CÁLCULO DE LÍMITES

1 Operaciones sobre los límites

Podemos enunciar las operaciones básicas en el cálculo de límites:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l, \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = l' \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [\, f(x) + g(x) \,] = l + l'$

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l, \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = l' \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [\, f(x) \cdot g(x) \,] = l \cdot l'$

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l, \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = l' \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$

4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = l^n, \quad n \in \mathbb{N}$

5. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}, \quad n \in \mathbb{N}$

2 Límite de un polinomio

Como $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n x^n \cdot \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \dfrac{a_0}{a_n x^n}\right)$ y el límite del paréntesis es 1, cuando $x \to \pm\infty$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n = \pm\infty,$$

entonces podemos sustituir en los límites, cuando $x \to \pm\infty$, el polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ por su equivalente $a_n x^n$.

ejemplo 1

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3 + 2x^2 + 3)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 2x^2 + 1)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-4x^6 - 2x^5 + 4x^2)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^5 - 2x^3 + 4x - 2)$

Sustituyendo los polinomios por sus correspondientes monomios equivalentes resulta:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3 + 2x^2 + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 2x^2 + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^4 = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} (-4x^6 - 2x^5 + 4x^2) = \lim_{x \to +\infty} (-4x^6) = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} (3x^5 - 2x^3 + 4x - 2) = \lim_{x \to -\infty} 3x^5 = -\infty$

ejemplo 2

Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^4 - 2x^2 + 3}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{3x^3 - 2x^2 + 4}$

c) $\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 4x + 2)^4$

d) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 1)^3$

a) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^4 - 2x^2 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^4} = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{3x^3 - 2x^2 + 4} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{3x^3} = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 4x + 2)^4 = \lim_{x \to +\infty} (3x^2)^4 = \lim_{x \to +\infty} 81x^8 = +\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 1)^3 = \lim_{x \to -\infty} (x^3)^3 = \lim_{x \to -\infty} x^9 = -\infty$

3 Casos de indeterminación

En el cálculo de límites pueden aparecer las siete indeterminaciones ya conocidas:

$$\frac{\infty}{\infty};\quad \infty - \infty;\quad 1^{\infty};\quad \frac{0}{0};\quad 0 \cdot \infty;\quad 0^0 \quad \text{y} \quad \infty^0$$

Y en el cálculo de límites de sucesiones aprendimos a deshacer las tres primeras.

Recordemos los métodos mediante algunos ejemplos.

I) CASO $\frac{\infty}{\infty}$

ejemplo 3

Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{2x^2 - 3x + 1}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 2x^3 - 4x + 1}{5x + 3}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5 + 2x^3 + 8x}{x^7 + 2x - 8}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{3x^3 + 4x^2 + 3}$

Sustituimos los polinomios del numerador y del denominador por sus monomios equivalentes:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2} = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 2x^3 - 4x + 1}{5x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4}{5x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{5} = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5 + 2x^3 + 8x}{x^7 + 2x - 8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5}{x^7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = \mathbf{0}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{3x^3 + 4x^2 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}}$

Resumiendo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_m x^m + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \begin{cases} \pm\infty, \text{ si } n < m & \text{El signo depende de } \frac{a_m}{b_n} \cdot x^{m-n} \\ 0, \text{ si } n > m \\ \frac{a_m}{b_n}, \text{ si } n = m \end{cases}$$

II) CASO $\infty - \infty$

ejemplo 4

Calcula los límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{4x+1})$

b) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2+3x})$

a) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{4x+1}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{4x+1}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{4x+1})}{(\sqrt{x} + \sqrt{4x+1})} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 4x - 1}{\sqrt{x} + \sqrt{4x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x - 1}{\sqrt{x} + \sqrt{4x+1}} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x} + \sqrt{4x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{3\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2+3x}) =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2+3x}) \cdot (\sqrt{x^2+7} + \sqrt{x^2+3x})}{(\sqrt{x^2+7} + \sqrt{x^2+3x})} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 7 - x^2 - 3x}{\sqrt{x^2+7} + \sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x + 7}{\sqrt{x^2+7} + \sqrt{x^2+3x}} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{2} = \mathbf{\frac{-3}{2}}$

Cuando en el cálculo de un límite aparece $\infty - \infty$, deshacemos la indeterminación multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada de la que hace aparecer dicha indeterminación.

