Sèrie 5

1. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions

$$r\colon x+5=y-5=\frac{z-3}{2}$$
$$s\colon \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$$

a) Estudieu el paral·lelisme i la perpendicularitat entre les rectes r i s.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla π que conté la recta r i és paral·lel a la recta s. Calculeu la distància entre la recta s i el pla π obtingut.

[1 punt]

Resolució:

a) Els vectors directors de les rectes r i s són $v_r=(1,1,2)$ i $v_s=(2,3,-1)$.

Els vectors v_r i v_s no són proporcionals, ja que un no és múltiple de l'altre ($\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}\neq\frac{2}{-1}$) i per tant les rectes $\boxed{r \text{ i } s \text{ no són paral·leles}}$.

El producte escalar dels dos vectors directors és $v_r\cdot v_s=1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot(-1)=3\neq 0$ per tant les rectes $\boxed{r \text{ i } s \text{ no són perpendiculars}}$.

b) Si el pla π ha de contenir la recta r aleshores $v_r=(1,1,2)$ serà un dels seus vectors directors i el pla π haurà de passar pel punt de la recta $P_r=(-5,5,3)$. Per altra banda si el pla π ha de ser paral·lel a la recta s aleshores $v_s=(2,3,-1)$ serà també un dels vectors directors del pla.

Així doncs, l'equació general del pla π s'obtindrà de la igualtat:

$$\begin{vmatrix} x+5 & 1 & 2 \\ y-5 & 1 & 3 \\ z-3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Quan desenvolupem obtenim $(x+5)(-7)-(y-5)(-5)+(z-3)1=0$.

Amb el que tenim $\boxed{\pi\colon -7x+5y+z=63}$.

Com que el pla π és paral·lel a la recta s,

$$d(s,\pi) = d(P_s,\pi) = d\big((3,2,-1), -7x + 5y + z - 63 = 0\big)$$
$$= \frac{|(-7)\cdot 3 + 5\cdot 2 + (-1) - 63|}{\sqrt{(-7)^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{75}{\sqrt{75}} = \sqrt{75} = \boxed{5\sqrt{3}}.$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'estudi de paral·lelisme.

0,5 punts per l'estudi de perpendicularitat.

Apartat b)

0,25 punts per la identificació dels vectors directors del pla.

0,25 punts per l'equació general del pla.

0,25 punts pel plantejament de la distància a partir d'un punt qualsevol de la recta.

0,25 punts pel càlcul de la distància d'un punt a un pla.

---

2. Siguin les funcions $f(x) = \frac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g.

[1 punt]

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x = 0$.

[1 punt]

Resolució:

a) $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

Per tal que un punt, x, sigui del domini de la funció g només cal que el radicand sigui positiu. És a dir $\boxed{Dom(g)} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+4 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{4}{3}\right\} = \boxed{\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)}$.

Una ordenada y serà del recorregut de la funció g, sempre que es pugui obtenir del càlcul de la imatge per g d'una abscissa x, és a dir $y = +\sqrt{3x+4}$. Per tant seran aquells valors positius de y per als quals la igualtat $y = +\sqrt{3x+4}$ té solució per a x. Però operant la igualtat obtenim que per a qualsevol y positiu sempre podem aillar la x com a $x = \frac{y^2-4}{3}$. Per tant, $\boxed{Rec(g) = [0, +\infty)}$.

b) Per tal que les dues funcions siguin tangents en $x = 0$ s'ha de satisfer $f(0) = g(0)$ i $f'(0) = g'(0)$.

Calculem les expressions de les funcions derivades:

$$f'(x) = \frac{1}{4}ae^{ax}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

Per tant $f(0) = g(0) \Rightarrow \frac{1+b}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{b = 7}$.

I $f'(0) = g'(0) \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{a = 3}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts pel domini.
0,5 punts pel recorregut.

Apartat b)

0,25 punts per la derivada de f.
0,25 punts per la derivada de g.
0,25 punts per la igualtat d'imatges i càlcul de b.
0,25 punts per la igualtat de pendents i càlcul de a

---

3. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} mx - y &= m \\ 3x + (m-4)y &= m+2 \end{cases} \text{ per a } m \in \mathbb{R}.$$

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema sigui compatible.

