1 # Nombres reals

En context (pàg. 23)

a) Resposta suggerida:

Es pot consultar la pàgina web següent per investigar sobre l'evolució de les xifres del nombre π:

http://links.edebe.com/fkfa

b) Resposta suggerida:

— En matemàtica financera, el nombre e s'utilitza per a calcular l'interès continu a partir de la fórmula següent: $C = C_0\, e^{rt}$, en què C és el capital final de la inversió, C_0 és el capital inicial, r és l'interès anual compost en tant per un i t és el temps transcorregut des de l'inici de la inversió.

— La façana de grans edificis des del Partenó a la Gran Mesquita de Kairouan i tot el camí al llarg de fites modernes com l'Òpera de Sidney i la Galeria Nacional de Londres.

c) Resposta oberta a manera de reflexió individual que pot servir d'introducció als nombres reals.

Internet (pàg. 36)

— $\log_a x^n = n \log_a x$

Efectuem $\log_a x = p \rightarrow a^p = x$. Si elevem a n aquesta expressió, tenim que:

$$a^{np} = x^n \rightarrow \log_a a^{np} = \log_a x^n \rightarrow np = \log_a x^n$$
$$\rightarrow n \log_a x = \log_a x^n \rightarrow \log_a x^n = n \log_a x$$

— $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{\log_a x}{n}$

Sabem que $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \Rightarrow \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$; per tant, efectuem:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{1/n} = \frac{1}{n}\log_a x = \frac{\log_a x}{n}$$

En què, en la segona igualtat, hi hem aplicat la propietat del logaritme de la potència.

Problemes resolts (pàg. 37)

1. Ho demostrem per reducció a l'absurd; és a dir, $\sqrt{5}$ considerem que no és irracional. Si no és irracional, ha de ser obligatòriament racional; aleshores, ha de ser igual a una fracció. Així: $\sqrt{5} = \dfrac{p}{q}$

Podem suposar que el màxim comú divisor de p i q és 1; és a dir, que no tenen factors comuns i, per tant, són primers relatius. Elevem al quadrat i operem:

$$5 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 5q^2 = p^2$$

Per tant, p^2 ha de ser múltiple de 5, la qual cosa implica que p també és un múltiple de 5. És a dir, $p = 5k$, per a un cert k. Substituïm aquest valor de p en l'expressió anterior i simplifiquem un 5 d'aquesta igualtat:

$$5q^2 = (5k)^2 \Rightarrow q^2 = 5k^2$$

Aquesta expressió ens assegura que q^2 és múltiple de 5 i, per tant, també ho és q.

I aquí hi ha l'absurd: havíem suposat que p i q no tenien factors comuns i hem arribat al fet que tots dos són múltiples de 5; és a dir, que tenen al 5 com a factor comú. Així, el seu M.C.D. ha de ser almenys 5.

És la contradicció que buscàvem.

2. L'aproximació per arrodoniment de $\sqrt{2}$ a les deumil·lèsimes és 1,4142, ja que la xifra següent és 1 i és inferior a 5; per tant, aproximem per defecte.

Ara $(1{,}4142)^2 = 1{,}99996164 < 2$, en què observem que és un valor molt proper a 2.

Calculem l'error absolut i l'error relatiu comesos:

$$\varepsilon_a = |\text{valor exacte} - \text{valor aproximat}| = |2 - 1{,}99996164| =$$
$$= 3{,}836 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\text{valor exacte}} \cdot 100 = \frac{3{,}836 \cdot 10^{-5}}{2} \cdot 100 = 0{,}001918\,\%$$

3. Hi apliquem les propietats dels logaritmes:

a) En la primera igualtat, hi apliquem la propietat del logaritme d'un radical i en la segona, la propietat del logaritme d'un producte:

$$\ln\sqrt{ab} = \frac{\ln ab}{2} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \frac{0{,}6 + 2{,}4}{2} = 1{,}5$$

b) En la primera igualtat, hi apliquem la propietat del logaritme d'un radical i en la segona, la propietat del logaritme d'un quocient. En la tercera igualtat, hi apliquem la propietat del logaritme del producte per ln ab i la propietat del logaritme d'una potència per ln e^2. Finalment, ln e =1.

$$\ln\sqrt[3]{\frac{ab}{e^2}} = \frac{\ln\dfrac{ab}{e^2}}{3} = \frac{\ln ab - \ln e^2}{3} = \frac{\ln a + \ln b - 2\ln e}{3} =$$
$$= \frac{0{,}6 + 2{,}4 - 2}{3} = \frac{1}{3}$$

4. Operem en tots dos costats de la igualtat per obtenir un logaritme a cada costat del signe igual:

$$\log x + \log(x + 3) = 2\log(x + 1)$$
$$\log[x(x + 3)] = \log(x + 1)^2$$

Perquè tots dos costats siguin iguals, s'ha de complir que:

$$x(x + 3) = (x + 1)^2 \rightarrow x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x = 1$$

