PROGRESSIONS

9.1 – Progressions aritmètiques

Hi ha successions en que a partir del primer terme tots els altres es troben sumant una quantitat fixa al terme anterior, aquí hi ha alguns exemples:

La successió dels naturals: 1, 2, 3, 4, 5, . . . que a partir del 1, cada un dels altres termes es troben sumant 1 al seu anterior. Tots el múltiples de 10 ordenats: 10, 20, 30, 40, . . . que a partir de 10, cada terme es troba sumant 10 al seu anterior. El capital produït en els diversos anys per 100 euros imposats al 5% simple són: 100, 105, 110, 115, 120, . . .

Progressió aritmètica
Una progressió aritmètica és una successió que cada terme excepte el primer, es troba sumant una quantitat fixa al terme anterior.

Diferència d'una progressió aritmètica
La quantitat fixa que s'ha de sumar a cada terme d'una progressió aritmètica per obtenir el terme següent es diu diferència.

Fixeu-vos que totes les successions següents són progressions aritmètiques:

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...	és de diferència 1
b) 10, 20, 30, 40, 50, ...	és de diferència 10
c) 100, 105, 110, 115, 120, . . .	és de diferència 5
d) 100, 95, 90, 85, 80, 75, . . .	és de diferència -5
e) 0, -2, -4, -6, -8, -10, . . .	és de diferència -2
f) $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, . . .	és de diferència $\sqrt{2}$
g) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, . . .	és de diferència 0

9.2 – Terme general d'una progressió aritmètica

Coneixent el primer terme i la diferència d'una progressió aritmètica es pot trobar qualsevol dels seus termes. Si el primer terme és a_1 i la diferència d, calcularem el terme general a_n d'aquesta forma:

El primer terme és a_1
El segon terme és $a_2 = a_1 + d$
El tercer terme és $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$
El quart terme és $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$
El cinquè terme és $a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d$

I així successivament s'aniran sumant una d a cada terme per trobar el terme següent. Així, a_1 més una d dóna a_2, a_1 més dues d dóna a_3, a_1 més tres vegades d dóna a_4, a_1 més quatre vegades d dóna a_5, i evidentment a_1 més 'n menys una' d dóna a_n. Es pot indicar que:

El terme general d'una progressió aritmètica en funció de la diferència i el primer terme és

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Els termes generals dels exemples del paràgraf anterior són:

a) $a_n = 1 + (n-1) = n$
b) $a_n = 10 + 10(n-1) = 10n$
c) $a_n = 100 + 5(n-1) = 5n + 95$
d) $a_n = 100 - 5(n-1) = 105-5n$
e) $a_n = 0 -2(n-1) = -2n-2$
f) $a_n = 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\ (n-1) = \sqrt{2}\,(n+1)$
g) $a_n = 2 + 0(n-1) = 2$

9.3 – Suma de n termes d'un progressió aritmètica

Agafem com exemple la progressió aritmètica 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64,... i d'aquesta, considerem solament els 10 primers termes. Ens hem d'adonar que:

$$(10 + 64) = (16 + 58) = (22 + 52) = (28 + 46) = (34 + 40)$$

o sigui que la suma del primer amb l'últim coincideix amb la suma del segon amb el penúltim i amb la suma del tercer amb l'antepenúltim, etc.

Si haguéssim considerat els nou primers termes de la successió, passaria que

$$(10 + 58) = (16 + 52) = (22 + 46) = (28 + 40) = (34 + 34)$$

Les igualtats anteriors són certes perquè en passar d'un parèntesi a l'altre, el primer sumand se li suma la diferència i, en canvi, al segon sumand se li resta, compensant-se l'un amb l'altre.

Anem ara a sumar els n termes d'una progressió aritmètica qualsevol, així:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Com que la suma de reals és associativa i commutativa donarà igual si es suma així:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Si es suma les dues igualtats membre a membre es pot escriure:

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \;...\; + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Pel que s'ha explicat més amunt el parèntesis anteriors són iguals, i com que hi ha n parèntesis, l'expressió anterior es pot escriure:

$$2\,S_n = n(a_1 + a_n)$$

o bé:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Que d'una forma sintètica es pot expressar com:

> *La **suma dels n primers termes** d'una progressió aritmètica és igual a la semisuma del primer i l'últim terme multiplicada pel nombre de termes.*

