

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$, per a $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a .

[1 punt]

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre a .

[1 punt]

2. Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

3. Un nedador és al mar en un punt N , situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S , situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A , situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S , de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S . El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.
- a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a una distància x de S , demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar

des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{6 - x}{5}$.

[1 punt]

- b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A , passant per P . Quin és el valor d'aquest temps mínim?

[1 punt]

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y = 9$.

[2 punts]

5. Siguin r i s les rectes de \mathbb{R}^3 d'equacions $r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ i $s: (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.

[1 punt]

- b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla de l'apartat anterior.

[1 punt]

6. Responen a les qüestions següents:

- a) Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $A^2 = I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible i A^{-1} satisfà $(A^{-1})^2 = I$.

[1 punt]

- b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $A^2 = I$.

[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans