Discontinuidad en un punto

Sabemos que una función es continua en un punto de abscisa x = a cuando el límite de la función cuando x tiende a esta abscisa, a, es igual al valor de la función en el punto, o lo que es lo mismo, a la imagen de a por f, f(a). Se formula: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Una función es discontinua en un punto cuando no es continua en dicho punto.

ejemplo 1

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

¿Es discontinua en x = 1?

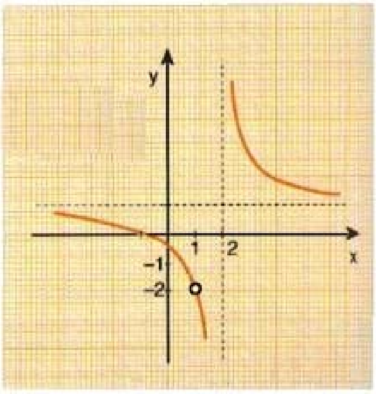
f(1) no existe pues f(x) no está definida en x = 1, por tanto **la función es discontinua en x = 1.**

No obstante, existe el límite de la función en el punto:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x-2)} = \frac{2}{-1} = -2$$

si definiésemos f(1) = −2 (añadimos un punto en la gráfica) la función sería continua en x = 1, por eso diremos que es una discontinuidad *evitable*.



En cambio, en el siguiente ejemplo:

ejemplo 2

La función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \in [-3, 1] \\ -x - 3 & x \in]1, 5[\end{cases}$$

¿Es discontinua en x = 1?

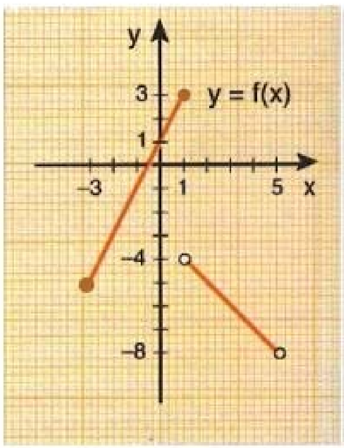
1) $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

2) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x + 1) = 3$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x - 3) = -4$

no existe el $\lim_{x \to 1} f(x)$ y por tanto f(x) **es discontinua en x = 1**

Como vemos, los límites laterales en el punto x = 1 toman valores distintos, pero finitos, la gráfica da un salto en dicho punto, por eso diremos que es una discontinuidad *de salto finito*.



Las discontinuidades mas elementales se presentan:

I. Cuando existiendo y siendo finito el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *no existe* $f(x_0)$.

Observa que si una función tiene una discontinuidad evitable en un punto, se puede definir, o redefinir si ya está definida, dándole el verdadero valor y, entonces, la nueva función es continua en dicho punto.

Fíjate que una discontinuidad evitable "sería" de "salto cero".

II. Cuando existiendo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *finito y* $f(x_0)$, *son distintos.*

En estos casos la discontinuidad se denomina **evitable** y el valor del límite se le llama **verdadero** valor de la función en x_0.

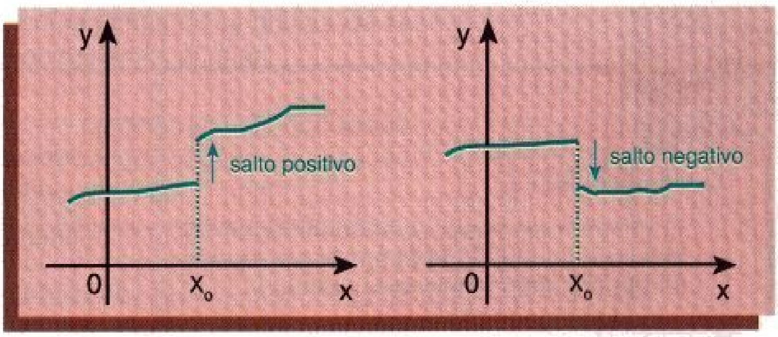
En el ejemplo 1, la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$, siendo el verdadero valor de la función -2.

III. Cuando existiendo los límites laterales, estos son finitos y distintos.

En este caso la discontinuidad se denomina **de salto finito,** siendo el salto la diferencia entre los valores de los límites laterales.

El salto en x_0 es $s = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

Geométricamente el salto es la altura que hay que subir (salto positivo) o bajar (salto negativo) en el punto x_0 al recorrer la gráfica de la función de izquierda a derecha. Figura adjunta:



La función del ejemplo 2 tiene un salto -7 en $x = 1$.

IV. Cuando alguno o los dos límites laterales es infinito.

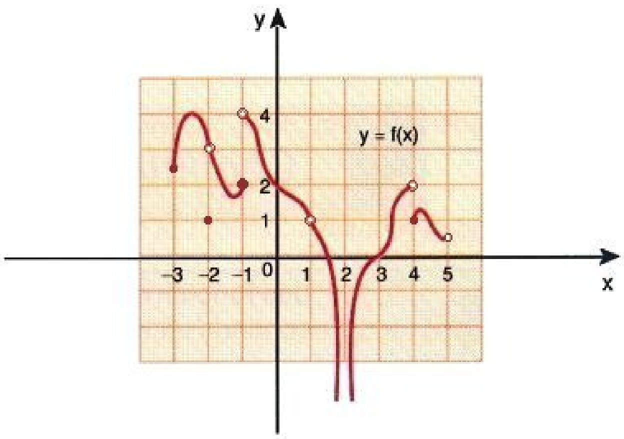
En este caso la discontinuidad se denomina **de salto infinito.**

ejemplo 3

Observa la función de la gráfica adjunta.

a) ¿Está definida en [–3, 5]?

b) Estudia los puntos de continuidad. ¿Qué tipos de discontinuidades son? Calcula el salto o el verdadero valor cuando sea posible.



a) La función no está definida en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 5$, luego el dominio es $D(f) = [-3, 1[\cup]1, 2[\cup]2,5[$

b) $f(x)$ es discontinua en los puntos de abscisa $-2, -1, 1, 2$ y 4.

En $x = -2$ la función presenta una discontinuidad evitable, pues $\lim_{x \to -2} f(x) = 3 \neq 1 = f(-2)$, siendo el verdadero valor de la función 3.

En $x = -1$ la función es continua a la izquierda, pero presenta una discontinuidad de salto finito cuyo valor es:

$$s = \lim_{x \to -1^+} f(x) - \lim_{x \to -1^-} f(x) = 4 - 2 = 2$$

En $x = 4$, la discontinuidad también es de salto finito (aunque es continua a la derecha) siendo el valor del salto -1.

La función presenta en $x = 1$ una discontinuidad evitable cuyo verdadero valor es 1.

La discontinuidad que presenta $f(x)$ en $x = 2$ es de salto infinito.