La suma dels n primers termes de cada un dels exemples dels dos paràgrafs anteriors és:

a) $a_n = n; \quad S_n = \dfrac{(1+n)n}{2} = \dfrac{n+n^2}{2}$

b) $a_n = 10n; \quad S_n = \dfrac{(10+10n)n}{2} = 5n+5n^2$

c) $a_n = 5n+95; \quad S_n = \dfrac{(100+5n+95)n}{2} = \dfrac{195n+5n^2}{2}$

d) $a_n = 105-5n; \quad S_n = \dfrac{(100+105-5n)n}{2} = \dfrac{205n-5n^2}{2}$

e) $a_n = 2-2n; \quad S_n = \dfrac{(0+2-2n)n}{n} = n-n^2$

f) $a_n = \pi n; \quad S_n = \dfrac{(\pi+\pi n)n}{2} = \dfrac{\pi n+\pi n^2}{2}$

g) $a_n = 2; \quad S_n = \dfrac{(2+2)n}{2} = 2n$

9.4 – Progressions geomètriques

Hi ha successions en que a partir del primer terme tots els altres es troben multiplicant al terme anterior per una quantitat fixa. Presentem alguns exemples:

Les potències de 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . . que comencen pel 1 i es van multiplicant cada terme per 2. La successió de decimals 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001, . . . comença per 1 i ara es va multiplicant per 0,1. El capital produït en els diversos anys per 100 euros imposats al 5% compost són: 100, 105, 110,25, 115,7625, 121,550625, . . . ara cada vegada es multiplica per 1,05.

> ***Progressió geomètrica***
> *Una progressió geomètrica és una successió que cada terme excepte el primer, es troba multiplicant una quantitat fixa al terme anterior.*

> ***Raó d'una progressió geomètrica***
> *La quantitat fixa que s'ha de multiplicar a cada terme d'una progressió geomètrica per obtenir el terme següent se li diu raó de la progressió.*

Fixeu-vos que totes les progressions següents són progressions geomètriques:

a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, . . . és de raó 2
b) 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001, . . . és de raó 0,1
c) 100, 105, 110,25, 115,7625, 121,550625, . . és de raó 1,05
d) 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, . . . és de raó -1
e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \ldots$ és de raó ½
f) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, . . . és de raó 1
g) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots$ és de raó -1/3

9.5 – Terme general d'una progressió geomètrica

Coneixent el primer terme i la raó d'una progressió geomètrica es pot trobar qualsevol dels seus termes. Si el primer terme és a_1 i la raó r, calcularem el terme general a_n de la següent forma:

El primer terme és	a_1
El segon terme és	$a_2 = a_1 r$
El tercer terme és	$a_3 = a_2 r = a_1 r^2$
El quart terme és	$a_4 = a_3 r = a_1 r^3$
El cinquè terme és	$a_5 = a_4 r = a_1 r^4$

I així successivament s'anirà multiplicant per r a cada terme per trobar el següent. Així, a_1 per r dóna a_2, a_1 per r i per r (r^2) dóna a_3, a_1 per r per r i per r (r^3) dóna a_4, i evidentment a_1 per r elevat a 'n menys u' dóna a_n, i es pot indicar que:

> *El* ***terme general d'una progressió geomètrica*** *en funció de la raó i el primer terme és*
> $$\mathbf{a_n = a_1\, r^{n-1}}$$

Els termes generals dels exemples del paràgraf anterior són:

a) $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

b) $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10^{n-1}}$

c) $a_n = 100 \cdot (1{,}05)^{n-1}$

d) $a_n = 1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$

e) $a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

f) $a_n = \square \cdot 1^{n-1} = 2$

g) $a_n = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3^2}{(-3)^{n-1}} = \frac{1}{(-3)^{n-3}} = (-3)^{3-n}$

9.6 – Suma de n termes d'una progressió geomètrica

Considerem a una progressió geomètrica de primer terme a_1 i de raó r. La suma dels n primers termes serà:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (*)$$

Si es multiplica cada terme de la igualtat anterior per r donarà:

$$rS_n = a_1 r + a_2 r + a_3 r + \ldots + a_{n-2} r + a_{n-1} r + a_n r$$

Però cada terme multiplicat per r dóna el terme següent:

$$rS_n = a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_{n-1} + a_n + a_n r \quad (*)$$

Si es resta membre a membre les igualtats (*) quedarà

$$rS_n - S_n = a_n r - a_1$$

Traient S_n factor comú : $S_n(r - 1) = a_n r - a_1$

O bé, si r és diferent de 1:

> *La **suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica** es pot troba per*
>
> $$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

La suma dels n primers termes de cada un dels exemples dels dos paràgrafs anteriors és:

a) $a_n = 2^{n-1}$; $r = 2$; $S_n = \frac{2^{n-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$

b) $a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$; $r = \frac{1}{10}$; $S_n = \frac{\frac{1}{10^{n-1}} \frac{1}{10} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{-\frac{9}{10}} = \frac{10^n - 1}{9 \cdot 10^{n-1}}$

c) $a_n=100(1{,}05)^{n-1}$; $r=1{,}05$; $S_n=\dfrac{100(1{,}05)^{n-1}\cdot 1{,}05-100}{1{,}05-1}=\dfrac{100(1{,}05^n-1)}{0{,}05}$

d) $a_n=(-1)^{n-1}$; $r=-1$; $S_n=\dfrac{(-1)^{n-1}(-1)-1}{-1-1}=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$

e) $a_n=\dfrac{1}{2^n}$; $r=\dfrac{1}{2}$; $S_n=\dfrac{\frac{1}{2^n}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$

f) $a_n=2$; $r=1$; no es pot calcular per la fórmula

g) $a_n=(-3)^{3-n}$; $r=-\dfrac{1}{3}$; $S_n=\dfrac{(-3)^{3-n}\left(-\frac{1}{3}\right)-9}{-\frac{1}{3}-1}=\dfrac{(-3)^{3-n}+27}{4}$

