DISTRIBUCIONS BIDIMENSIONAL

PROBLEMA RESOLT

*La taula següent mostra les notes de matemàtiques, **x**, i de física, **y**, de sis estudiants.*

x	2	3	5	5	6	9
y	1	3	8	6	8	10

α) *Representeu gràficament els valors de la taula com a núvol de punts.*

β) *Trobeu el coeficient de correlació. Creieu que les variables estan fortament relacionades?*

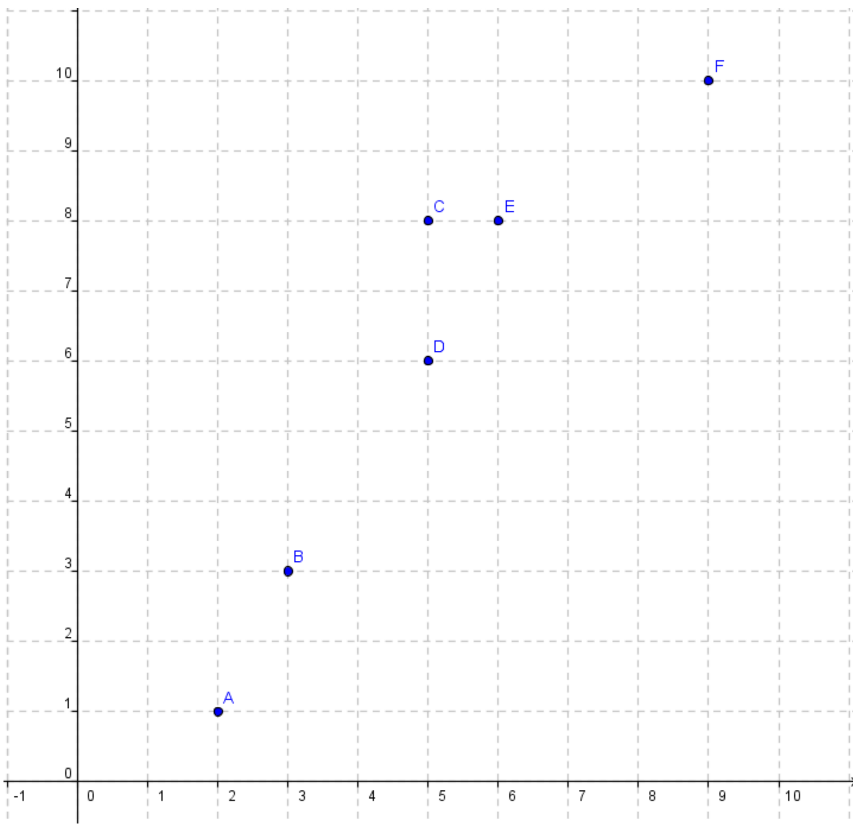
χ) *Trobeu la recta de regressió que ens expliqui la nota de física a partir de la de matemàtiques, i representeu-la gràficament en el sistema de representació de l'apartat a).*

δ) *Si un estudiant té un 7 de matemàtiques, quina predicció faríeu per a la nota de física?*

Expliqueu detalladament tots els càlculs que feu.

RESOLUCIÓ

a) Tal i com ens indiquen, representarem aquests parells de valors en uns eixos cartesians a fi d'obtenir el diagrama de dispersió o núvol de punts.



Observant aquest gràfic veiem que els punts tendeixen a alinear-se sobre una recta de pendent positiu, és a dir, podem dir que la correlació és lineal i forta (tots els punts estan gairebé alineats) i directa o positiva (el pendent d'aquesta possible recta que intuïm, anomenada recta de regressió és positiva).
A aquesta mateixa conclusió arribarem mitjançant el càlcul del coeficient de correlació lineal (apartat b).

b) L'expressió per calcular el coeficient de correlació lineal **r** és:

$$\text{coeficient de correlació lineal} \rightarrow r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Per calcular-lo necessitem saber el valor de la covariància i el de les desviacions típiques de les variables **X** i **Y**.

