició sobtades d'una gràfica, fent el que hem anomenat un salt, pot ser un comportament associat a situacions quotidianes prou conegudes.

Des d'un punt de vista "estrictament matemàtic", tenim funcions definides per fórmules molt senzilles que presenten aquest tipus de salts a la gràfica (I ho fan - no sé si atrevir-me a dir-ho - sense avisar!). La més senzilla és la que alguns anomenen "funció signe" perquè

assigna el nombre -1 a tots els nombres negatius (una forma de dir que "els assigna el signe menys")

i assigna +1 als positius (una forma de dir... que "els assigna el signe més")

i al zero, que no es positiu ni negatiu, no li assigna res (Poobreeet!).

La **funció "signe"** és la definida per la fórmula:

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

(Què esperes per comprovar que és cert tot el que s'ha dit sobre els valors de la funció?)

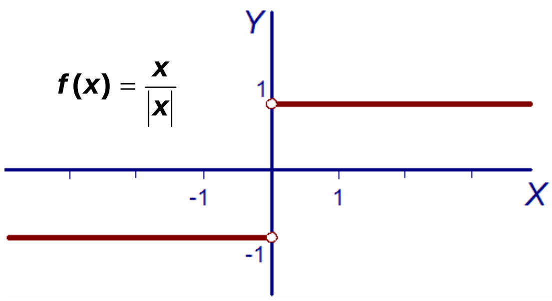
(Ja entens que 0/0 no és cap valor, que potser podria ser "qualsevol valor" o que, precisament per això, no està definit?)

Aquesta és la gràfica de la funció i la forma en que escrivim matemàticament el que passa amb la "discontinuïtat de salt" que presenta per a $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

$f(0)$ no existeix

(Intentem crear la impressió de que $f(0)$ no existeix dibuixant aquestes "rodonetes" al lloc del salt, als extrems de les dues línies que formen la gràfica. Aquest recurs ja l'hem emprat abans, quan s'explicaven els diferents casos que poden donar-se pels valors dels límits laterals, límit, etc.).



Tornem-hi!: Aquest tipus de comportament és "normal" als fenòmens usuals i/o al "món matemàtic" de les funcions definides per fórmules, o no?

Podríem dir que més bé constitueixen l'excepció que no la regla. Veiem: En les funcions definides per fórmules, normalment les gràfiques són contínues, és a dir, "no es trenquen sobtadament" o bé, si ho fan, normalment ho fan en punts aïllats.

I, en aquest casos, evidentment, val aquesta regla (***Primera regla de càlcul de límits***):

> ***Quan la funció és contínua en un punt, el valor del límit de la funció en aquest punt és, simplement, el valor de la funció:***
>
> Si f és contínua en $x = a$, llavors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

I **això vol dir, senzillament, que el valor del límit es calcula substituint en la fórmula de la funció *x* per *a*.** Així, si et demanen el límit de la funció $f(x) = 3 \cdot x + 5$ per a $x = 3$, com que prou saps que la gràfica d'aquesta funció és una recta i, per tant, és <u>contínua</u> en tots els punts, et "limitaries" a fer

$$\lim_{x \to 3} (3 \cdot x + 5) = 3 \cdot 3 + 5 = 14$$

si de cas afegint "perquè la funció és contínua per a $x = 3$".

Quan la funció deixa de ser contínua en un punt, el valor de la funció (si existeix, perquè també pot ser que no existeixi) no és el valor del límit. Això ja l'hem vist als exemples de la pàgina anterior. És en aquest casos quan, per calcular el valor del límit, hem de fer coses certament curioses, que ja anirem explicant.

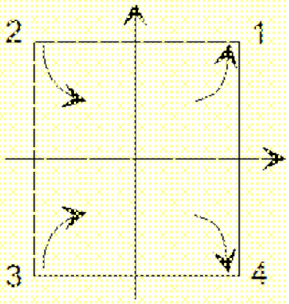
A PROPÒSIT DELS LÍMITS (I d'altres temes relacionats): 2a PART

(Continua la pel·lícula: Un altre rotllo!)

Ja que varem acabar la primera part d'aquesta pel·lícula parlant de funcions contínues, convindria fer un breu recordatori de quines de les funcions ja estudiades a cursos anteriors són contínues, o bé "en quins punts" ho són! Us invito a buscar les seves gràfiques en un llibre o programa que pugui generar-les (*Funcions i gràfics*, a la pàgina http://xtec.net/~smanriqu/ és un programa excel·lent d'un professor d'aquest departament; us aconsello instal·lar-lo... potser el farem servir).

Fem un recordatori de coses que ja hauries de saber:

1. Les *funcions polinòmiques* (tipus $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$) són contínues.



"Per guanyar temps", també et convé saber que:

La gràfica d'una funció polinòmica de grau *n*, a partir de *n* = 2, és una corba *contínua* que, *com a màxim*,

té $n - 1$ extrems (màxims o mínims)

i canvia de sentit de gir $n - 2$ vegades.

A més,

si el grau és *parell*, la gràfica «entra i surt del paper per la part superior» (per 2 i 1), o bé per la part inferior (3 i 4).

si el grau és *senar*, la gràfica «entra per la part superior i surt per la part inferior» (2 i 4), o a l'inrevés (3 i 1).

2. Les gràfiques de les *funcions racionals* (quocient de polinomis, tipus $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ on $A(x)$ i $B(x)$ són polinomis) són corbes contínues, *excepte per a aquells valors de x als quals s'anul·la el denominador* (Si n'hi ha!).

A més,

si el grau del numerador és igual o menor que el del denominador, la gràfica «entra i surt» del paper aproximant-se a una recta horitzontal

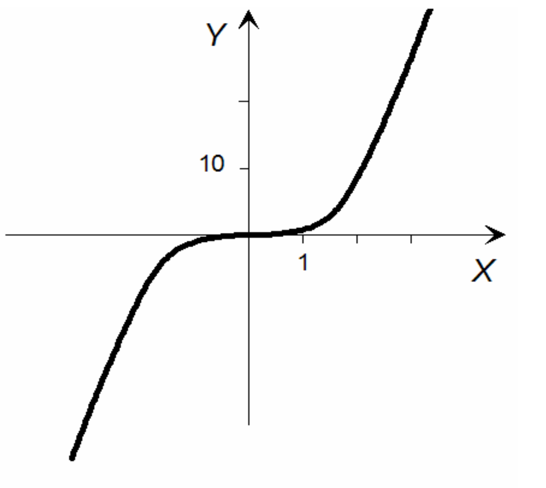
si el grau del numerador és major que el del denominador, la gràfica «entra i surt del paper» (mireu l'esquema de l'apartat anterior)

del costat 2 al 1, o del 4 al 3, si la diferència de graus és *parella*,

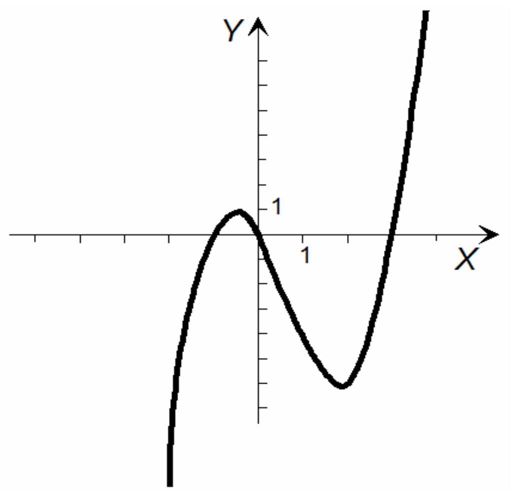
del 2 al 4, o del 3 al 1, si és *senar*

Estudieu amb atenció els exemples gràfics de la pàgina següent, que us serviran per constatar la validesa de les regles enunciades.