8.7 - Exercicis

1 - Les progressions aritmètiques següents venen donades pel primer terme i la diferència. Escriu els 5 primers termes i calcula el terme general de cada una.
a) $a_1 = 3$, $d = 4$ b) $a_1 = 10$, $d = -4$ c) $a_1 = 3/2$, $d = 4/5$
d) $a_1 = 0$, $d = -1/4$ e) $a_1 = -13$, $d = -2{,}2$ f) $a_1 = 3$, $d = \sqrt{2}$

2 – Classifica les següents successions segon siguin progressions aritmètiques, progressions geomètriques, o bé ni una cosa ni l'altre:

$a)\quad 5, 12, 19, 26, \ldots \qquad b)\quad \frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{4}{11}, \frac{5}{15}, \ldots \qquad c)\quad 2, -2, 2, -2, \ldots$

$d)\quad 20, 15, 10, 5, \ldots \qquad e)\quad 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots \qquad f)\quad 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots$

3 – Calcula el terme general de les successions anteriors que siguin progressions aritmètiques o geomètriques.

4 – Les progressions geomètriques següents venen donades pel primer terme i la raó. Escriu els 5 primers termes i calcula el terme general de cada una.
a) $a_1 = 3$, $r = 2$ b) $a_1 = -3$, $r = ½$ c) $a_1 = 2/3$, $r = ½$
d) $a_1 = \sqrt{8}$, $r = \sqrt{2}$ e) $a_1 = 1/4$, $r = -2$ f) $a_1 = 0{,}35$, $r = 1/100$

5 – En una progressió aritmètica el primer terme és -15 i la diferència és 1,5, a quin lloc de la progressió està el terme 30?

6 – En una progressió aritmètica el terme del lloc vint-i-un és 23 i el terme del lloc seixanta-cinc és 56. Calcula la diferència.

7 – El primer graó d'una escala té una alçada de 18 cm. Cada un dels altres graons tenen una alçada de 25 cm. Les alçades de cada graó respecte del inici de l'escala formen una progressió aritmètica? Explica-ho. A quina alçada puja aquesta escala si té 124 graons?

8 – Una successió està definida per recurrència així: $a_1 = 15$ i $a_n = a_{n-1} - 12{,}5$, de quin tipus de successió es tracte?. Quin serà el terme del lloc 1254?

9 – Una successió té per terme general a $a_n = 2/5 - 3n/5$. Es tracte d'una progressió aritmètica?. Per què?

10 – En una progressió geomètrica el primer terme és 4 i la raó és $\sqrt{2}$, a quin lloc de la progressió està el terme 64?

11 – En una progressió geomètrica el quart terme és 3 i el terme setze és 243. Calcula la raó.

12 - Una successió està definida per recurrència així: $a_1 = 1$ i $a_n = 0{,}8 * a_{n-1}$, de quin tipus de successió es tracte?. Quin serà el terme del lloc 12?

13 – Troba una fórmula per trobar la suma dels n primers temes d'una progressió geomètrica en funció del primer terme, de la raó, i de n.

14 - Una successió té per terme general a $a_n = \frac{3}{2^{n+1}}$. Es tracte d'una progressió geomètrica?. Per què?

15 – Un maharajà va regalar a l'inventor dels escacs un gra de blat pel primer quadre del tauler, dos grans pel segon, quatre pel tercer, i així anava doblant el grans fins arribar al quadrat 64 del tauler. Quants grans de blat li va regalar? Suposant que cinc grans de blat pesen un gram, quantes tones de blat li va regalar?

16 – Calcula la suma dels 10 primers termes d'una progressió geomètrica que el primer terme és 1 i la raó 1/3.

17 – Demostra que la successió: 0,3 , 0,03 , 0,003 , 0,0003 , . . . és una progressió geomètrica. Quina és la raó? Quina és la suma dels 5 primers termes?.

18 – Partim d'un quadrat d'un metre de costat. Si unim el punts mitjos dels costats obtenim un altre quadrat. Si tornem a fer el mateix amb el quadrat obtingut obtenim un tercer quadrat, i així successivament.
Quin tipus de successió formen els costats dels quadrats? I la dels perímetres? I la de les àrees?.
Quan val la suma dels 8 primers perímetres? I la suma de les 8 primeres àrees?