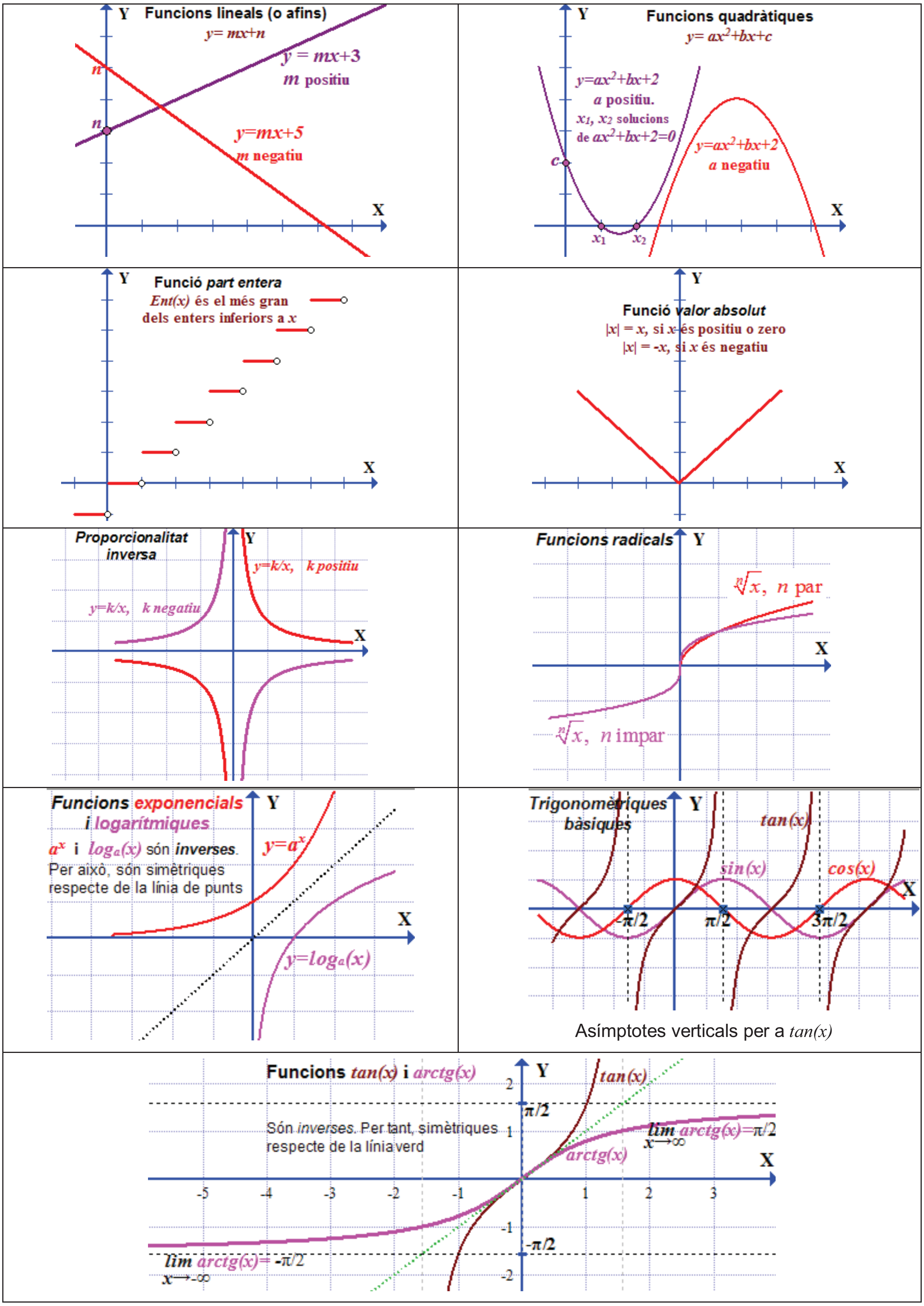
RECEPTES SOBRE ANÀLISI GENERAL DE FUNCIONS

A. Funcions elementals

Hauríeu de conèixer bé les definicions i gràfiques de les funcions que anomenem elementals. Us les detallem a continuació.