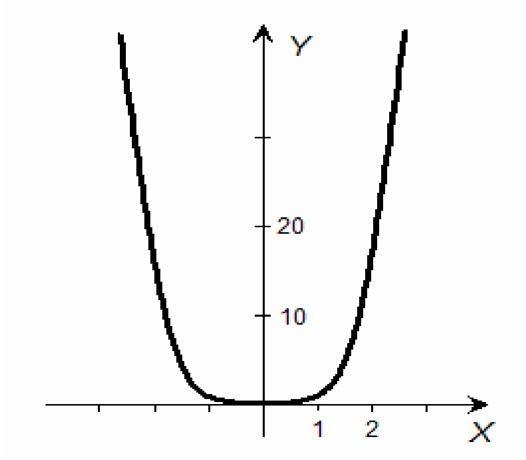
Podeu dibuixar-vos i manipular vosaltres mateixos aquestes funcions amb el programa citat abans, si us l'heu baixat.



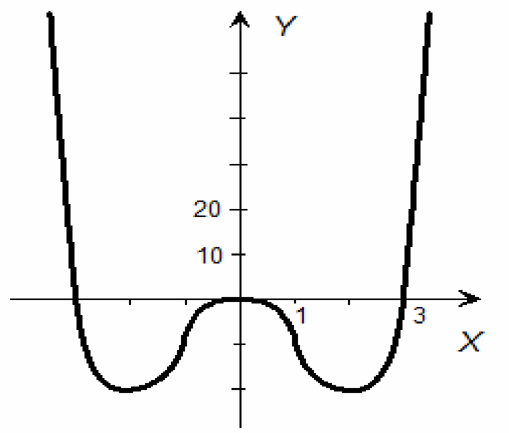
Funció $y = x^3$, la més senzilla de totes les funcions polinòmiques de 3r grau.



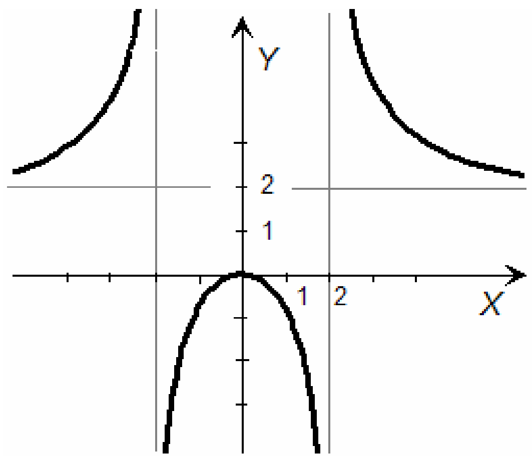
Funció $y = x^3 - 2x^2 - 3x$, una altra funció de tercer grau, més complexa.



Funció $y = x^4$, la més senzilla de totes les funcions polinòmiques de quart grau

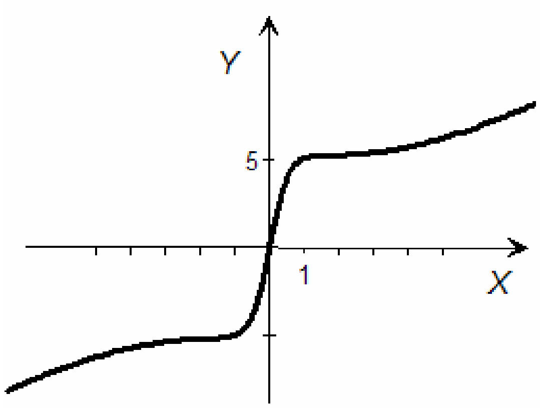


Funció $y = x^4 - 9x^2$, una altra funció de quart grau, més complexa.



Funció $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$

Denominador s'anul·la quan $x = \pm 2$. Numerador i denominador d'igual grau



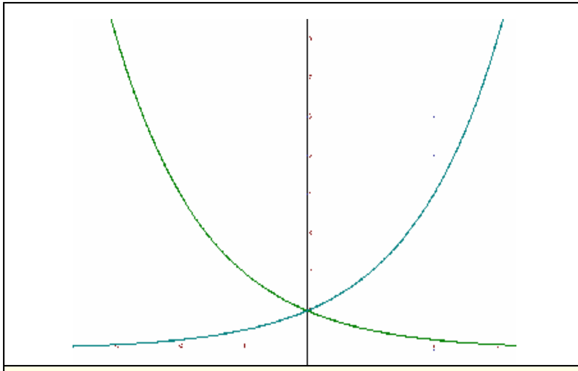
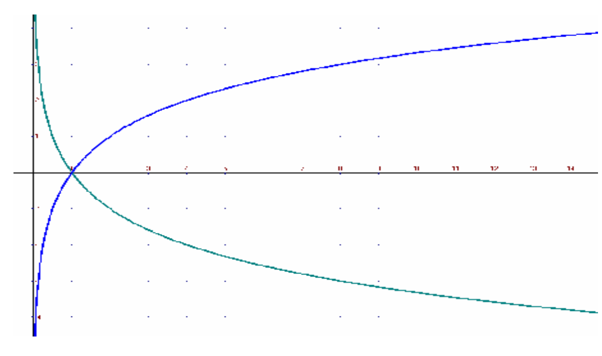
Funció $y = \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 + 1}$

El denominador mai no s'anul·la. Numerador de grau superior al del denominador

Encara convé recordar coses sobre altres tipus de funcions “importants”:

3. Les ***funcions exponencials*** (funcions tipus $y = a^x$) i les seves recíproques, les ***funcions logarítmiques***, són contínues (Gràfiques més endavant). Recordeu, però, que les logarítmiques només estan definides per a valors de x positius.

4. Les ***funcions trigonomètriques*** ***sinus*** i ***cosinus*** són contínues, mentre que la funció ***tangent*** té discontinuïtats, concretament, per als següents valors de x : $\pm\pi/2$, $\pm3\pi/2$, $\pm5\pi/2$... (recorda que són valors mesurats en radians, en graus correspondrien a ±90°, ±270°, ±450°..., però mai no es fan servir graus en les funcions trigonomètriques, sinó radians!). Aquestes, ara, no les dibuixaré.

	
Exponencials 2^x i $(1/2)^x$	Logarítmiques de bases 2 i 1/2

I ara us parlaré novament de les ***discontinuïtats***, començant per les que sovint es presenten en les funcions racionals:

Hem dit que en les funcions racionals apareixen discontinuïtats quan s’anul·la el denominador. I la més senzilla de les funcions racionals és, potser, $f(x) = \frac{1}{x}$, el denominador de la qual s’anul·la per a $x = 0$. Procuraré explicar què passa per a aquest valor de x, i per què, d’una forma “col·loquial” o “pel·liculera”.