También empleamos este método para eliminar expresiones irracionales.

III) CASO 1^{∞}

ejemplo 5

Calcular los límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2 + x}{3x^2 - 2}\right)^{2x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}}$

$$\boxed{(*) \lim_{x \to +\infty,\, a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty;\, a} (f(x)-1)g(x)}}$$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2 + x}{3x^2 - 2}\right)^{2x+1} \to 1^{\infty}$

aplicando la fórmula conocida $(*)$, tenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 + x}{3x^2 - 2}\right)^{2x+1} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2} - 1\right) \cdot (2x+1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2+x-3x^2+2}{3x^2-2}\right) \cdot (2x+1)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+5x+2}{3x^2-2}} = e^{\frac{2}{3}}$$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x+3}{2x+1} - 1\right) \cdot \left(\frac{3}{x-2}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x+3-2x-1}{2x+1}\right) \cdot \left(\frac{3}{x-2}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{(-x+2)\cdot 3}{(2x+1)\cdot(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{-3}{2x+1}} = e^{-\frac{3}{5}}$$

IV) CASO $\frac{0}{0}$

ejemplo 6

Calcular los límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

b) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^3 + 11x^2 + 35x + 25}{x^3 + 5x^2 - 2x - 10}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 2x^2 + x}$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^4 - 18x^2 + 81}$

Observad que ahora x no tiende a infinito y por tanto no podemos sustituir los polinomios por sus términos de mayor grado.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8} \to \dfrac{0}{0}$ pues numerador y denominador se anulan para $x = 2$, por tanto ambos polinomios son divisibles por $x - 2$. Factorizando por la regla de Ruffini, tenemos:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & -8 \\ 2 & & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)\cdot(x-3)$ $\qquad$ $x^2 + 2x - 8 = (x-2)\cdot(x+4)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x+4} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$$

b) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^3 + 11x^2 + 35x + 25}{x^3 + 5x^2 - 2x - 10} \to \dfrac{0}{0}$, luego factorizando

$$\lim_{x \to -5} \frac{x^3 + 11x^2 + 35x + 25}{x^3 + 5x^2 - 2x - 10} = \lim_{x \to -5} \frac{(x+5) \cdot (x^2 + 6x + 5)}{(x+5) \cdot (x^2 - 2)} =$$

$$= \lim_{x \to -5} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 2} = \frac{0}{23} = \mathbf{0}$$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 2x^2 + x} \to \dfrac{0}{0}$, luego factorizando

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 2x^2 + x} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1) \cdot (x-2)}{(x+1)^2 \cdot x} = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{(x+1) \cdot x} = \infty$$

pues $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x-2}{(x+1) \cdot x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x-2}{(x+1) \cdot x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^4 - 18x^2 + 81} \to \dfrac{0}{0}$, luego factorizando

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^4 - 18x^2 + 81} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3) \cdot (x^2 + 2x - 3)}{(x+3) \cdot (x^3 - 3x^2 - 9x + 27)} =$$

$= \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27} \to \dfrac{0}{0}$, volviendo a factorizar

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3) \cdot (x-1)}{(x+3) \cdot (x^2 - 6x + 9)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x - 1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{-4}{36} = -\mathbf{\frac{1}{9}}$$

Si para x = a, se anulan numerador y denominador de una fracción el límite de ésta presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. En este caso el límite de la fracción propuesta en x = a es el mismo que el de la fracción que resulta al simplificar por x – a.