11 # Successions i límits

En context (pàg. 263)

a) — Sí que l'atraparà. Es tracta d'una progressió geomètrica.

$$S = \frac{a - a \cdot r^{n+1}}{1 - r}$$

— L'experiència també ens diu que l'atraparà. No es va tenir en compte que la sèrie que plantejava Zenó no tendeix a infinit, de manera que, arribat a un cert punt, la superarà.

b) Aquesta activitat pretén que l'alumne reflexioni sobre el concepte de *límit* i el significat que té, en el context de l'univers.

Llenguatge matemàtic (pàg. 265)

Es tracta d'un nombre negatiu de magnitud superior a la de qualsevol nombre real.

Problemes resolts (pàgs. 277 i 278)

1. a) $a_n = 40 + 3(n-1)$

$a_n = \dfrac{2^{n-1}}{10}$

b) $a_n = 40 + 3(12-1) = 73$

$a_n = \dfrac{2^{12-1}}{10} = 204{,}8$

2. a) $C = C_o(1 + i \cdot t)$

b) $C = C_o(1+i)^t$

c) $C_s = 2\,000\,(1 + 0{,}02 \cdot 10) = 2\,400$

$C_c = 2\,000\,(1 + 0{,}02)^{10} = 2\,437{,}98$

3. a) $f(0) = 2 \cdot e^0 = 2$

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} 2e^t = 2e^{+\infty} = +\infty$

4. a) $f(0) = 25 + 50e^0 = 75$

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(25 + 50e^{-t}\right) = 25 + 50e^{-\infty} = 25$

5. $f(t) = \dfrac{20t^2}{t+3}$

a) AV: $Q(x) = 0 \rightarrow t + 3 = 0 \rightarrow t = -3$

Considerem únicament valors positius del temps, de manera que no hi ha asímptotes verticals.

AH: No existeixen, ja que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{20t^2}{t+3} = +\infty$

AO: $m = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{\frac{20t^2}{t+3}}{t} = \dfrac{20t}{t+3} = 20$

$n = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \left(\dfrac{20t^2}{t+3} - 20t\right) = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \left(\dfrac{20t^2 - 20t^2 - 60t}{t+3}\right) = -60$

L'asímptota obliqua és $y = 20x - 60$.

b) $f(t) = \dfrac{20 \cdot 1^2}{1+3} = 5$

6. a) $E(v) = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

La funció està definida per a $|v| < c$.

$\lim\limits_{v \to \pm c} E(v) = +\infty$

Per tant, l'energia divergeix quan la velocitat s'apropa a c.

b) Quan la massa d'un objecte és més gran que 0, fa falta una energia infinita perquè aquest objecte assoleixi la velocitat de la llum.

7. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3 + ax^2 + 16x}$

Si f és discontínua en $x = 4$, aleshores:

$4^3 + 4^2 \cdot a + 16 \cdot 4 = 0 \rightarrow a = -8$

$f(x) = \dfrac{x+2}{x^3 - 8x^2 + 16x}$

AV: $Q(x) = 0 \rightarrow x^3 - 8x^2 + 16x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

AH: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x^3 - 8x^2 + 16x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{x^3 - 8x^2 + 16x} = 0$

La funció presenta dues asímptotes verticals en $x = 0$ i $x = 4$, i tendeix a 0 en $\pm\infty$.

8. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - k}{2x + 4} = \dfrac{3x^2 + 4x - k}{2(x+2)}$

Veiem que el denominador s'anul·la quan $x = -2$. Si volem que hi hagi una discontinuïtat no evitable en aquest punt, necessitem que el numerador no s'anul·li també en $x = -2$.

$3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - k = 0 \rightarrow k = 4$

Si $k = 4$ no tindrem la discontinuïtat no evitable de salt infinit; per tant, la k que busquem és qualsevol excepte 4; $k \neq 4$.

Exercicis i problemes (pàgs. 279 a 282)

1 SUCCESSIONS Pàg. 279

9. a) $a_n = -1 + 3(n-1) = 3n - 4$

b) $a_n = n \cdot (-1)^{n+1}$

10. a) $a_1 = \pi,\ a_2 = \frac{\pi}{2},\ a_3 = \frac{3\pi}{4},\ a_4 = \frac{7\pi}{8},\ a_5 = \frac{13\pi}{16},$

$a_6 = \frac{27\pi}{32},\ a_7 = \frac{53\pi}{64},\ a_8 = \frac{107\pi}{128},$

$a_9 = \frac{213\pi}{256},\ a_{10} = \frac{427\pi}{512}$

b) $a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1,\ a_5 = 1,\ a_6 = 1$

$a_7 = -1,\ a_8 = 1,\ a_9 = 1,\ a_{10} = -1$

11. a) Aritmètica, $d = 5$.

b) Geomètrica, $r = 3$.

c) Geomètrica, $r = 1$; aritmètica, $d = 0$.

d) Cap de les dues.

e) Geomètrica, $r = -3$.

f) Cap de les dues.

12. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + 2\right) = 2$

a) $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1+2n}{n}} = e^2$

b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1+2n}{n}} = \sqrt{2}$

13. a) $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n + c_n) = -2$

b) $\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = -24$

c) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b_n}{a_n}\right) = -\frac{2}{3}$

d) $\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 10$

e) $\lim_{n\to+\infty} (b_n)^{a_n} = 0{,}000\,244$

f) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{c_n} = 1$

14. a) $a_n = n$

$a_{10} = 10 \quad a_{25} = 25$

b) $a_n = 3 + (n-1) \cdot 2{,}5$

$a_{10} = 25{,}5 \quad a_{25} = 63$

15. a) $a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_3 = 4;\ a_4 = 8;\ a_5 = 16;\ a_6 = 32;$
$a_7 = 64;\ a_8 = 128;\ a_9 = 256;\ a_{10} = 512.$

b) $a_n = 2^{n-1}$

c) $a_{64} = 2^{63} = 9{,}2 \cdot 10^{18}$

d) Aquesta quantitat de grans correspon a unes $15 \cdot 10^{12}$ tones de blat, les quals corresponen a més de 21 000 anys de la producció mundial de blat.

16. a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n-8}{5n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5} - \frac{8}{5n}\right) = \frac{4}{5}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1000n}{n^2 - 2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1000}{n-2} = 0$

c) $\lim_{n\to+\infty} (2 - n) = -\infty$

d) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5+2n}{2n} - \frac{n+6}{n+2}\right) =$

$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5+2n}{2n}\right) - \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+6}{n+2}\right) = 1 - 1 = 0$

17. a) $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} = e^4$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - 8}{2n^3} = 1$

c) $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n}\right]^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - 8}{2n^4} = 0$

18. a) $21\,500 = a_1 + d \qquad 23\,000 = a_1 + 4d$

$a_n = 21\,000 + 500n$

b) $a_1 = 21\,000$

c) $a_{10} = 21\,000 + 9 \cdot 500 = 25\,500$

d) $a_n = 21\,000\,(1 + 0{,}023)^n$

$a_5 = 22\,999{,}68$

e) $a_n = 21\,000 \cdot 1{,}023^{n-1}$

f) A partir del sisè any, ja que aleshores per a la primera oferta $a_5 = 23\,500$ i per a la segona, $a_5 = 23\,528{,}67$

19. Com que és una progressió geomètrica:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Considerant les condicions de l'enunciat:

$$\left.\begin{array}{l} 12 = a_1 \cdot r^3 \\ a_1 \cdot r^2 - a_1 \cdot r^4 = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{12}{r} - 12r = 18$$

$$2r^2 + 3r - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1}{2} \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{12}{r^3} \rightarrow \begin{cases} a_{1,1} = 96 \\ a_{1,2} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$a_n = 96 \cdot 0{,}5^{n-1} \quad \text{o} \quad a_n = -\frac{3}{2} \cdot (-2)^{n-1}$$

20. a) És monòtona decreixent i el seu valor tendirà a 0 a mesura que augmenti *n;* per tant, és convergent.

b) $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$

on hem utilitzat que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2 SUCCESSIONS EN LA MATEMÀTICA FINANCERA Pàgs. 279 i 280

21. $C = 7\,000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}0285) = 7\,598{,}5$

22. $C = 15\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0275}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 16\,742{,}06$

23. Interès simple:

$$2C_0 = C_0 \cdot (1 + 0{,}05n) \rightarrow n = 20$$

Interès compost:

$$2C_0 = C_0 \cdot (1 + 0{,}05)^n \rightarrow n = 14{,}21$$

24. a) $\left(1 + \dfrac{0{,}08}{4}\right)^4 = 1{,}0824 \rightarrow \text{TAE} = 8{,}24\,\%$

b) $\left(1 + \dfrac{0{,}078}{12}\right)^{12} = 1{,}0808 \rightarrow \text{TAE} = 8{,}08\,\%$