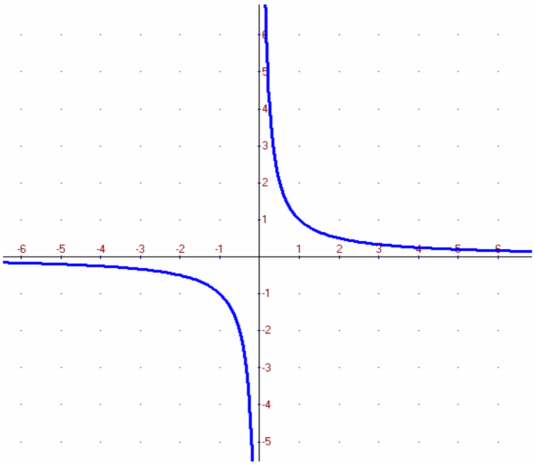
Perquè tots haureu vist alguna pel·lícula “d’epidèmies”, on un virus terrible ataca centenars de milers de persones, mentre l’heroi de la pel·lícula passa mil aventures per trobar l’antídot i, quan ja el té (aproximadament un quilo) l’injecta a tots i queden com si s’haguessin sotmès a un tractament complet de cirurgia estètica, tot i que unes hores abans se’ls queia la pell a tires (Penseu que exagero?).

La part menys exagerada de l’argument potser sigui el fet de que es puguin salvar centenars de milers d’afectats amb un quilo d’antídot. No és cap exageració: Pensa que pot haver-hi prou amb 5 mil·ligrams d’antídot per a què el cos generi els anticossos que el curin, i que 1 kg = 1000 g = 10^6 mg o 5 mg = $5\cdot10^{-6}$ kg = 0’000005 kg. De manera que un quilogram d’antídot, repartit en dosis de 0’000005 kg, permet curar a

$$\frac{1}{0'000005} = 200000 \text{ persones}$$

Aquest càlcul mostra que els resultats de dividir un nombre fix (no nul) per quantitats pròximes a zero són nombres molt grans. Dic més: Quant més petites fem les quantitats per les quals dividim (les “dosis”), més i més gran surt el resultat de la divisió (...més i més afectats podem tractar... mentre la dosi encara sigui suficient, és clar!).

Així, $\frac{1}{0'000005} = 200000$, $\frac{1}{0'0000005} = 2000000$, $\frac{1}{0'00000005} = 20000000$, etc.



Això explica per què la gràfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, en acostar-se el valor de x a zero, pren valors cada vegada més i més grans (Veieu-la).

Bé: Exactament, això passa "a la dreta" del zero, és a dir, per a valors positius de x. A l'esquerra, en ser negatius els valors de x, *els resultats de la divisió, en lloc de ser positius, són negatius "enormes".*

Observeu una altre aspecte interessant d'aquesta gràfica: Que, en augmentar el valor de x, els valors de y es fan cada vegada més i més petits... Suposo que estareu mirant a esquerra i a dreta, no estareu mirant prop del zero, ara! Sí? Val? Penseu en quina lògica té això (Fàcil!).

El que passa amb la gràfica d'aquesta funció quan x tendeix a zero s'expressa dient que té ***límit infinit***. Així, doncs, tenir límit infinit vol dir que els valors de y en la gràfica, em lloc d'apropar-se a un valor determinat de y , els va superant tots sense aturar-se (imagina ara la guàrdia civil de tràfic, o els mossos, darrera... PI-PIIP, PI-PIIP, PI-PIIP,...).

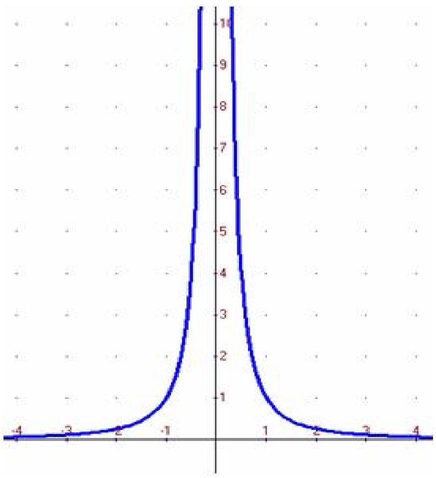
El símbol per representar "infinit" serà ∞.

De fet, podríem ser molt punyeters i escriure exactament que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

i "posar pegues" a l'expressió $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

però també s'admet escriure $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ o $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$ sense més històries.



On no ens haguéssim plantejat aquestes punyeteries seria en el cas de la funció $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on no cal discutir pels signes, ja que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

sense cap dubte (veieu la figura).

En tots dos casos diem que *les dues funcions tenen una discontinuïtat asimptòtica quan x=0, de branques divergents la primera, i de branques convergent la segona.*

Seguint amb pel·lícules, ara va de Juràssic Park (o de l'Aquàrium del Maremàgnum si parlem d'un altre tipus d'espectacle): Mai no heu vist un animalot engabiat (un dinosaure, una foca...) que, com que sap que té davant una tanca o un vidre que no pot tocar ni travessar, corre o neda angoixat, quasi paral·lel a la tanca/vidre, com si volgués acostar-s'hi més i més, però sense arribar mai a tocar-la?

Si l'heu vist, això és el que sembla que facin les branques de la gràfica quan x s'acosta a zero: La tanca seria la recta $x=0$ (altrament dit, l'eix OY), que rep el nom d'*asímptota vertical* de la funció. En general,

> ***Una asímptota vertical en la gràfica d'una funció és un recta paral·lela a l'eix OY, per a un valor de x (x = a), a la qual s'acosta la gràfica de la funció sense arribar a tocar-la, a mida que x s'acosta a a.***
>
> ***Conseqüentment, per a aquest valor de x la funció té el que anomenem una discontinuïtat asimptòtica, alhora que escrivim*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.
>
> ***Les asímptotes verticals i discontinuïtats d'aquest tipus solen aparèixer als punts on a la fórmula de la funció surt una divisió per zero (k/0, amb*** $k \neq 0$ ***).***

Aquí tens uns exemples comentats d'aquest tipus de discontinuïtat, que t'aconsello de representar amb el programa esmentat abans:

Si et demanen d'inventar una funció discontínua per a $x = 3$, escriu una fórmula amb denominador $x - 3$, ja que $x - 3$ s'anul·la per a $x = 3$ (Això sí!: Procura que el numerador no s'anul·li també en aquest valor!). Si uses un denominador més complex, que també s'anul·li per a altres valors, tindràs més discontinuïtats, a part d'aquesta. Així, per exemple,

$f(x) = \dfrac{4}{x-3}$ **té una discontinuïtat asimptòtica per a $x = 3$,**

també $f(x) = \dfrac{-x}{(x-3)^2}$ **(però aquesta és de branques convergents).**

també $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$ **(però té una altra per a $x = -3$... pensa per què)**

Si vols una funció amb dues discontinuïtats asimptòtiques, per a $x = 1$ i $x = 4$, agafa una funció racional amb denominador $(x-1)\cdot(x-4) = x^2 - 5x + 4$, que s'anul·la per a aquesta valors de x: Per exemple, $f(x) = \dfrac{24}{x^2 - 5x + 4}$ serviria.

