SÈRIE 1

1.- Sigui $V = \{(-1,1,1), (-2,-1,0), (1,2,a)\}$ ***un conjunt de vectors de*** $\mathbb{R}^3$***.***

(a) ***Trobeu el valor o valors de*** a ***perquè*** V ***sigui linealment dependent.***

(b) ***Quan*** $a = 4$***, expresseu el vector*** $\vec{v} = (3,9,14)$ ***com a combinació lineal dels vectors de*** V***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Hi ha diferents formes de comprovar la dependència lineal de V. Per exemple, podem calcular el determinant de la matriu formada pels tres vectors,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \det A = 3a - 3\,.$$

Aquest determinant val zero si i sol el conjunt V és linealment dependent. Com que l'equació $3a-3=0$ té per solució $a = 1$, aquest és el valor demanat.

Podem buscar també el rang de la matriu A, que haurà de ser menor que 3 si volem que el conjunt V sigui linealment dependent

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}.$$

Les transformacions elementals realitzades han estat: (1) $F_2 + F_1$ i $F_3 + F_1$; (2) $F_2/3$ (3) $F_3 - 2F_2$.

El rang de la matriu A és diferent de tres si i sol si $a = 1$.

Un altre camí de resolució és utilitzar directament la definició de conjunt linealment dependent. Cal plantejar l'equació vectorial

$$\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) + \gamma(1,2,a) = (0,0,0).$$

Si podem trobar valors per a les variables α, β i γ que no siguin tots nuls, el conjunt V serà linealment dependent. Ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma \;= 0 \\ \alpha + a\gamma \quad\;\; = 0 \end{array}\right\}$$

De la tercera equació en traiem que $\alpha = -a\gamma$. Portant aquest valor a les altres dues,

$$\left.\begin{array}{r} -2\beta + (a+1)\gamma = 0 \\ -\beta + (2-a)\gamma \;= 0 \end{array}\right\}$$

Aïllant el valor de β a la segona d'aquestes equacions i substituint-lo a la primera obtenim $(-3+3a)\gamma = 0$. Com que volem que $\gamma \neq 0$ (si aquesta variable fos nul·la també ho serien les altres dues), necessitem que $-3+3a = 0$; és a dir, $a = 1$.

La qüestió es pot resoldre també buscant el valor del paràmetre a perquè el tercer vector sigui combinació lineal dels altres dos (amb la qual cosa el conjunt V seria linealment dependent).

$$\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) = (1,2,a) \Longrightarrow \alpha = 1\,,\ \beta = -1\,,\ a = 1\,.$$

(b) Plantegem l'equació vectorial $\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) + \gamma(1,2,4) = (3,9,14)$, que ens porta al sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{r} -\alpha - 2\beta + \gamma = \;3 \\ \alpha - \beta + 2\gamma \;= \;9 \\ \alpha + 4\gamma \quad\;\; = 14 \end{array}\right\},$$

Aquest sistema té per solució $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$. Per tant, la resposta a aquest apartat és

$$\vec{v} = 2(-1,1,1) - (-2,-1,0) + 3(1,2,4)\,.$$

2.- *De la funció polinòmica* $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ *sabem que*

- ***té un extrem relatiu en el punt d'abscissa*** $x = -3$ **.**
- ***la integral definida en l'interval*** $[0,1]$ ***val*** $-\dfrac{5}{4}$ **.**

Calculeu el valor dels paràmetres a ***i*** b***.***

[2 punts]

Solució

Si la funció té un extrem relatiu en el punt on $x = -3$ sabem que $P'(-3) = 0$. Com que $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, ens queda l'equació

$$3(-3)^2 + 2a(-3) + b = 0\,.$$

Per altra banda, tenim que

$$\int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2 = -\frac{5}{4}\,.$$

En definitiva, hem obtingut el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcr} -6a & + & b & = & -27 \\ \dfrac{a}{3} & + & \dfrac{b}{2} & = & -\dfrac{7}{2} \end{array}\right\}\,,$$

que té per solució $a = 3$ i $b = -9$.

3.- *Donats el pla* $\pi\colon x + 2y - z = 3$ *i la recta* $r\colon \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z+m}{4}$,

(a) ***Comproveu que el vector característic (o normal) de*** π ***i el vector director de*** r ***són perpendiculars.***

(b) ***Estudieu la posició relativa de*** π ***i*** r ***en funció del paràmetre*** m***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector característic del pla és $v_\pi = (1,2,-1)$; el vector director de la recta és $v_r = (2,1,4)$. Aquests vectors seran perpendiculars si i sol si el seu producte escalar és nul.

$$(1,2,-1)\cdot(2,1,4) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 4 = 2 + 2 - 4 = 0\,,$$

(b) Tenint en compte l'apartat anterior, la recta i el pla solament poden ser paral·lels o incidents (la recta està continguda dins del pla). En aquest segon cas, qualsevol punt de la recta ha de complir l'equació del pla. Agafem el punt $P = (1, 0, -m)$; aquest punt pertany al pla si i sol si $1 + 2 \cdot 0 - (-m) = 3$; és a dir, si i sol si $m = 2$.

