

## MESURES DE CENTRALITZACIÓ: MODA , MITJANA, MEDIANA

Un cop hem recollit les dades i les hem ordenat posant-les en una taula, arriba el moment de calcular algunes mesures que ens ajudin a fer un bon anàlisi de la variable d'estudi.

Amb dades de tipus quantitatiu les mesures de centralització ens proporcionen amb un sol valor quin és el centre de la distribució a l'entorn del qual estan les dades.

Anem a definir les mesures de centralització més importants.

**MODA:** És el valor que més es repeteix. Si tenim les dades agrupades en una taula buscarem la dada que té més freqüència absoluta o relativa. Pot ser que una distribució de dades no tingui moda , o que en tingui més d'una (si en té dues li direm bimodal).

**MITJANA ARITMÈTICA:** És la suma de totes les dades dividida entre el nombre total de dades. De forma abreujada l'escrivim com una X majúscula amb una barra a dalt :  $\bar{X}$  . Si tenim N dades, la mitjana es calcula amb la següent fórmula:  $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N}$  . Si tenim moltes dades repetides multiplicarem cada dada per la seva freqüència per no haver de sumar tant, en aquest cas la fórmula ens quedarà:  $\bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N}$

**MEDIANA** : És el valor central de la distribució de dades. El 50% de les dades són inferiors o iguals a la mediana i l'altre meitat són superiors a ella. Per calcular-la han d'estar ordenades de petita a gran. Si tenim un nombre senar de dades n'hi haurà una que està justament al mig, la que ocupa el lloc  $\frac{N+1}{2}$  , aquesta dada en serà la mediana. Si tenim un nombre parell de dades , n'hi ha dues que ocupen el centre , les que estan en posició  $\frac{N}{2}$  i la que està en posició  $\frac{N}{2} + 1$  . Es tractarà d'identificar quines dades estan en aquestes posicions i després fer la mitjana de les dues.

Veiem ara diversos exemples que il·lustrin aquestes definicions.

### EXEMPLE 1

La següent sèrie numèrica correspon al nombre de gols que ha anotat un nen els 15 primers partits de lliga: 2, 1, 0, 2, 0, 1, 3, 5, 1, 1, 3, 1, 0, 1, 0. En volem calcular la moda, mitjana i mediana.

*Com no són gaires dades, no en farem una taula, però si que les anem a ordenar de menor a major.*  
0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5



Quina és la **moda**?

*El valor que més es repeteix, en aquest cas 1. És a dir que aquest nen a la majoria de partits ha anotat 1 gol. Diríem que la moda d'aquesta sèrie és 1.*

Quina és la **mitjana aritmètica**?

*Apliquem la fórmula :*

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+1+2+2+3+3+5}{15} = \frac{21}{15} = 1.4$$

*Observem que la segona versió de la fórmula ens permetria no haver de sumar tant:*

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{15} = 1.4 \quad \text{és la mateixa fórmula, senzillament que en lloc}$$

*de sumar molts cops seguits el mateix nombre multipliquem el valor per la freqüència (és a dir per les vegades que surt repetida) i acabem abans.*

*Què ens diu aquest 1.4? Doncs que hauria d'haver marcat 1.4 gols a cada partit per obtenir la mateixa xifra de gols.*

Calculem la **mediana**:

*Ja tenim les dades ordenades i en tenim 15 (nombre senar) llavors hi ha una dada que estarà just enmig, la que ocupa el lloc  $\frac{N+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$ . La dada que ocupa el lloc vuitè és la mediana.*

0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **1**, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5

*Vigilem, la mediana NO és 8, la mediana és 1.*

*Com hem d'interpretar la mediana? Doncs diríem que en la meitat de partits el nen ha marcat 1 gol o menys.*

### EXEMPLE 2

Es pregunta a 10 nens quants dies a la setmana mengen verdura. Les dades recollides són: 2, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 3. En volem calcular la moda, la mitjana aritmètica i la mediana.

*Procedim com abans ordenant les dades de petita a gran:*

0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3



Quina és la **moda**?

*La majoria de nens han respost que mengen verdura 2 dies a la setmana, aquesta és la dada que més es repeteix i per tant és la moda.*

Quina és la **mitjana aritmètica**?

*Apliquem la fórmula*

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1}{10} = 1.4$$

*La mitjana aritmètica és doncs 1,4.*

Quina és la **mediana**?

*És el valor central de les 10 dades de que disposem. Com ara 10 es un nombre parell hi ha dues dades centrals, les que ocupen els llocs 5è i 6è a la sèrie ordenada. Veiem quines són i farem la mitjana de les dues*

0, 0, 1, 1, **1, 2**, 2, 2, 2, 3

*Així doncs la mediana en aquest cas serà  $\frac{1+2}{2}=1.5$*

*Aquesta dada la interpretariem dient que el 50% dels nens mengen verdura a la setmana 1.5 cops o menys.*

### EXEMPLE 3

S'analitzen les notes obtingudes a l'examen de matemàtiques de 30 alumnes de 3r ESO. Ja ordenades aquestes han estat :

0; 0; 0; 1; 2; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 9; 9

En volem calcular la moda , la mitjana aritmètica i la mediana.

Quina és la **moda**?