Només uns comentaris finals per acabar amb aquest segon rotllo de la pel·lícula:

Si a partir d'ara t'acostumes a dir que $\dfrac{1}{0} = \infty$ o que $\dfrac{k}{0} = \infty$ (sempre que k no sigui zero... ja veurem per què!), no tinc res a dir mentre et "limitis" a emprar aquesta regla <u>única i exclusivament en el càlcul de límits</u>, <u>mai en el càlcul normal de valors d'una funció!</u>

Quedi clar, doncs, que si com a resultat d'aplicar la fórmula d'una funció per a un valor de x ens apareix $k/0$ direm sempre que <u>la funció no està definida o no existeix per a aquest valor de *x*...</u> Una altra cosa, "diferent", és que a continuació diguem que "<u>el límit de la funció per a aquest valor de x és infinit</u>".

Expressions tals com $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ (amb L "valor numèric") i $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ representen coses ben diferents (Això està clar, en el primer cas la funció s'acosta a un nombre L, en el segon cas no s'acosta a cap nombre, "passa de tots"...). Justament per això, encara hem de fer algunes precisions pel que fa a l'ús precís de la paraula "límit", però... tot arribarà!

A PROPÒSIT DELS LÍMITS (I d'altres temes relacionats): 3a PART

(Alguns mai més tindran ganes de preguntar...)

La regla $\frac{k}{0} = \infty$ ha estat la nostra primera regla del que anomenarem ***càlcul simbòlic de límits***: No és exactament una regla de *càlcul numèric* (entre d'altres coses perquè, tal com no em cansaré de repetir, en el càlcul numèric no existeix la divisió per zero).

En aquesta regla, ni *k* vol dir "valor *k*" ni 0 vol dir "valor 0", perquè no necessàriament parlem de valors <u>fixos</u> (segur que no en el cas del zero!), sinó de

$$\frac{\text{valors que s'acosten a } k}{\text{valors que s'acosten a } 0}$$

En efecte: Com que estem mirant de resoldre un cas de <u>càlcul de límits</u>, ens referim a un numerador i un denominador <u>variables</u>, que canvien de valor segons *x* s'aproxima a un determinat valor *a.*

D'una forma intuïtiva, la regla $\frac{1}{0} = \infty$ ve a dir-nos que "el valors resultants de dividir quantitats cada cop més pròximes a 1 per quantitats cada cop més pròximes a 0 són cada vegada més grans, podent arribar a depassar qualsevol quantitat, per gran que sigui" (Això últim és una correcta interpretació del que significa "infinit": Variable que depassa valors tan grans com es vulgui).

Tan de bo aquesta "intuïció" sigui suficient per a que endevineu altres regles del càlcul simbòlic amb límits... Comencem per alguns exemples breument comentats:

$\infty \cdot 3 = \infty$	Si els valors d'una variable que tendeix a infinit els multipliquem per 3, la variable obtinguda també tendeix a infinit ("Tres vegades més ràpida"?).

$\infty / 3 = \infty$	Si els valors d'una variable que tendeix a infinit els divideixen per 3, la variable que s'obté també tendeix a infinit ("Tres vegades més lenta"?).

$\infty \pm 3 = \infty$	$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{4}{\infty} = 0$
$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\infty^3 = \infty \cdot \infty \cdot \infty = \infty$	$\infty^{-3} = \frac{1}{\infty^3} = \frac{1}{\infty} = 0$	$\sqrt[n]{\infty} = \infty$
$2^{+\infty} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots = \infty$	$2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$	$0'5^{+\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots = 0$	$0'5^{-\infty} = 2^{+\infty} = \infty$
Cal fer comentaris?			

Malgrat que tot el que acabem de dir sembla fàcil, potser no ho és tant. Ni que sigui per obrir un debat: Què penses que poden ser $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$ i $\frac{0}{0}$?

Encara resultarà que no és el que sembla! Per exemple, i començant per l'últim cas, observa que:

Pot semblar que $\frac{0}{0}$ ha de ser 1, exactament igual que $\frac{k}{k}=1$, però no oblideu que en el càlcul numèric $\frac{0}{0}$ no té cap sentit (o sí?), mentre que en el càlcul de límits representa *la divisió de dues quantitats variables que s'acosten a zero.*

Posem per cas que aquestes variables són x i (altre cop) x, quan x s'acosta a zero... però, llavors, x/x sempre val 1, per la qual cosa podem dir que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

i així tenim un exemple de com $\frac{0}{0}$ pot ser 1.

Però les variables podrien ser x i $2x$ quan $x \to 0$; llavors, segons com féssim la divisió,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to 0} 2 = 2 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

O podrien ser x i x^2 quan $x \to 0$; llavors, depenent també de com fem la divisió,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Així que, pel que sembla, $\frac{0}{0}$ *pot ser qualsevol cosa.* Justament per això, diem que aquest cas és *indeterminat* o que és una ***indeterminació*** (i passa el mateix amb els altres tres casos esmentats, però... ja parlarem!). De moment, sàpigues que

> Si, en intentar calcular un límit, arribes a un punt on apareix una ***indeterminació***, sàpigues que no pots donar el resultat, perquè, tal com està plantejat el càlcul, el resultat pot ser qualsevol cosa.
>
> Per tant, has de replantejar el càlcul, exactament igual que et replantejaries el camí a seguir en un laberint si arribessis a un lloc sense sortida: Tirant enrere fins arribar a una de les cruïlles que has deixat enrere i provar un altre camí! (O, "si acabes d'entrar", buscant una alternativa a la forma d'escriure l'expressió algebraica que tens davant).

Un exemple: La primera idea que ens passa pel cap si ens demanen calcular $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$ és substituir (potser pensant que, en principi, la funció pot ser contínua en $x = 2$), però de seguida ens adonem que el denominador s'anul·la.

Això tampoc té per què preocupar-nos massa, ja que només indica que pot ser una divisió per zero, "un infinit"! Però, tampoc és això!: És, justament, el cas indeterminat (o "prohibit") $\frac{0}{0}$, ja que el numerador també s'anul·la: $2^2 - 7{\cdot}2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$.

No és correcte escriure $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$ perquè "és el mateix que no dir res..."; però, tampoc podem tirar enrere perquè, realment, no hem fet res amb l'expressió!

Si estem desperts, recordarem que quan les expressions polinòmiques s'anul·len per a un valor $x = a$ significa que es poden dividir per $x - a$. En aquest cas, significa que la fracció es pot simplificar dividint numerador i denominador per $x - 2$… Fem-lo!