En definitiva, si $m = 2$, la recta està continguda al pla; si $m \neq 2$, la recta i el pla són paral·lels.

4.- Siguin les matrius $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{bmatrix}$***,*** $B = \begin{bmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{bmatrix}$ ***i*** $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{bmatrix}$***, on*** a***,*** b ***i*** c ***són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.***

[2 punts]

Solució

Una matriu quadrada no té inversa si i sol si el seu determinant val zero. Tenim

$$\det A = 7a + 7b - 7c; \qquad \det B = -7a + 9b - 17c; \qquad \det C = 17a + 15b - 28.$$

Les tres matrius seran no invertibles quan el valor dels paràmetres sigui la solució del sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 7a & + & 7b & - & 7c & = & 0 \\ -7a & + & 9b & - & 17c & = & 0 \\ 17a & + & 15b & & & = & 28 \end{array}\right\},$$

és a dir, quan $a = -1$, $b = 3$ i $c = 2$.

5.- Donats el pla $\pi : 2x - y + 3z - 8 = 0$ ***i el punt*** $P = (6, -3, 7)$***,***

(a) ***Trobeu l'equació contínua de la recta que passa per*** P ***i és perpendicular a*** π***.***

(b) ***Trobeu el punt del pla*** π ***que està més proper al punt*** P***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Podem agafar com a vector director de la recta que busquem el vector característic del pla π; llavors, l'equació contínua de la recta és

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3}.$$

(b) El punt del pla més proper al punt P és el que es troba a la recta perpendicular al pla passant per P. Així, el punt que estem buscant és la solució de les equacions

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3}, \quad \text{i} \quad 2x - y + 3z - 8 = 0.$$

Hi ha vàries formes de resoldre el sistema. Una d'elles és convertint l'equació contínua de la recta en dues equacions,

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} \Longrightarrow x + 2y = 0; \qquad \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3} \Longrightarrow 3y + z = -2.$$

Ajuntant aquestes dues equacions amb la del pla ens queda un sistema,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 8 \end{array}\right\} ,$$

que té per solució $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

Una altra forma és passar l'equació de la recta a la forma paramètrica,

$$x = 6 + 2\lambda\ , \quad y = -3 - \lambda\ , \quad z = 7 + 3\lambda\ ,$$

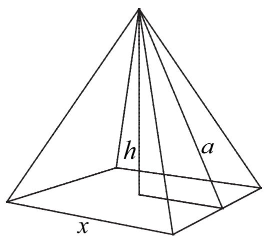
i substituir aquests valors a l'equació del pla,

$$2x - y + 3z - 8 = 0 \Longrightarrow 2(6 + 2\lambda) - (-3 - \lambda) + 3(7 + 3\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow 14\lambda + 28 = 0 \Longrightarrow \lambda = -2\,.$$

Les coordenades del punt són $x = 6 + 2(-2) = 2$, $y = -3 - (-2) = -1$, $z = 7 + 3(-2) = 1$.

D'una manera o altra, el punt buscat és $Q = (2, -1, 1)$.

6.-Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de $300\,m^2$ de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.



(a) ***Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,***

$$V(x) = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6}\,.$$

(b) ***Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Anomenem a a l'altura d'una de les cares de la tenda, tal com està indicat al dibuix. Llavors, la superfície total de les quatre cares de la tenda és $S(x) = 4\left(\dfrac{ax}{2}\right) = 2ax$. Com que aquesta superfície és de $300\,m^2$, tenim que $2ax = 300$, és a dir, $a = \dfrac{150}{x}$.

Per altra banda, d'acord amb el teorema de Pitàgores, $a^2 = h^2 + (x/2)^2$. Per tant,

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{150}{x}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{2x}\,.$$

Amb això,

$$V(x) = \frac{1}{3}x^2 h = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6}\,.$$

(b) Per a determinar el valor de x que fa màxim el volum, hem de derivar la funció volum i determinar els punts on la derivada s'anul·li.

$$V'(x) = \frac{1}{6}\left[\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4} + \frac{x}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}\left(-4x^3\right)\right] = \frac{3 \cdot 10^4 - x^4}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}\,.$$

Aquesta derivada val zero quan $x = \sqrt[4]{3 \cdot 10^4} = 10\sqrt[4]{3} \simeq 13,1607\,.$

També es pot treballar amb la funció $f(x) = x^2(9 \cdot 10^4 - x^4)$, resultat d'haver descartat els factors constants i haver elevat al quadrat la funció volum. Amb ella,

$$f'(x) = 18 \cdot 10^4 x - 6x^5\,; \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \text{o } x = 10\sqrt[4]{3}\,.$$

La primera d'aquestes solucions és absurda (si $x = 0$ no hi ha tenda) i la segona és la resposta correcta.