[1 punt]

Resolució:

a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, A', associades al sistema són:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & m \\ 3 & m-4 & m+2 \end{array}\right)$$

$$rang(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3).$$

- Cas I: Si $m \neq 1, 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2 = rang(A') =$ nombre d'incònites i per tant el sistema és Compatible Determinat.
- Cas II: Si $m = 1$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

i per tant tenim $rang(A) = rang(A') = 1$ i aleshores el sistema és Compatible Indeterminat amb (2-1=1) 1 grau de llibertat.

- Cas III: Si $m = 3$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

que correspon clarament a un sistema incompatible ja que la primera equació demana $3x - y = 3$, mentre que la segona demana $3x - y = 5$.

En resum:

Si $m \neq 1, 3$, el sistema és Compatible Determinat Si $m = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat Si $m = 3$, el sistema és Incompatible.

b) Hem de trobar la solució per als casos I: $m \neq 1, 3$ i II: $m = 1$.

Cas I: $m \neq 1, 3$

Com que la matriu de coeficients és quadrada i $|A| \neq 0$, podem resoldre directament el sistema pel mètode de Cràmer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ m+2 & m-4 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2-4m+m+2}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2-3m+2}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m-1)(m-3)} = \frac{m-2}{m-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m \\ 3 & m+2 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2+2m-3m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2-m}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m}{m-3}.$$

Per tant, per a cada valor de $m \neq 1, 3$ el punt solució del sistema és $\boxed{\left(\frac{m-2}{m-3}, \frac{m}{m-3}\right)}$.

Cas II: $m = 1$

En aquest cas el sistema queda reduït a una única equació $x - y = 1$, ja que la segona equació queda múltiple de la primera.

Els punts solució del sistema són de la forma $\boxed{(x, x-1)}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

- 0,25 punts pel plantejament matricial i càlcul del determinant.
- 0,25 punts pel cas I.
- 0,25 punts pel cas II.
- 0,25 punts pel cas III.

Apartat b)

- 0,25 punts pel plantejament de Cramer en el cas I.
- 0,25 punts pel desenvolupament del cas I.
- 0,25 punts per la solució final del cas I.
- 0,25 punts pel cas II.

4. Sabem que una funció f té per derivada la funció

$$f'(x) = (3x-2)^2(x-2).$$

a) Calculeu els valors de x en què la funció f té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.

[1 punt]

b) Determineu la funció f sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$.

[1 punt]

Resolució:

a) Els punts candidats a ser màxim relatiu o mínim relatiu són els zeros de la funció derivada f'. Si igualem la derivada a zero veiem que s'anul·la en els punts d'abscissa $x = \frac{2}{3}$ i $x = 2$.

Per a classificar els punts candidats farem servir la funció derivada segona.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot 3 \cdot (3x-2)(x-2) + (3x-2)^2 = (3x-2)(6x-12+3x-2) \\ &= (3x-2)(9x-14). \end{aligned}$$

Com que $f''(2) = 16 > 0$, per tant en $x = 2$ la funció té un mínim relatiu.
Com que $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, no podem concloure que sigui un extrem relatiu.

Els punts candidats a ser inflexió són aquells punts que anul·len la segona derivada.

Quan resolem $f'' = 0$, obtenim $x = \frac{2}{3}$ i $x = \frac{14}{9}$.

En els dos casos es tracta de punts d'inflexió ja que la segona derivada canvia de signe. En efecte, f'' és positiva a l'interval $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, és negativa a l'interval $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{9}\right)$ i torna a ser positiva a l'interval $\left(\frac{14}{9}, \infty\right)$.

En resum:

En $x = 2$ la funció té un mínim relatiu En $x = \frac{2}{3}$ i $x = \frac{14}{9}$ la funció té punts d'inflexió.

b) Per a determinar la funció f calculem una primitiva de la funció f':

$$\int (3x-2)^2(x-2)\,dx =$$

$$= \int (9x^3 - 30x^2 + 28x - 8)\,dx = \frac{9}{4}x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 8x + C.$$

I podem determinar la constant C sabent que $f(2) = 0$.