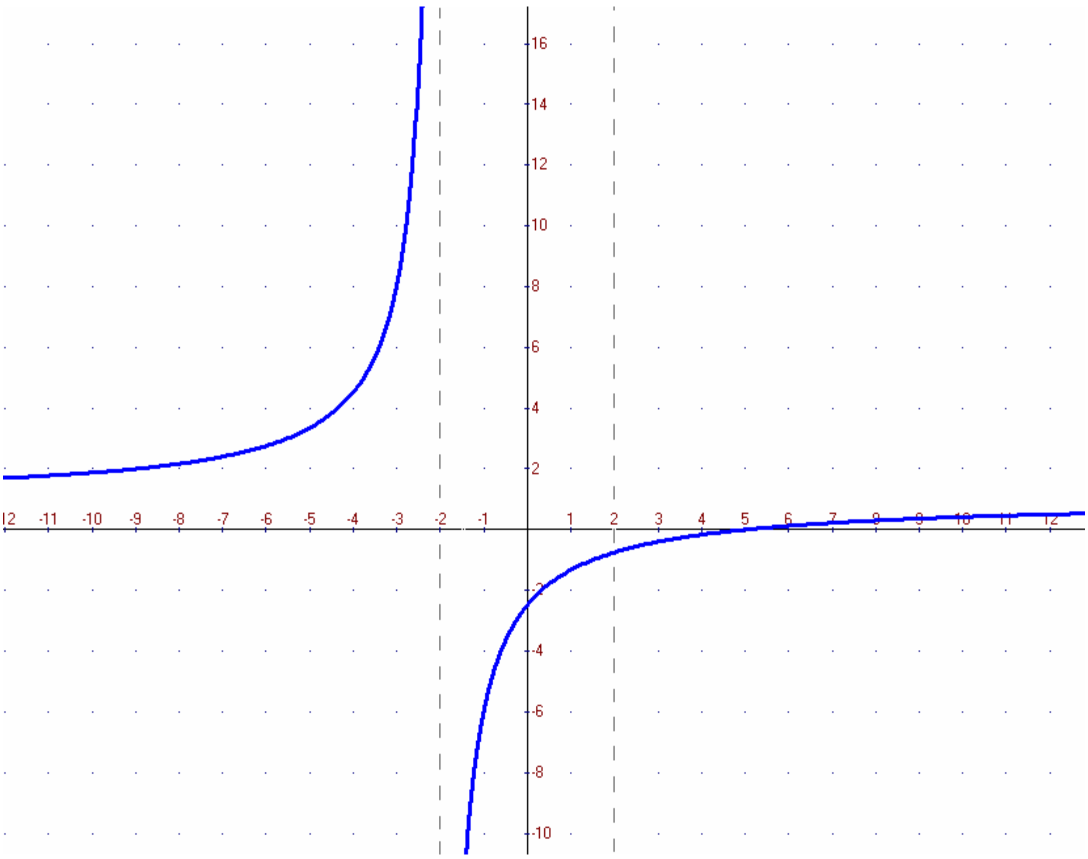
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}\overset{0/0}{\overset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-7x+10\right):(x-2)}{\left(x^2-4\right):(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-5}{x+2}=\frac{2-5}{2+2}=-\frac{3}{4}$$

I ja està calculat el límit! Observa el detall d'indicar sobre el primer símbol igual quina indeterminació apareix si s'intenta fer el càlcul directe: És com un "avís" o "una senyal de tràfic" per als que puguin venir darrera… sí? Fes-ho així quan calculis límits.

Aprofitem aquest exemple d'indeterminació 0/0 (concretament, la funció que ens ha servit exemple) per "rematar" ja el concepte de límit, del que encara ens quedava per dir algunes coses:

A la fórmula de la funció ja veiem que el denominador se anul·la en dos casos: Per a $x = -2$ i per a $x = 2$. Per a aquests valors de x la funció no existeix! És a dir, no existeixen ni $f(-2)$ ni $f(-2)$: Si voleu, ja podeu "plantar" una barrera vertical per a aquests valors de x (una línia a ratlles, per exemple) i ja heu de saber que la gràfica de la funció no pot tocar aquesta línia, perquè no existeixen valors de y per a aquests valors de x.

La sorpresa ve quan li demanem a un programa gràfic que dibuixi aquesta funció. S'obté el següent (Atenció!: Les ratlles verticals les hem posat nosaltres, preveient que per als valors de x ja indicats, no existeix cap valor de x).

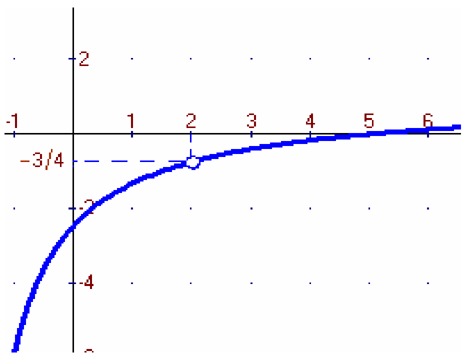


La sorpresa consisteix en què la gràfica sembla passar pel punt $x = 2$, $y = -3/4$, tot i que ja havíem dit que $x = 2$ no tenia imatge. És a dir, sembla travessar la "barrera" $x = 2$, que havíem anunciat com a "infranquejable"!

Però només ho sembla. M'explico: La realitat és, tal com ja he dit, que $f(2)$ no existeix (0/0 no existeix), i el valor del límit, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = -\frac{3}{4}$, indica que, quan $x \to 2$, els valors de *y* s'acosten a -3/4… però en arribar a *x* = 2 … PUF! La gràfica <u>perd un punt, perd "aquell punt"</u>!

I, naturalment, com un punt és tan petit que no es veu, a la gràfica no veiem el que realment passa, i sembla contínua!

I, si volem que es vegi, hem de ser nosaltres els que, en aquests casos, dibuixem una "rodoneta" al punt (2,-3/4) (i traiem la recta vertical perquè a *x* = 2 no hi ha cap asímptota; deixem l'altra, la de *x* = -2, on sí hi ha discontinuïtat asimptòtica):



I diem que, per a $x = 2$,

$f(2)$ no existeix

$\lim_{x \to 2} f(x) = -3/4$

La gràfica presenta una ***discontinuïtat evitable*** (perquè es podria evitar "obligant" que 2 tingui imatge -3/4, és a dir, fent $f(2)$ = -3/4, que equival a afegir el punt (2,-3/4) a la gràfica).

(I la pel·lícula? Aquestes discontinuïtats són com aquells forats petitíssims a les canonades, que no es veuen però s'escolten: PFFF… i provoquen una "fina pluja")

Ara és el moment de fer unes precisions respecte de l'ús correcte de la paraula ***límit***:

Només quan el límit existeix i <u>és un nombre</u> (no quan "és infinit"), com és el cas de l'últim exemple per a *x* = 2, podem dir que "la funció té límit en aquest punt". Aquets tipus de límit també s'anomena ***límit finit***, en contraposició amb l'altre.

El cas "límit infinit", com el cas de l'últim exemple per a *x* = -2, no és un cas de límit pròpiament dit; és a dir, si ens demanessin "rigor" en el llenguatge, hauríem de dir que la funció "no té límit pròpiament dit per a *x* = -2", o que "el límit no és un nombre", que "és una cas de límit infinit o discontinuïtat asimptòtica".

I, fetes aquestes precisions i, si us atreviu, què millor que una taula completa de ***regles de càlcul amb límits*** (regles "simbòliques")? Això sí!: Amb indicació de les <u>SET indeterminacions</u> existents, seguida d'alguns exemples aclaridors del que són les indeterminacions, perquè ho són i "com esquivar-les"… (Fantàstic, no?)

De la suma i de la resta	$\infty \pm k = \infty$	
	$\infty + \infty = \infty$	$\infty - \infty$ **és INDETERMINACIÓ**
	$-\infty - \infty = -\infty$	

Del producte i del quocient	$\infty \cdot k = \infty$	$k \cdot 0 = 0$	$\infty \cdot 0$ **és INDET.**
	$\frac{\infty}{k} = \infty$	$\frac{k}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{\infty}$ **és INDET.**
	$\frac{0}{k} = 0$	$\frac{k}{0} = \infty$	$\frac{0}{0}$ **és INDET.**

K representa un nombre <u>diferent</u> de zero

De les potències	$a^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } a < 1 \end{cases}$	1^{∞} **és INDET.**	$0^{\text{positiu}} = 0$	$0^{+\infty} = 0$	0^0 **és INDET.**	$\infty^{\text{positiu}} = \infty$	∞^0 **és INDET.**
			$0^{\text{negatiu}} = \infty$	$0^{-\infty} = \infty$		$\infty^{\text{negatiu}} = 0$	

- **És fàcil imaginar per què diem que $\infty - \infty$ és una indeterminació.**

  Dit seriosament: La diferència o distància entre dues variables que van a l'infinit es pot mantenir, reduir, augmentar... depenent de les seves "velocitats" relatives (disminuirà si la segona aconsegueix una velocitat "lleugerament superior a la de la primera", es mantindrà si mantenen la mateixa velocitat, augmentarà fins a fer-se infinita si la primera porta doble, triple... velocitat que la segona...).

  Dit en pla "pel·liculer": Mai no heu vist les persecucions "a tota pastilla" de tantes i tantes pel·lícules? Els bons (que van darrera) sempre acaben agafant els dolents (que van davant); però, que passaria si els dolents fossin més ràpids que els bons, o si tots dos mantingueren la mateixa velocitat...? (Per a què la "sensació d'infinit" sigui "real", penseu en naus interestel·lars a velocitats superlumíniques).

  Dit <u>molt</u> seriosament: Veiem exemples de $\infty - \infty$ amb resultats diferents.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x}\right) \overset{\infty-\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right) \overset{\infty-\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} 0 = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) \overset{\infty-\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x} \overset{0/0}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

  Els resultats proven que és un cas d'*indeterminació* perquè el valor del límit depèn de les fórmules emprades "per a cada infinit" i no tan sols de "la forma" del càlcul.

  És interessant observar que la resolució de la indeterminació passa per fer operacions amb les fórmules que apareixen, com a resultat de les quals pot desaparèixer la indeterminació, pot "canviar-se" per un altra (al tercer exemple es canvia per una del tipus 0/0), fins que finalment, sovint com a conseqüència d'una simplificació, desapareixen les indeterminacions i es troba el valor del límit.

- **En general, les indeterminacions sempre provenen de casos entremitjos entre "formes" que tenen solucions diferents. Així, per exemple, $0\cdot\infty$ seria el cas entremig entre $\infty\cdot k = \infty$ i $k\cdot 0 = 0$. Recordo novament que en l'expressió $0\cdot\infty$ el zero no és tal, és <u>una variable que s'apropa a zero</u>, i és de tot punt lògic que el producte d'una quantitat "cada cop més minúscula" per una altra "cada cop més gran" pot comportar-se de formes ben diferents, segons que "tingui més força" la variable que tendeix a zero, o la que tendeix a infinit. I no té per què prevaler la regla "la multiplicació per zero és zero", perquè no parlem del <u>nombre</u> zero!**

  I, per si no ho acabes d'entendre, van uns exemples (aquest cop, molt senzills):

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) \overset{0\cdot\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} 1 = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{4}{x}\right) \overset{0\cdot\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} 4 = 4$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\frac{1}{x}\right) \overset{0\cdot\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1}{x^2}\right) \overset{0\cdot\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

- **Si per un moment t'ha semblat estranya la indeterminació $0\cdot\infty$ espero que ja t'hagis convençut que ho és i per què ho és. Suposo que encara et semblaran més estranyes les tres últimes (les indeterminacions exponencials) perquè la temptació de dir que $1^\infty = 1$, o que $\infty^0 = 1$, o que $0^0 =$ (què?) és molt forta, no?**

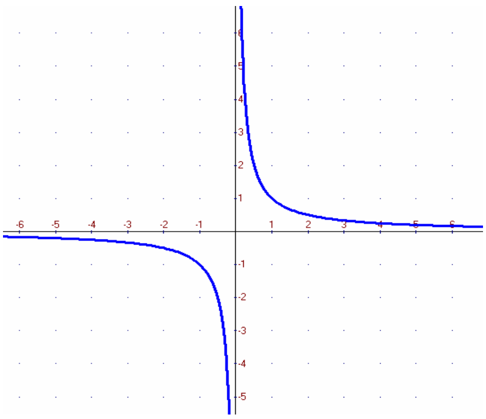
  De moment, queda't amb la notícia de que són indeterminacions, ja parlarem... Bé: Per ara només parlarem de la 1a, però això ja serà en el quart i últim capítol.

A PROPÒSIT DELS LÍMITS (I d'altres temes relacionats): 4a PART

(No és que m'hagi tornat boig: Ja ho era!)

A més del *límit d'una funció en un punt*, existeix un altre tipus de límit que has de conèixer: El *límit d'una funció en el infinit* (que pot ser en $-\infty$ o en $+\infty$).

Comença per recordar un comentari que varem fer sobre l'aspecte de la gràfica de la funció $f(x) = 1/x$ per a valors cada vegades més grans de x (o sigui, tal com anem seguint la gràfica d'esquerra a dreta i sortim del paper). Concretament, la gràfica s'acosta a l'eix OX, i això s'explica pel fet que els valors de y s'acosten a zero.



Aquest comportament el descriurem dient que "el límit de la funció quan x tendeix a més infinit és zero" (i passa el mateix si fem el recorregut amb la vista de dreta a esquerra, sortint del paper per la banda esquerra, cas que correspondria a un límit en "menys" infinit). I escriurem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

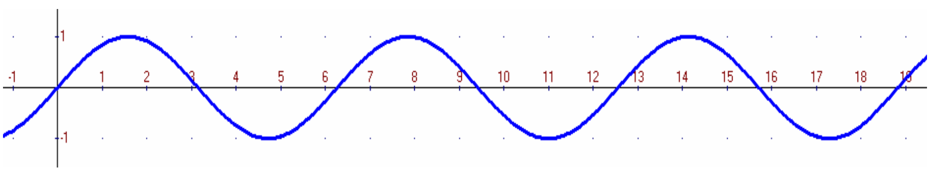
El fet que la gràfica s'acosti més i més a la recta horitzontal $y = 0$ (eix OX) s'expressa dient que la tal recta és una *asímptota horitzontal* de la gràfica de la funció.

Amb això ja hem vist dos dels tres tipus d'asímptotes que pot tenir una funció. Faltaria parlar de les asímptotes obliqües, però això ho podeu estudiar al llibre.

Un advertiment: Potser tens la idea de que la gràfica d'una funció no pot "tallar" les asímptotes. Això és cert per a les asímptotes verticals, degut a que apareixen en punts on la funció no està definida (i si algú vol definir-la donant un valor aïllat, tampoc no aconseguirà que la gràfica "talli"... serà un afegit "inútil"!). Doncs, bé: La gràfica pot tallar una asímptota vertical, fins i tot infinites vegades (Pel·lícula: La gràfica, com una anaconda, mirant d'escanyar l'asímptota, estrenyent-la més i més...).

Exemple: Una funció que fa això últim amb la seva asímptota horitzontal és $\dfrac{\sin x}{x}$.