Per tant, el primer cas genera més interessos.

c) $15\,000 = 12\,000(1 + 0{,}808)^n \rightarrow n \approx 35$ mesos

25. $9\,000 = 7\,000 \cdot (1 + 0{,}07)^n \rightarrow n = 3{,}7$

26. $3\,600 = 3\,000 \cdot (1 + i)^6 \rightarrow i = 3{,}08\,\%$

3 LÍMIT DE FUNCIONS Pàg. 280

27. a) $\lim\limits_{x \to 2} 3^{x-1} = 3^1 = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x - 2} = \sqrt{1} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 90°} \sin x = 1$

d) $\lim\limits_{x \to e} \ln x = 1$

28. a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{3 - x^3} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6 - x}{2 - x} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6 - x}{2 - x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{6x^4 + 1}{2x^4 + 1} = \dfrac{6}{2} = 3$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6x^4 + 1}{2x^3 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-6x^4 + 1}{2x^3 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-3x) = +\infty$

29. a) $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$ quan $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x}{x - 3} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x}{x - 3} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

No existeix el límit.

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2x + 1}$ quan $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

El límit és 1/2.

30. La variable a ha de complir que:

$$-1 = \lim_{x \to 2} \frac{ax^2 - 8}{x} = \frac{4a - 8}{2} = 2a - 4 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

31. a) No existeix. c) 4 e) 0

b) −1 d) 1 f) 2

4 CÀLCUL DE LÍMITS Pàgs. 280 i 281

32. a) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot 3^{x-1} = \dfrac{0}{3} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x + 1)}{2x + 2} = \dfrac{0}{2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 1}{\sqrt{2 - x} + x} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}\,\cancel{(x+2)}(x + 1)}{\cancel{(x+2)}\,\cancel{(x+2)}(x - 3)} = \dfrac{1}{5}$

e) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{(x^2 - 16)^{x-5}} = 9^{0/2} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x - 2}{2 - x}\right)^{\frac{-4}{x}} = (-1)^2 = 1$

33. a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{h(x)}{f(x)}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x^2 - 9) \cdot (x^2 - 1)} = -\dfrac{1}{15}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} (f(x) + g(x)) =$

$= \lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 1) + \lim\limits_{x \to 4} \sqrt{2x - 8} = 15 + 0 = 15$

c) $\lim\limits_{x \to 2} (f(x) - g(x)) =$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 1) + \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{2x - 8} = 15 + \sqrt{-4}$

No existeix.

d) $\lim\limits_{x \to -1} (f(x) \cdot j(x)) =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x^2 - 1)\left((2 + x)^2 - 4\right)}{x} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 6} (f(x) \cdot h(x)) = \lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \dfrac{35}{27}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} [j(x)]^{f(x)} = \lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{(2 + x)^2 - 4}{x}\right]^{x^2 - 1} =$

$= 6^3 = 216$

34. a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+4x^2-18}{x^4+3x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-5x-18}{3x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{3}x=+\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{2x^2}=\frac{3}{2}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x}{500x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{500}=+\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=1$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}:\frac{x-1}{x^2+5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+10}{x^2-x}=2$

g) $\lim_{x\to-2}\frac{x^5-4x^3}{2x^2-8}=\lim_{x\to-2}\frac{(x^2-4)x^3}{(x^2-4)2}=-4$

h) $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^2(x+1)}{(x+2)^2}=-1$

35. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+a}{x-a}-\frac{x^2-a}{x+a}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2ax^2+2ax}{x^2-a^2}=6\rightarrow$

$\rightarrow 2a=6\rightarrow a=3$

5 LÍMITS I ASÍMPTOTES Pàg. 281

36. a) $f(x)=\frac{2}{x-2}$

$Q(x)=0\rightarrow x-2=0\rightarrow x=2$

b) $f(x)=\frac{x}{x^2-16}$

$Q(x)=0\rightarrow x^2-16=0\rightarrow x=\begin{cases}x_1=4\\x_2=-4\end{cases}$

c) $f(x)=\frac{x}{(x+2)(x-3)}$

$Q(x)=0\rightarrow(x+2)(x-3)=0\rightarrow$

$\rightarrow x=\begin{cases}x_1=-2\\x_2=3\end{cases}$

d) $f(x)=\frac{4}{x^3-4x}$

$Q(x)=0\rightarrow x^3-4x=0\rightarrow x=\begin{cases}x_1=0\\x_2=2\\x_3=-2\end{cases}$

37. a) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+2}{2x-3}=\frac{4}{2}=2$

La funció $f(x)$ té una AH en $y=2$.

b) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+2}{2x^2-3}=0$

La funció $f(x)$ té una AH en $y=0$.

c) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+2)^2}{2x^2-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4x+4}{2x^2-3}=\frac{1}{2}$

La funció $f(x)$ té una AH en $y=0{,}5$.

d) $\lim_{x\to\pm\infty}2-\frac{5}{2x+1}=2$

La funció $f(x)$ té una AH en $y=2$.

38. a) $f(x)=\frac{2x+3}{4x-8}$

AV: $Q(x)=0\rightarrow x=2$

AH: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+3}{4x-8}=\frac{1}{2}\rightarrow y=0{,}5$

b) $f(x)=\frac{x^2}{x-4}$

AV: $Q(x)=0\rightarrow x-4=0\rightarrow x=4$

AO: $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-4x}=1$

$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x-4}=4$

$y=x+4$

c) $f(x)=\frac{2x}{x-4}$

AV: $Q(x)=0\rightarrow x-4=0\rightarrow x=4$

AH: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-4}=2\rightarrow y=2$

d) $f(x)=\frac{2-x}{x}$

AV: $Q(x)=0\rightarrow x=0$

AH: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-x}{x}=-1\rightarrow y=-1$

39. a) AV: $Q(x)=0\rightarrow x^2-2=0\rightarrow x=\begin{cases}x_1=\sqrt{2}\\x_2=-\sqrt{2}\end{cases}$

AH: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}=1\rightarrow y=1$

b) AV: $Q(x)=0\rightarrow x^2-2x=0\rightarrow x=\begin{cases}x_1=0\\x_2=2\end{cases}$

AH: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}=0$

c) AV: $Q(x)=0\rightarrow 2x^3+4=0\rightarrow x=-1{,}2599$

AO: $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{2x^4+4x}=\frac{1}{2}$

$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^4+4x}{4x^3+8}=0$

$y=0{,}5x$

d) AV: $Q(x)=0\rightarrow x-1=0\rightarrow x=1$

AO: $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=1$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1} = 1$$

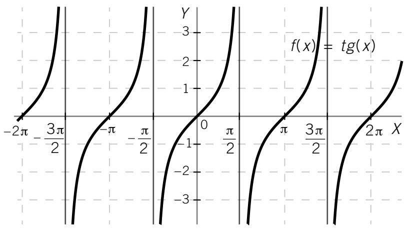
$y = x + 1$

40. a) AH: $\lim_{x\to+\infty}\left(10 + 24\,000 \cdot e^{-3t}\right) = 10$

b) La població disminuirà a mesura que passi el temps; el nombre d'animals s'anirà aproximant a 10 exemplars.

41. a) $Q(x) = 0 \to \cos x = 0 \to x = 180^\circ \cdot (k + 90^\circ)$

b)



6 CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

Pàgs. 281 i 282

42. a) Contínua.

b) Discontinuïtat evitable.

c) Discontínua de salt infinit.

d) Discontinuïtat essencial.

43. a) $f(x) = x^2 + 4x - 2$

Com que és una funció polinòmica, no presenta cap discontinuïtat.

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$

La funció presenta una discontinuïtat en el punt en el qual s'anul·la el denominador:

$Q(x) = 0 \to x = -5$

44. a) La funció presenta una discontinuïtat de salt finit en el quilòmetre 300.

b) No tindria sentit, ja que no seria lògic tenir un preu infinit.

45. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \le -2 \\ x & \text{si } -2 < x \le 2 \\ -3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Per comprovar la continuïtat de la funció, estudiem els límits laterals en els punts $x = -2$ i $x = 2$.

Estudiem $x = -2$:

$\lim_{x\to-2^-} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = -2$

La funció no és contínua en $x = -2$, on presenta una discontinuïtat evitable.

Ara estudiem $x = 2$:

$\lim_{x\to2^-} f(x) = 2$

$\lim_{x\to2^+} f(x) = -4$

Els límits no coincideixen, de manera que la funció no és contínua en $x = 2$, on presenta una discontinuïtat evitable.

46. a) La funció presenta una discontinuïtat de salt infinit en $x = 2$ i $x = -2$, i una discontinuïtat evitable en $x = 0$.

$\lim_{x\to0} f(x)$ no existeix.

