

INTERESSOS

Pel que fa a la interpretació bancària, un dels papers principals el protagonitzen els interessos i les anualitats, de les quals aquí no en parlarem.

L'interès ve a ser el "lloguer" que s'ha de pagar o s'ha de cobrar per un capital (que ens deixen o que deixem). Sempre és un guany per al qui té el capital i un "endeutament" per al qui l'ha de demanar.

No és una xifra constant sempre i per a tothom, sinó que és una quantitat bellugada per qüestions socials, polítiques, de temps, de risc, etc., etc.

No és la nostra intenció, però, fer una dissertació "banquera", ni de bon tros, sinó, i molt senzillament, donar unes pinzellades a aquests conceptes d'ús més elemental.

Podem distingir dos tipus d'interès:

- **Interès simple:** És el que es dona a un capital quan aquest no es toca en tot el temps que dura l'operació bancària (és a dir, no augmenta ni disminueix).

Hi intervenen:

- Capital inicial (C): És el capital amb què es comença.
- Capital final (F): És la suma del capital inicial més els interessos que aquest ha produït.
- Temps: Període que transcorre des que comença l'"operació" fins que s'acaba. Acostuma a expressar-se en anys, encara que també es pot fer en semestres, trimestres i fins i tot en mesos.
- Rèdit (i): És el guany que produeixen 100 unitats (pots pensar en euros) en un període. S'acostuma a donar, però, en tant per 1.

Sembla bastant clar que l'interès ha d'ésser proporcional al capital, al temps i al rèdit. Així, podem escriure:

$I = Cti$, i com que $F = C + I$, tindrem que $F = C + Cti$, en conclusió

$$F = C(1 + ti)$$

Exemple.

Suposem que fa cinc anys vas ingressar a la caixa 2 000 € i se t'han convertit en 2 300 €. A quin tant per cent d'interès simple les va col·locar?

$$2\,300 = 2\,000(1 + 5i); \frac{2\,300}{2\,000} = 1 + 5i; 5i = \frac{23}{20} - 1 \quad i, \text{ per tant, } i = 0,03. \text{ És a dir, al } 3\%.$$

Pots observar que en cadascun d'aquests 5 anys les 2 000 € et produeixen 60 € d'interessos. Ara bé, aquestes 60 € no s'acumulen al capital inicial.

- **Interès compost:** Correspon a un capital al qual es van afegint els guanys proporcionats per aquest. Vegem, en l'exemple d'abans, quant hauries arreplegat, passats el 5 anys, al 3% anual d'interès compost:

A la fi del 1er. any tindries:

$$F_1 = 2\,000 + 60 = 2\,060 \text{ €}, \text{ ja que } I = C \cdot r \cdot t = 2\,000 \cdot 0,03 \cdot 1 = 60 \text{ €}$$

Aleshores el capital "inicial" del segon any ja no serien les 2 000 €, sinó 2 060, i així, en acabar el 2on. any, tindries:

$$F_2 = 2\,060(1 + 1 \cdot 0,03) = 2\,060 \cdot 1,03 = 2\,121,8 \text{ €}.$$

i en el 3er. any:

$$F_3 = 2\,121,8(1 + 1 \cdot 0,03) = 2\,185,454$$

i en el 4art.:

$$F_4 = 2\,185,454 \cdot 1,03 = 2\,251,0176$$

i en el 5è. i últim:

$$F_5 = 2\,251,0176 \cdot 1,03 = 2\,318,5481.$$

Exemples.

- Dedueix la fórmula general per a l'interès compost. Només cal tenir present que, per a cada any que passa, es multiplica per $(1 + i)$. Es tracta d'una progressió geomètrica de raó $1 + i$. Aleshores, obtenim: $F_t = C(1 + i)^t$
- Què passaria en les "formules" si, en lloc de fer les "liquidacions" per anys, es fessin mensualment? S'ha de dividir la "i" per 12. I multiplicar l'exponent per 12.
- Quants anys necessites perquè 20 000 €, col·locats al 3% d'interès simple anual, es converteixen en 30.000 €? I amb interès compost?
 $I = Cti, I = 10\,000 \text{ €}, C = 20\,000 \text{ €}, r = 0,03; t = 16 \text{ anys i } 8 \text{ mesos.}$
 $F_t = C(1 + i)^t, 30\,000 = 20\,000 \cdot 1,03^t; \text{ amb logaritmes decimals (calculadora), } t = 13 \text{ anys } 8,6 \text{ mesos}$
 $\frac{30\,000}{20\,000} = 1,03^t; \log 1,5 = t \cdot \log 1,03; t = \frac{\log 1,5}{\log 1,03} = 13,717 \text{ anys}$

(A la unitat 11, pàgina 261, veureu com treballar amb logaritmes per aïllar exponents.)