B. Expressions simbòliques en el càlcul de límits

Quan es calculen límits, solen aparèixer expressions simbòliques el resultat de les quals hauríeu de conèixer bé (allà on vegeu un **?**, heu d'interpretar que és una *expressió indeterminada*, és a dir, el resultat dependrà del problema en el que aparegui; si us apareix en un problema, haureu de fer un estudi més profund per esbrinar quant val) :

SUMES i RESTES			**PRODUCTES**
$\infty + L = \infty$,	$-\infty + L = -\infty$,	$+\infty + L = +\infty$	Si $L>0$, llavors $\infty \cdot L = \infty$ i $-\infty \cdot L = -\infty$
$\infty + \infty = \infty$,	$(-\infty)+(-\infty) = -\infty$,	$-(-\infty) = +\infty$	Si $L<0$, llavors $\infty \cdot L = -\infty$ i $-\infty \cdot L = +\infty$
$\mathbf{\infty - \infty = ?}$,	$\mathbf{-\infty - (-\infty) = ?}$,	$\mathbf{(+\infty)-(+\infty) = ?}$	$\mathbf{\infty \cdot 0 = ?}$

QUOCIENTS		**POTÈNCIES**
Si L és un nombre qualsevol, llavors $\frac{L}{\infty} = 0$		$\infty^{\infty} = \infty$ $\infty^{-\infty} = 0$ $\mathbf{\infty^{0} = ?}$
$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{L}{0} = \infty$ sempre que $L \neq 0$	Si $L>0$, llavors $\infty^{L} = \infty$. Si $L<0$, llavors $\infty^{L} = 0$
$\frac{\infty}{\infty} = ?$	$\frac{0}{0} = ?$	Si $L>1$, llavors $L^{\infty} = \infty$, i $L^{-\infty} = 0$
		Si $0 < L < 1$, llavors $L^{\infty} = 0$, i $L^{-\infty} = \infty$
		$\mathbf{1^{\infty} = ?}$

C. Resolució d'expressions d'indeterminació

El més difícil del càlcul de límits és sempre com resoldre una indeterminació quan hi apareix una. Us indicarem els casos més habituals.

C.1 Indeterminacions del tipus $\infty/\infty = ?$

Si la indeterminació surt com a quocient de dos fraccions polinòmiques, teniu en compte que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^n + a'x^{n-1} + \ldots}{bx^m + b'x^{m-1} + \ldots} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to\infty} x^{n-m}$$

Exemple:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+5}{3x^2-x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{3x^2} = \frac{4}{3} \lim_{x\to\infty} x^{2-2} = \frac{4}{3} \cdot 1$$

però fent la resta.

La regla de l'esquerra també val si en el numerador o en el denominador hi ha expressions radicals, és a dir,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[p]{ax^n + \ldots}}{\sqrt[q]{bx^m + \ldots}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[p]{ax^n}}{\sqrt[q]{bx^m}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[q]{b}} \lim_{x\to\infty} x^{\frac{n}{p}-\frac{m}{q}}$$

En aquest cas, però, heu de tenir en compte que si *a* és negatiu i *p* parell, l'expressió del numerador no tindrà sentit quan *x* sigui gran, per tant el límit no existirà. Anàlogament quan *b* sigui negatiu i *q* parell

En altres casos, no procedents de fraccions polinòmiques, intenteu resoldre la indeterminació aplicant la *regla de l'Hôpital* (més endavant)

C.2 Indeterminacions del tipus $\infty - \infty = ?$

Si la indeterminació surt com a diferència de 2 fraccions polinòmiques, feu primer la resta de les fraccions i torneu a calcular el límit:

Exemple:

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\right) = \infty - \infty$, però fent la resta:

$$\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2(x+1) - x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2}{x^2-1}$$

Ara, en calcular el límit del resultat, s'obté lím = 2

Si la indeterminació surt com a diferència d'expressions amb alguna arrel quadrada, multipliqueu i dividiu per la seva expressió conjugada, feu-ne operacions i torneu a calcular el límit:

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x} - x) = \infty - \infty$, però multiplicant i dividint per $\sqrt{x^2-x} + x$, podem obtenir el límit

$$\sqrt{x^2-x} - x = \frac{(\sqrt{x^2-x} - x)(\sqrt{x^2-x} + x)}{\sqrt{x^2-x} + x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-x} + x}$$