$\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$

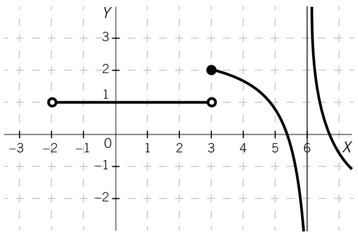
b) La funció presenta una discontinuïtat de salt infinit en $x = 0$ i una de salt finit en $x = 2$, i és contínua en $x = -2$.

$\lim_{x\to0} f(x)$ no existeix.

$\lim_{x\to2} f(x)$ no existeix.

$\lim_{x\to-2} f(x) = f(-2)$.

47.



48. $f(x) = \begin{cases} kx + m & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{2k}{x-1} & \text{si } 0 < x < 3 \\ kx^2 - m + 5x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to0^-}(kx + m) = \lim_{x\to0^+}\dfrac{2k}{x-1} \to m = -2k \\ \lim_{x\to3^-}\dfrac{2k}{x-1} = \lim_{x\to3^+}\left(kx^2 - m + 5x\right) \to k = 9k - m + 15 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} m = -2k \\ m = 8k + 15 \end{array}\right\} \to -2k = 8k + 15 \to k = -\frac{3}{2} \to m = 3$$

SÍNTESI

Pàg. 282

49. a) $\lim_{x\to1^-}\left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = +\infty$

$\lim_{x\to1^+}\left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = +\infty$

b) $\lim_{x\to\infty}\left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = +\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left| \dfrac{x^2}{2x-2} \right| = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left| \dfrac{x^2}{2x-2} \right| = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \left| \dfrac{x^2}{2x-2} \right| = 2$

f) $\lim\limits_{x \to -2} \left| \dfrac{x^2}{2x-2} \right| = \dfrac{2}{3}$

50. a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2+2x-a}{x^2-bx+2} \right) = \dfrac{8-a}{6-2b} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 8-a=0 \rightarrow a=8 \\ 6-2b=0 \rightarrow b=3 \end{array}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2} \right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+4)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+4}{x-1} = 6$

51. a) La funció presenta en $x = 1$ i en $x = 4$ una discontinuïtat de salt finit, i en $x = 2$ una discontinuïtat evitable.

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} 2x = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} 4 = 4$

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 4 = \lim\limits_{x \to 2^+} (-2x+8) = 4$

e) $\lim\limits_{x \to 4^-} (-2x+8) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 4^+} (x-5)^2 = 1$

g) $\lim\limits_{x \to 4} (-2x+8)$ no existeix.

h) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existeix.

i) $\lim\limits_{x \to 6} (x-5)^2 = 1$

52. $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } 0 < x < 3 \\ e^{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} (2x+4) = 4$

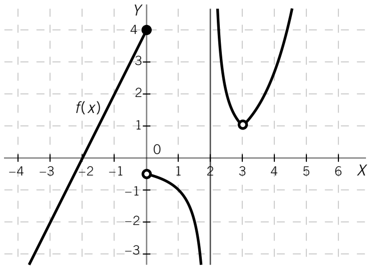
$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x-2} = -0{,}5$

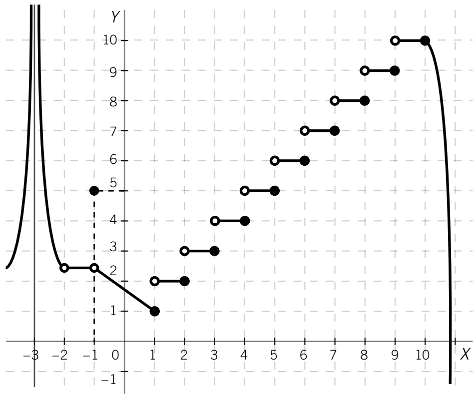
$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-2} = 1$

$\lim\limits_{x \to 3+} e^{x-3} = 1$

b) La funció té una discontinuïtat de salt finit en $x = 0$, una discontinuïtat de salt infinit en $x = 2$ i és contínua en $x = 3$.

c) No.

d) 

53. 

54. a) Sí, per exemple la funció tangent.

b) No, una funció pot tenir com a màxim 2 asímptotes horitzontals, una en menys infinit i una altra en més infinit.

c) No, en $\pm\infty$ mai no tendiran a un valor finit.

d) No, només en pot tenir una.