- Ingresses a la caixa 2 000 €. Quants en tindràs als 5 anys i al 2,7% anual d'interès compost?

$$F = 2\,000(1 + 0,027)^5 = 2\,284,979 \text{ €}$$

Per determinar l'interès compost obtingut, I, hem de restar al capital final el capital inicial:

$$I = F_t - C = C(1 + i)^t - C = C[(1 + i)^t - 1]$$

Més sobre interès compost

Si els interessos es capitalitzen *semestralment*, *trimestralment* o *mensualment* haurem d'expressar el tipus d'interès i el temps en funció del període de liquidació, essent n el nombre d'anys.

Liquidació semestral:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n}$$

Liquidació trimestral:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n}$$

Liquidació mensual:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12n}$$

Exemples.

L'Albert ha obtingut un capital final de 540800 € per un dipòsit que va efectuar fa dos anys. Sabent que el seu banc li ofereix el 4% d'interès compost anual, quina quantitat inicial va ingressar?

— Expressem les dades:

$$C_n = 540800 \text{ €} \quad n = 2 \text{ anys} \quad i = 4\% = 0,04 \text{ (tant per un)}$$

— Per a calcular el capital inicialment dipositat, aïllem C en la fórmula de l'interès compost i substituïm les dades.

$$C = \frac{C_n}{(1 + i)^n} \Rightarrow C = \frac{540800}{(1 + 0,04)^2} \Rightarrow C = 500000 \text{ €}$$

Calcula el capital final que obtindrà l'Anna al cap de dos anys per un dipòsit de 2000000 € en un banc que li ofereix el 5% anual, segons que la liquidació sigui semestral, trimestral o mensual.

Apliquem la fórmula corresponent segons que la liquidació sigui semestral, trimestral o mensual.

— Liquidació semestral:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n} \Rightarrow C_n = 2000000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^{2 \cdot 2} = 2207626 \text{ €}$$

— Liquidació trimestral:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n} \Rightarrow C_n = 2000000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4 \cdot 2} = 2208972 \text{ €}$$

— Liquidació mensual:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12n} \Rightarrow C_n = 2000000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12 \cdot 2} = 2209883 \text{ €}$$

Observem que com més freqüents siguin els períodes de liquidació, més augmenta el capital.

Taxa anual equivalent (TAE)

Hem vist que els períodes de liquidació d'interessos poden ser inferiors a un any i hem comprovat també que com més freqüents siguin aquests períodes de liquidació més diners rebem.

Es planteja aleshores la qüestió següent:

Quin és el tipus d'interès anual real que s'està aplicant si els períodes de liquidació són inferiors a un any?

Aquest interès és el que coneixem com a **taxa anual equivalent (TAE)**.

Exemple.

Un banc ofereix als seus clients un compte corrent amb un interès compost anual del 6% i amb una liquidació d'interessos mensual. Quina TAE està oferint?

Al 6% anual li correspon un 0,5% mensual. Perquè $6/12 = 0,5$.
Vegem com s'incrementa un capital d'1 €.

— Al cap del primer mes el capital ha augmentat un 0,5%:

$$1 + 0,005 = 1,005$$

— En finalitzar el segon mes ha augmentat un 0,5% respecte del mes anterior:

$$1,005 + 1,005 \cdot 0,005 = 1,010$$

és a dir, s'ha multiplicat per: $(1 + 0,005)^2 = 1,010$

— Al cap del tercer mes ha augmentat un 0,5% respecte del mes anterior:

$$1,010 + 1,010 \cdot 0,005 = 1,015$$

és a dir, s'ha multiplicat per: $(1 + 0,005)^3 = 1,015$

— I així successivament, després dels dotze mesos, el capital inicial s'ha multiplicat per:

$$(1 + 0,005)^{12} = 1,062$$

Per tant, un cop transcorregut un any, l'augment total del capital inicial ha estat:

$$1,062 = 1 + 0,062 = 1 + \frac{6,2}{100}$$

Així, doncs, el 6% d'interès anual, quan els períodes de liquidació són mensuals, es converteix en un interès anual real, és a dir en una TAE, del 6,2%.

Observa que a partir del procés seguit en l'exemple podem deduir la fórmula següent per a calcular la TAE:

$$\text{TAE} = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

on:

i : interès anual en tant per un

n : nombre de períodes de liquidació d'interessos

També en els préstecs bancaris es parla de la TAE corresponent a un tipus d'interès anual.

Observa la informació següent:

HIPOTECA 2008

5,95%_{NOMINAL} 6,28%_{TAE (*)}

(*) TAE calculada per a préstec a 15 anys de 60 100 €. Comissió d'obertura: 1 %

Si calcules la TAE corresponent a l'oferta bancària del 5,95% comprovaràs que és inferior a la TAE publicada.

Això ocorre perquè, en calcular la TAE d'un préstec o crèdit, s'hi inclouen a més les comissions d'estudi i les despeses d'obertura que cobra l'entitat financera per a concedir el préstec.