CÀLCULS PREVIS:

$$\textit{Mitjana}\text{ de la variable X} \rightarrow \overline{x} = \frac{2+3+5+5+6+9}{6} = 5$$

$$\textit{Mitjana}\text{ de la variable Y} \rightarrow \overline{y} = \frac{1+3+8+6+8+10}{6} = 6$$

Desviació típica de la variable X

$$\rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{2^2+3^2+5^2+5^2+6^2+9^2}{6} - 5^2} = \sqrt{\frac{180}{6} - 25} = \sqrt{5} = 2,24$$

Desviació típica de la variable Y

$$\rightarrow \sigma_y = \sqrt{\frac{1^2+3^2+8^2+6^2+8^2+10^2}{6} - 6^2} = \sqrt{\frac{274}{6} - 36} = \sqrt{9,67} = 3,11$$

$$\textit{Covariància} \rightarrow \sigma_{xy} = \frac{2\times 1+3\times 3+5\times 8+5\times 6+6\times 8+9\times 10}{6} - 5\times 6 = \frac{219}{6} - 30 = 6,5$$

Ara, ja estem en condicions de calcular **r**:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{6,5}{2,24\times 3,11} = 0,933$$

El coeficient de correlació **r** val **0,933**, és a dir, un valor molt proper a 1, això ens indica que la correlació és *lineal i forta*.
I, donat que aquest valor és positiu, la correlació és directa (positiva), això significa que quan augmenten (disminueixen) els valors de la variable **X**, també augmenten (disminueixen) els valors de la variable **Y** .
En el cas pràctic que ens ocupa, significa que els alumnes que tenen notes altes de matemàtiques també tenen notes altes a física i els que tenen notes baixes a matemàtiques també les tenen a física.

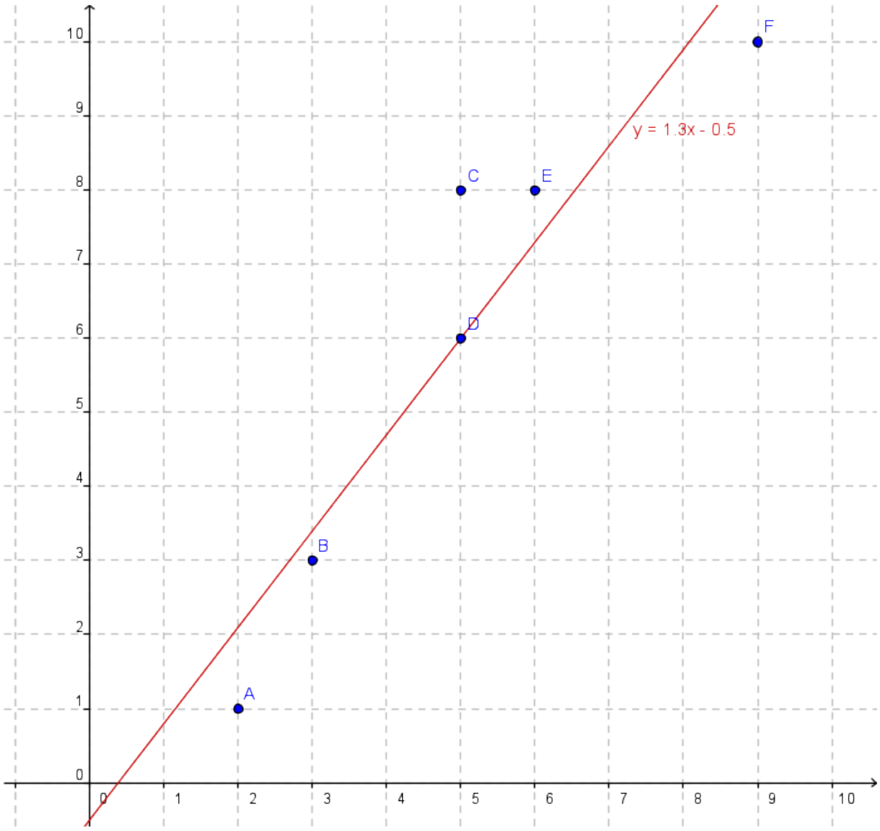
c) En aquest apartat, ens demanen trobar la recta de regressió que ens permeti trobar (estimar) la nota de física (y) a partir de la de matemàtiques (x), per tant hem de trobar la recta de regressió de Y sobre X.

$$y-\overline{y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}}(x-\overline{x})$$

$$y-6=\frac{6,5}{5}(x-5)$$

$$y=1,3x-0,5$$

I, la seva representació gràfica és:



d) Ara, el que ens demanen és estimar la nota de física que traurà un alumne que ha tret un 7 a matemàtiques.(els valors estimats es representen com a $\hat{y}$). Aquest valor de $\hat{y}$ el trobarem a partir de la recta de regressió:

$$\hat{y}=1,3x-0,5$$

$$\hat{y}=1,3\times 7-0,5$$

$$\hat{y}=8,6$$

Atès que la correlació és forta, el risc d'equivocar-nos quan estimem la nota de física és baix. Això significa que un alumne que ha tret un 7 de matemàtiques obtindrà una nota de física de 8,6 o, si més no, un valor molt proper.