Avaluació (pàg. 284)

1. La suma d'angles interns d'un hexàgon és de 720°. La suma dels 6 primers termes equival a:

$$S_n = \frac{(a_1+a_6)\cdot n}{2} \rightarrow 720 = \frac{(40+a_6)\cdot 6}{2} \rightarrow a_6 = 200$$

$$d = \frac{a_6 - a_1}{5} = \frac{200-40}{5} = 32$$

$a_1 = 40$; $a_2 = 72$; $a_3 = 104$; $a_4 = 136$; $a_5 = 168$; $a_2 = 200$

2. a) $r = \dfrac{18}{54} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$

$a_n = 54 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

b) $a_8 = 54 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^8 = 0{,}0247$ $\quad a_{10} = 54 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10} = 0{,}0027$

3. a) $d = \dfrac{15}{3} = 5$

$a_1 = 42 - 5 = 37$

b) $a_n = 37 + 5n$

4. $I = C_0 \cdot i \cdot t \rightarrow C_0 = \dfrac{I}{i \cdot t} = \dfrac{9\,000}{0{,}04 \cdot \dfrac{5}{3}} = 135\,000$

5. $C = C_0\,(1+i)^t$

$C_1 = 5\,000\,(1+0{,}02)^{10} = 6\,094{,}97$

$i_2 = \sqrt[15]{\dfrac{C}{C_0}} - 1 = \sqrt[15]{\dfrac{6\,094{,}97}{4\,000}} - 1 = 0{,}0285 = 2{,}85\,\%$

6. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6-4n^2}{2n^2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2+3n-2}{2n^3-4n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3-4n}{4n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2} = +\infty$

7. a) $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{6}{0^-} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{6}{0^+} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1} \cdot \dfrac{x-7}{x-3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2-5x-14}{x^2-2x-3}\right) = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-8x^4+2}{2x^2+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$

8. a) AV: $Q(x) = 0 \to x = \pm\sqrt{2}$

AO: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-3x}{5x^3-10x} = 0{,}4$

$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{17x}{5x^2-10} = 0$

$y = 0{,}4x$

b) AV: $Q(x) = 0 \to x = 0$

AO: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-5}{2x^2} = 2$

$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-5}{2x} = 0$

$y = 2x$

c) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{-2x^2+4x-1}{-x+2}$

AV: $Q(x) = 0 \to x = 2$

AO: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2+4x-1}{-x^2+2x} = 2$

$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-1}{-x+2} = 0$

$y = 2x$

d) $f(x) = \dfrac{4x^2-5}{x^2+2}$

AV: $Q(x) \neq 0$

AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^2-5}{x^2+2} = 4 \to y = 4$

9. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

c) $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = 0$

e) $\lim\limits_{x\to-4} f(x)$ no existeix.

f) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 2$

g) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 4$

h) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ no existeix.

i) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \infty$

j) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \infty$

k) $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \infty$

l) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -2$

En $x = -4$ hi ha una discontinuïtat de salt infinit; en $x = -2$, una discontinuïtat de salt finit; en $x = 0$, una discontinuïtat evitable, i en $x = 3$, una discontinuïtat de salt infinit.

10. a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 5-x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{2x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} x+1 = 1$

La funció presenta una discontinuïtat de salt infinit en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to2^-} x+1 = 3$

$\lim\limits_{x\to2^+} 5-x = 3$

$\lim\limits_{x\to2} 5-x = 3$

La funció és contínua en $x = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(x+1) = 2$

$\lim\limits_{x\to1^+} 2 = 2$

La funció és contínua.

ZONA + (pàg. 285)

— **Velocitat de la grip**

$$P(4) = \frac{2}{1 + 3e^{-0,8 \cdot 4}} = 1,782$$

$$P(\infty) = \frac{2}{1 + 3e^{-0,8 \cdot \infty}} = 2$$

En què els resultats estan expressats en milers de persones.

— **L'evolució del preu d'un article**

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = \dfrac{a \cdot 1 + 8}{1 + b} = 6,5 \\ P(2) = \dfrac{a \cdot 2 + 8}{2 + b} = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}$$

$P(t) = \dfrac{5t + 8}{t + 1}$ és l'expressió que determina l'evolució del preu del nostre component informàtic.

L'evolució a llarg termini dels preus dels productes no respon a models senzills com el que hem vist; per exemple, el preu del petroli varia substancialment quan hi ha inestabilitat política, guerres, crisi econòmica, sobreproducció, una forta competència amb altres fonts energètiques, etc. Per a predir-ne l'evolució del preu, s'han d'elaborar models més complexos.