*Veiem que el 5 és la nota que més es repeteix, la que té més freqüència, aquesta és doncs la moda.*

Quina és la **mitjana aritmètica**?

*Apliquem la fórmula*

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 2}{30} = 4.7$$

*Així doncs la nota mitjana de l'examen és 4.7.*

Quina és la **mediana**?

*Tenim 30 notes ordenades , com és un nombre parell hi haurà 2 notes centrals les que ocupen el*

*lloc  $\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$  i el lloc  $\frac{N}{2} + 1 = \frac{30}{2} + 1 = 16$  . Anem a veure quines són aquestes dades.*

*0; 0; 0; 1; 2; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; **5; 5** ; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 9; 9*

*En aquest cas , com són dues dades iguals , no cal fer-ne la mitjana , la mediana de la distribució és 5. Això ho interpretarem dient que la meitat dels estudiants han tret una nota inferior o igual a 5.*

#### EXEMPLE 4

El trimestre de tardor 2011 es van presentar 412 alumnes a la prova de MA4. Les notes finals d'aquests estudiants presentats queden recollides a la següent taula.

$x_i$	$n_i$	$N_i$
1	21	21
2	44	65
3	26	91
4	8	99
5	50	149
6	76	225
7	69	294
8	75	369
9	36	405
10	7	412

A partir d'aquestes dades volem calcular la moda , la mediana i la mitjana aritmètica.

*Abans de fer els càlculs recordem que vol dir cada columna.*

*A la primera columna hi tenim les dades  $x_i$  és a dir el ventall de notes obtingudes.*

*A la segona columna hi tenim les freqüències absolutes  $n_i$  , és a dir el nombre d'alumnes que han obtingut cadascuna de les notes. (21 alumnes han tret un 1; 44 alumnes tenen un 2; ....)*

*I a la tercera columna hi tenim les freqüències absolutes acumulades  $N_i$  , fixem-nos que aquesta columna s'obté de sumar les  $n_i$  . Així la primera  $N_1$  coincideix amb  $n_1$  , la segona  $N_2$  l'obtenim sumant  $n_1+n_2$  ;  $N_3=n_1+n_2+n_3$  ; etc.*

*Aclarits aquests termes anem pels càlculs demanats.*

Quina és la **moda**?

*És la nota que han obtingut més alumnes , per tant és la que té més freqüència absoluta. En aquest cas es tracta del 6 que l'han obtingut 76 alumnes.*

Quina és la **mitjana aritmètica**?

*Apliquem la fórmula*

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \frac{1 \cdot 21 + 2 \cdot 44 + 3 \cdot 26 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 50 + 6 \cdot 76 + 7 \cdot 69 + 8 \cdot 75 + 9 \cdot 36 + 10 \cdot 7}{412} = \frac{2402}{412} = 5.83$$

*Així doncs la nota mitjana obtinguda pels alumnes presentats al mòdul MA4 el trimestre de tardor 2011 va estar de 5.83 punts*

Quina és la **mediana**?

*Ara tenim 412 dades, un nombre parell. Però no les anem a posar una al costat de l'altre per saber*

*quina és la que ocupa el lloc  $\frac{N}{2} = \frac{412}{2} = 206$  i 207. Hem de fer-ho observant la taula,*

*concretament la columna de les freqüències absolutes acumulades. Tenim 149 dades inferiors o iguals a 5, i 225 inferiors o iguals a 6. Per tant tant la dada que ocupa el lloc 206 com la 207 són un 6. No cal fer la mitjana perquè són iguals i per tant podem afirmar que la mediana és 6.*

*El 50% dels alumnes presentats tenen un 6 o menys i l'altra 50% més d'un 6.*

### **EXEMPLE 5**

Es vol fer un estudi sobre el consum d'alcohol entre els joves. Es pregunta a 200 nois i noies de 16 anys quants cops a la setmana beuen alcohol. Les respostes queden recollides a la següent taula:

$x_i$	$n_i$	$N_i$
0	60	60
1	40	100
2	60	160
3	30	190
4	10	200

Volem calcular-ne la moda la mitjana i la mediana.

Quina és la **moda**?

*En aquest cas podem observar que hi ha dos valors que tenen freqüència màxima 0 i 2. Per tant podríem dir que es tracta d'una distribució bimodal, és a dir té dues modes 0 i 2.*

Quina és la **mitjana aritmètica**?

*Apliquem la fórmula*

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \frac{0 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 10}{200} = \frac{290}{200} = 1.45$$

*Per tant direm que la mitjana de la distribució és 1.45*

Quina és la **mediana**?

*Com tenim 200 dades , haurem de busca les que ocupen el lloc 100 i 101 un cop ordenades de petita a gran. Com tenim la taula , és fàcil veure a la tercera columna , la de les freqüències acumulades que les dades n° 61 fins a la n° 100 (incloses) corresponen a un 1 , i que des de la dada 101 fins a la 160 corresponen a un 2.*

*Per tant la dada n° 100 és 1 i la dada n° 101 és un 2. Per calcular la mediana fem la mitjana de les*

$$\text{dues : Mediana} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

*La Mediana és 1.5 i per tant la meitat dels joves enquestats beuen alcohol 1.5 cops a la setmana o menys.*