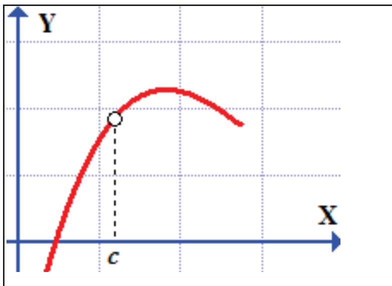
Calculant ara el límit, s'obté $\frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$

C.3 Indeterminacions del tipus $1^{\infty} = ?$

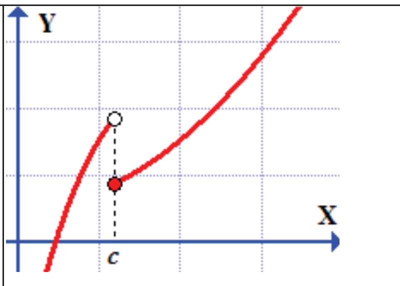
El nombre *e* Recordeu que el nombre *e* = 2'7182... és el valor dels següents límits: $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ En particular, si *k* indica una constant, i *f(x)* indica una expressió en *x*, es té: $e^{k} = \lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)}$ $= \lim\limits_{x\to 0}(1+k\cdot f(x))^{\frac{1}{f(x)}}$	Las indeterminacions del tipus 1^{∞} se solen resoldre transformant les expressions fins a aconseguir –les de forma que es pugui utilitzar una de les fórmules de l'esquerra. Et donem, però, una regla pràctica: Si $\lim f(x) = 1$ i $\lim g(x) = \infty$, llavors $\boxed{\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim (f(x)-1)\cdot g(x)}}$ **Exemple:** Comproveu que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1} = 1^{\infty}$ i calculeu després el límit aplicant la fórmula anterior.

D. Continuïtat d'una funció en un punt i en un interval

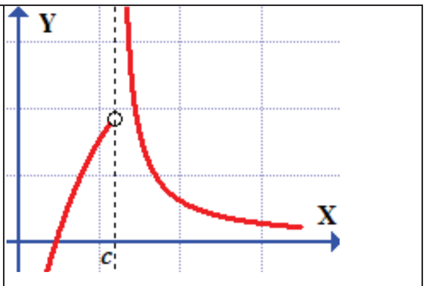
Observeu les 3 gràfiques següents en el punt corresponent a $x=c$. Les 3 tenen en comú una cosa: **No compleixen la igualtat** $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$. Per això, es diu que són discontínues en $x=c$



En aquest cas, no existeix *f(c)*, però sí existeix $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.
Es diu que en *x=c* hi ha *discontinuïtat evitable*



Ara, no existeix $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ tot i que existeixen els límits laterals, però tots dos són diferents.
En *x=c* hi ha *discontinuïtat de salt.*



En aquest cas, almenys un dels límits laterals és infinit $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$.
Es diu que en *x=c* hi ha *discontinuïtat infinita (o asimptòtica)*

Així doncs,

- es diu que *f* és una ***funció continua*** en $x=c$ si existeix *f(c)* i $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$
- es diu que *f* és una ***funció continua*** en un interval si és continua en cada punt de l'interval.

E. Teoremes fonamentals de funcions contínues en intervals

Teorema de Bolzano Si *f(x)* és l'expressió d'una funció contínua en l'interval *[a,b]*, i els nombres *f(a)* i *f(b)* són de signes diferents, llavors l'equació f(x)=0 té almenys una solució *c* en *[a,b]* Això significa que la gràfica tallarà l'interval [a,b] en almenys un punt	**Teorema de Weierstrass** Si *f(x)* és l'expressió d'una funció contínua en l'interval [a,b], aleshores arriba a tenir un valor màxim i un valor mínim. (Aquests valors màxim i mínim es poden obtenir en x=a, en x=b o en un punt de l'interior)

Exemple: l'equació $x^3 - 6x + 1 = 0$ té almenys una solució que cau entre 2 i 3, perquè

- En x=2 obtenim $2^3 - 6\cdot 2+1=-3$ (negatiu)
- En x=3 obtenim $3^3 - 6\cdot 3+1=+10$ (positiu)