És a dir, tenim que $\frac{9}{4}2^4 - 10 \cdot 2^3 + 14 \cdot 2^{\,2} - 8 \cdot 2 + C = 0$, d'on $C = 4$.

Aleshores

$$\boxed{f(x) = \frac{9}{4}x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 8x + 4}.$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per la identificació de candidats a extrem relatiu.
0,25 punts per la derivada segona.
0,25 punts per la classificació dels extrems relatius.
0,25 punts pel punt i classificació de la inflexió.

Apartat b)

0,25 punts pel plantejament a partir del càlcul d'una primitiva.
0,5 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts pel càlcul de la constant d'integració.

5. Donats els vectors $u = (2, -1, 0)$, $v = (-1, 3, 4)$ i $w = (0, 3a - 1, 4a)$.

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè els vectors u, v i w siguin linealment dependents.

[1 punt]

b) Calculeu els valors del paràmetre a perquè que un tetraedre d'arestes u, v i w tingui un volum de 2/3 unitats cúbiques.

[1 punt]

Resolució:

a) Per tal que els vectors u, v i w siguin linealment dependents, la matriu quadrada d'ordre 3 formada pels tres vectors ha de tenir rang menor de 3, és a dir que el seu determinant s'ha d'anul·lar.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3a-1 \\ 0 & 4 & 4a \end{vmatrix} = 24a - 8(3a - 1) - 4a = 8 - 4a.$$

Per tant el rang serà inferior a 3 només quan $8 - 4a = 0$, és a dir $\boxed{a = 2}$.

b) El volum d'un tetraede d'arestes u, v i w es calcula amb l'expressió

$$V = \frac{1}{6}|[u, v, w]|$$

Així doncs tenim l'equació $\frac{|8-4a|}{6} = \frac{2}{3}$, és a dir $|8 - 4a| = 4$, que segons el signe de l'expressió de dins del valor absolut dóna lloc a dues diferents equacions.

- Si $8 - 4a \geq 0 \Rightarrow 8 - 4a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 1}$.
- Si $8 - 4a < 0 \Rightarrow 8 - 4a = -4 \Rightarrow \boxed{a = 3}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament de la dependència en termes de determinant.
0,5 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts per la resolució de l'equació.

Apartat b)

0,25 punts per la formulació del volum.
0,25 punts pel plantejament de l'equació.
0,25 punts per la primera solució.
0,25 punts per la segona solució.

6. Considereu l'equació matricial $X \cdot A = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Per a quins valors del paràmetre a l'equació matricial té una solució única?

[1 punt]

b) Trobeu la solució X que satisfà l'equació matricial quan $a = 3$.

[1 punt]

Resolució:

a) De la igualtat $X \cdot A = B$ com que A és una matriu 3x3 i B és una matriu 2x3, aleshores X serà una matriu 2x3.

Demanar que la matriu X sigui única implica que cadascuna de les files de la matriu X ha de ser la solució, també única, del sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites resultant del producte $X \cdot A = B$. Aquest sistema 3x3 té per matriu associada la matriu trasposada de la matriu A, i per terme independent cadascuna de les files de la matriu B. Per tant, el sistema serà compatible determinat si i només si el determinanat de la matriu A és diferent de 0.

Si igualem el determinant a 0 tenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + a - 1 - 3 + a = 2a - 7 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{7}{2}.$$

Per tant, si $a \neq \frac{7}{2} \Rightarrow \lvert A \rvert \neq 0$ i aleshores la matriu A admet inversa, A^{-1}, i $X = B \cdot A^{-1}$.

Observació: L'argumentació inicial també es pot substituir de forma alternativa per demanar directament la condició suficient d'inversió de la matriu A i després estudiar particularment el cas $a = \frac{7}{2}$.

b) Quan $a = 3$ tenim $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcularem A^{-1} i després $X = B \cdot A^{-1}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

I per tant,

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -31 & 11 & 5 \\ 20 & -6 & -3 \end{pmatrix}}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per l'argumentació a l'entorn de la resolució de dos sistemes d'equacions.
0,25 punts per demanar que el determinant no s'ha d'anul·lar.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts pel resultat final.

Apartat b)

0,5 punts pel càlcul de la matriu inversa.
0,5 punts pel producte matricial final.