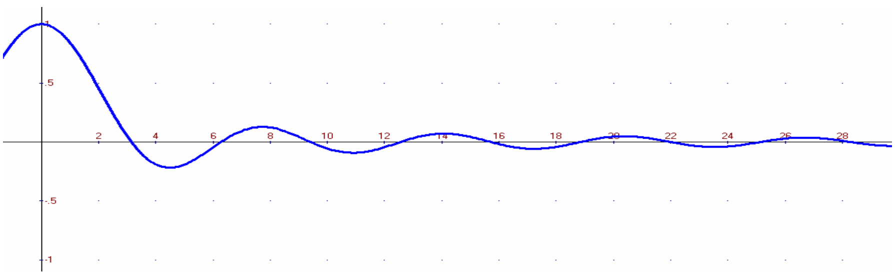
Prou saps que la gràfica de la funció $\sin x$ oscil·la entre -1 i +1 quan x tendeix a infinit, (i justament per això $\sin x$ no té límit quan $x\to\infty$). De les desigualtats $-1\le \sin x\le 1$ és dedueix que $\dfrac{-1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ i, d'aquestes, que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$, igual que els límits de $\dfrac{-1}{x}$ i $\dfrac{1}{x}$)



Gràfica de $\sin x$

$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$

no existeix



Gràfica de $\dfrac{\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

Les funcions racionals amb numerador i denominador del mateix grau sempre tenen asímptotes horitzontals. És fàcil provar que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \dfrac{a_n}{b_n}$ i, per això, la recta $y = a_n / b_n$ és asímptota horitzontal de la funció. Un exemple!:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} \overset{\infty/\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

Observa que "ens traiem de sobre" la indeterminació $\dfrac{\infty}{\infty}$ dividint numerador i denominador per la potència de major grau que tenen en comú, i en el lloc dels infinits apareixen nombres que ens donen el valor del límit. Aprèn a fer-ho en casos similars.

A la pàgina 7 està la gràfica d'aquesta funció, amb l'asímptota horitzontal ja marcada. Només que ara, amb el que s'ha dit, ja saps que en té i quina és, abans de dibuixar-la.

Altres coses que pot fer la gràfica d'una funció quan x tendeix a infinit: Pot succeir que els valors de y vagin augmentant de valor "sense barreres" (en "positiu" o "en negatiu", segons el qual es dirà que tenen límit "més infinit" o "menys infinit"). Això és el que passa amb les funcions polinòmiques de grau no nul, ja que, en general, $\lim\limits_{x\to\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) = \pm\infty$, segons que a_n sigui positiu o negatiu. També passa amb les funcions racionals amb numerador de major grau que el denominador.

Si aprens les regles que acabem de citar pots aplicar-les de memòria; si les vols raonar, fes-ho igual que en aquests exemples:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - 100x - 2000) \overset{\infty-\infty?}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \left(1 - \frac{100}{x} - \frac{2000}{x^2}\right) = \infty \cdot 1 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x}{x^2-4} \overset{\infty/\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^3}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

Pel·lícula !: Es pot dir que el primer cas és una indeterminació del tipus $\infty - \infty$, però "és una simple qüestió de graus...". És com al exèrcit: "On hi ha un sergent no manen ni els caporals ni els soldats!". El sergent "de ferro", x^2, mana avançar (anar cap a "més infinit"), $100x$ i 2000 són 100 caporals i 2000 soldats que semblen partidaris de retrocedir (anar cap "menys infinit"), però guanya el sergent! (Per cert: Curiosa forma de resoldre la indeterminació traient "a la força" factor comú "el de major grau": x^2).

El segon límit també es pot resoldre dividint numerador i denominador per x^3 (Comprova que s'obté $2/0 = \infty$), o traient de tots dos (numerador i denominador) factor comú x^2 i simplificant, o traient factor comú x^3 i simplificant... (Ves provant!)

Si ara repasses les pàgines 6 u 7, potser entendràs millor tots els resultats i exemples que hi ha. I això que he dit fa un moment de que "el grau mana", aplica'l igualment als resultats relatius al límit o comportament en l'infinit d'un quocient de polinomis!

I els límits a l'infinit en altres funcions... ? Si mires les gràfiques de les funcions exponencials, admetràs que, per exemple, quan $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ (que és justament el que volem dir quan escrivim $a^{+\infty} = +\infty$ i $a^{-\infty} = 0$ per a $a > 1$).

I, per acabar ja amb els límits a l'infinit, només utilitzar-los per donar-te quatre exemples senzills i més clars de per què $\infty - \infty$ és una indeterminació (allò de la persecució de "naus interestel·lars"), i no tan rebuscats com els de la pàgina 15:

$$\lim_{x \to \infty} \left((x+3) - x\right) \overset{\overset{\infty-\infty}{\uparrow}}{=} \lim_{x \to 0} 3 = 3 \qquad \lim_{x \to \infty} (2x - x) \overset{\overset{\infty-\infty}{\uparrow}}{=} \lim_{x \to 0} x = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (x - x^2) \overset{\overset{\infty-\infty}{\uparrow}}{=} \lim_{x \to 0} x \cdot (1 - x) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

* * *

Després de parlar dels infinits, cal dir quatre coses dels ***infinitèsims***, que són, justament, "l'invers del que són els infinits", és a dir, *són variables de límit zero* (Ja sabeu: $1/\infty = 0$, $1/0 = \infty$). Dit d'una forma intuïtiva: "Infinitèsim = infinitament petit".

Exemples: $\sin x$ quan $x \to 0$, perquè $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

$\cos x$ quan $x \to p\ /2$, perquè $\lim_{x \to p\ /2} \cos x = 0$ (però no quan $x \to 0$)

$\dfrac{1}{x}$ quan $x \to \infty$, perquè $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (però no quan $x \to 0$ o altre valor)

Igual que el resultat de comparar (dividir) dos infinits pot tenir diferents resultats, el mateix passa amb la comparació d'infinitèsims (No sé si m'enteneu: En el fons estic dient que "igual que ∞/∞ és una indeterminació, 0/0 també ho és..." Val?).

Diem que dos ***infinitèsims*** són ***equivalents*** quan el límit del seu quocient és 1... Dit amb absoluta precisió:

Dos infinitèsims $u(x)$ i $v(x)$ són equivalents si $\lim_{x \to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 1$

(En aquesta definició cal entendre que $u(x)$ i $v(x)$ són infinitèsims quan $x \to a$).

La utilitat dels infinitèsims equivalents és que es poden substituir l'un per l'altre en el càlcul de límits, <u>sempre que apareguin com a factor o divisor de TOTA l'expressió</u>, mai si apareixen com a factors o divisors de només un terme, o com a terme aïllat... I, sincerament, això permet sortir del pas en el càlcul de certs límits força complicats.

Però aquesta tècnica ja l'aprendràs amb el llibre o als exemples i exercicis resolts que et facilitem, així com unes quantes equivalències d'infinitèsims, sense les quals, naturalment, tampoc no et serviria de res dominar la tècnica!

Només volia fer esment d'un dels més importants, el cas de x i $\sin x$, quan $x \to 0$. Vull dir que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

però cal entendre que igual hauríem pogut dir que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \qquad \text{o que} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{\sin (x^2 - 4)}{(x^2 - 4)} = 1 \qquad \text{o que} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\sin (1/x)}{(1/x)} = 1$$

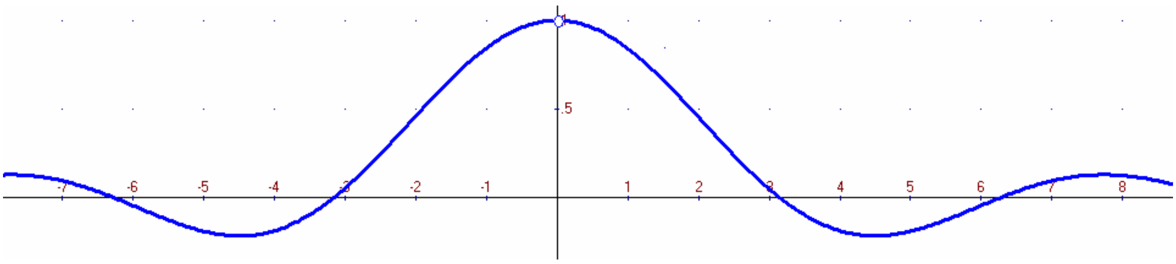
és a dir, podem aplicar la fórmula sempre que l'arc al qual apliquem el sinus i el denominador tinguin exactament la mateixa forma, i sigui realment un cas de "límit zero" (Vigila no la caguis amb, per exemple, $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, cas que ja hem comentat).

I, de com funciona això de l'equivalència, em limitaré a un exemple d'aplicació a aquest cas:

$$\underset{x\to p/2}{\textbf{lím}}\ \frac{\cos x}{2x-p} \overset{\substack{0/0\\ \uparrow}}{=} \underset{x\to p/2}{\textbf{lím}}\ \frac{\sin\left(\frac{p}{2}-x\right)}{2x-p} = \underset{x\to p/2}{\textbf{lím}}\ \frac{\frac{p}{2}-x}{2x-p} = \underset{x\to p/2}{\textbf{lím}}\ \frac{p-2x}{2\cdot(2x-p)} = \ldots = -\frac{1}{2}$$

on també hem aplicat una relació entre les raons de dos angles complementaris que hauries de conèixer (Si et costa d'entendre el càlcul, tampoc és per desesperar-se!).

Això si: Com que potser recordis que la gràfica de la funció $\frac{\sin x}{x}$ va sortir a propòsit de lo de "l'asímptota enrotllada" i allà no es veia cap discontinuïtat al punt zero, et tornaré a recordar lo de les "discontinuïtats evitables" (i potser "invisibles"), que és el que tens en aquesta funció al punt zero:



$$f(x)=\frac{\sin x}{x} \quad :: \quad f(0) \text{ no existeix} \quad :: \quad \underset{x\to 0}{\textbf{lím}}\ \frac{\sin x}{x}=1 \quad :: \quad \text{disc. evitable en } x=0$$

* * *

I ara sí que acabo: Però no podia acabar sense parlar de la indeterminació (ja esmentada abans) 1^{∞}.

També costa creure que sigui una indeterminació? Veiem:

- **Representa el "cas fronterer" entre $a^{+\infty}=+\infty$ quan $a>1$ i $a^{+\infty}=0$ quan $a<1$.**
- **Prou sabem que $1^{n}=1$ per a qualsevol valor de n, però no cal oblidar que quan diem "1^{∞}" no parlem del "valor fix" 1, sinó d'una variable que s'acosta a 1... i es tracta, doncs, d'una "lluita" entre una base que s'acosta a 1 i un exponent que es fa infinit, de forma que l'una empeny cap a 1 i l'altre cap a l'infinit (Pel·lícula : "Duelo de titanes", que ara no recordo com es deia en català).**
- **I potser tingueu alguna experiència (no gens "engrescadora") amb el món de les hipoteques. Si no, pregunteu als germans majors, als amics que compren pisos...**

  Intento avisar-vos que, malgrat només apliquin un 4% als interessos del deute quan us concedeixen un préstec hipotecari (fa poc encara era menys, un 3%!), i si, per exemple, el préstec ascendeix a 300.000 € (50 milions de les antigues pessetes) i tens 40 anys per retornar-lo, als 40 anys hauries de retornar

  $$300000\cdot 1'04^{40} = 1440308 \text{ €} \quad (\text{més 239 milions de pessetes})$$

  Perquè, al 4%, cada any que passa la quantitat que deus es multiplica per 1'04, ja que $C+4\%\text{ de }C = C+\frac{4}{100}\cdot C = C+0'04\cdot C = C\cdot(1+0'04) = C\cdot 1'04$.

Ho sabies? El deute quasi s'ha multiplicat per 5!

Estàs pensant quina quota mensual representa això? Aleshores, tingues present que cap banc esperarà mai 40 anys a recobrar els diners prestats, ja has de saber que comencen a cobrar mensualitats un més després de concedir la hipoteca (o potser "esperin una mica" i comencin més tard) i, naturalment, de les mensualitats que vas abonant ja NO et cobren interessos, només del deute pendent, que poquet a poquet (i ben poquet!) va baixant... això fa que les mensualitats i el total pagat siguin sensiblement menors, però, tot i així...!

En fi: Que no vull explicar-te ara el complicat mecanisme dels préstecs... Només volia que t'adonessis del que pot arribar a ser $[1 \text{ i escaig (poquet)}]^{\text{molt}}$ ...

Però també ha quedat dit que de la "lluita" entre una base que tendeix a 1 i un exponent que es fa infinit pot resultar qualsevol cosa...

I, en definitiva, per resoldre els límits amb la forma indeterminada 1^∞, en principi només cal saber el resultat d'un d'aquest límits, sens dubte el més elemental de tots:

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=e \qquad \text{o, equivalentment,} \qquad \lim_{v\to\infty}(1+v)^{\frac{1}{v}}=e$$

on l'anomenat nombre "e" té un valor irracional 2'718281... i, junt amb el nombre p formen la parella més important de nombres irracionals del càlcul: Si el nombre p apareix en la immensa majoria de càlculs de longituds, àrees i volums de cossos "rodons", e apareix en tots els càlculs relacionats amb el creixement exponencial (ja ho aniràs veient en el futur si continues estudiant matemàtiques). En castellà es diu: "p y e forman el verdadero pie sobre el que se apoya todo el cálculo diferencial" (Ja sé que és un acudit força dolent, no cal riure!).

Però inclús seran més útils les fórmules "lleugerament ampliades" a

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{k}{u}\right)^{u}=e^{k} \qquad \text{o, equivalentment,} \qquad \lim_{v\to\infty}(1+kv)^{\frac{1}{v}}=e^{k}$$

I, respecte de com aplicar les fórmules deixeu-me dir que, senzillament, buscant la forma de posar allò que tenim a la base i que té límit 1 en la forma "1 + infinitèsim", col·locar a l'exponent l'invers del infinitèsim (així, "a lo bèstia", però multiplicat pel seu invers, que és com si no haguéssim modificat res.... AAAAAAAH!) i... UN EXEMPLE!:

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x+2}\right)^{3x}$ **té la forma 1^∞ perquè** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x+2}\right)=1$ **i** $\lim\limits_{x\to\infty}(3x)=+\infty$
- $\dfrac{4x+5}{4x+2}$ **quedarà en la forma** $1+\dfrac{k}{u}$ **fent** $\dfrac{k}{u}=\dfrac{4x+5}{4x+2}-1=\dfrac{3}{4x+2} \rightarrow \begin{cases} k=3 \\ u=4x+2 \end{cases}$
- **Ara, "a lo bèstia", fem:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x+2}\right)^{(4x+2)\cdot\frac{3x}{4x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{4x+2}\right)^{4x+2}\right]^{\frac{3x}{4x+2}}=\left[e^{3}\right]^{3/4}=e^{9/4}=\sqrt[4]{e^{9}}$$

I això és tot, encara que al llibre i a les activitats trobareu alguna coseta més! Però, si amb això heu tingut prou per entendre bé els límits, ja em faré creus!