Exercicis i problemes (pàgs. 38 a 42)

1 EL CONJUNT DELS NOMBRES REALS — Pàgs. 38 i 39

5. a) -3 és un nombre enter $\rightarrow -3 \in \mathbb{Z}$

b) π és un nombre irracional $\rightarrow \pi \in \mathbb{I}$

c) $\dfrac{-19}{5}$ és una fracció $\rightarrow \dfrac{-19}{5} \in \mathbb{Q}$

d) 0,36666… és un nombre decimal periòdic mixt $\rightarrow$ 0,366 6… $\in \mathbb{Q}$

e) $-\sqrt{6} = -2{,}449\,489...$ és un nombre irracional $\rightarrow -\sqrt{6} \in \mathbb{I}$

f) $\dfrac{5}{4}$ és una fracció $\rightarrow \dfrac{5}{4} \in \mathbb{Q}$

g) $-5{,}777\,7$ és un nombre decimal exacte $\rightarrow -5{,}777\,7 \in \mathbb{Q}$

h) $\dfrac{1+\sqrt[3]{4}}{2}$ és un nombre irracional, ja que $\sqrt[3]{4}$ és irracional; aleshores, si hi sumem 1 i ho dividim entre 2, el resultat també serà irracional $\rightarrow \dfrac{1+\sqrt[3]{4}}{2} \in \mathbb{I}$

6. Per resoldre aquesta operació, calculem les fraccions generatrius de cada decimal i operem amb aquests resultats:

$$1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2};\ 5{,}0\widehat{3} = \frac{503-50}{90} = \frac{453}{90} = \frac{151}{30};$$

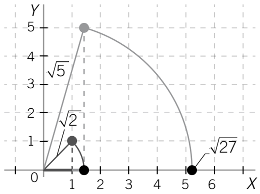
$$6{,}\widehat{6} = \frac{66-6}{9} = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow 1{,}5 + 5{,}0\widehat{3} - 6{,}\widehat{6} = \frac{3}{2} + \frac{151}{30} - \frac{20}{3} = \frac{-4}{30} = \frac{-2}{15}$$

7. Amb l'aplicació del teorema de Pitàgores, construïm el triangle rectangle de catets 5 i $\sqrt{2}$ unitats:

$$\sqrt{27} = \sqrt{5^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

En què, per a $\sqrt{2}$ també podem construir el triangle rectangle de catets 1 i 1 unitats: $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$



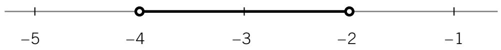
8. Col·loquem cada nombre real en la taula següent, en què u = unitats, d = dècimes, c = centèsimes, m = mil·lèsimes i dm = deumil·lèsimes.

	u	d	c	m	dm
$2{,}64\widehat{5}$	2	6	4	5	5
5/3	1	6	6	6	6
$-\sqrt{3}$	–1	7	3	2	0
2,56	2	5	6	0	0
$\sqrt{7}$	2	6	4	5	7
$\sqrt{2}$	1	4	1	4	2
$1{,}\widehat{74}$	1	7	4	7	4

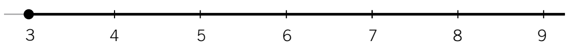
Si observem la taula, veiem que l'ordre dels nombres reals de més gran a més petit és:

$$\sqrt{7} > 2{,}64\widehat{5} > 2{,}56 > 1{,}\widehat{74} > \frac{5}{3} > \sqrt{2} > -\sqrt{3}$$

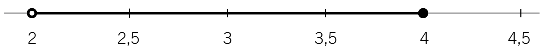
9. a)



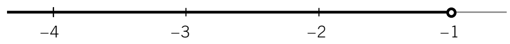
b)



c)

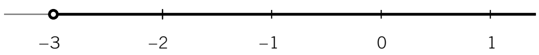


d)

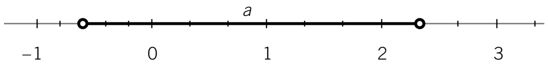


e)

f)

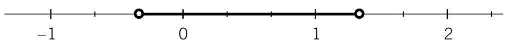


g)

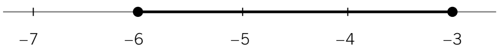


h) En aquest cas, trobem les fraccions generatrius de cada nombre decimal periòdic pur i després els representem en la recta real.

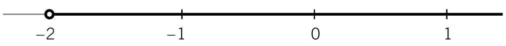
$$-0{,}\widehat{3} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3};\ 1{,}\widehat{4} = \frac{14-1}{9} = \frac{13}{9}$$



10. a) $[-6, -3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq -3\}$



b) $(-2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$



11. $\dfrac{24}{7} = 3{,}428\,571...$

a) Suprimim les xifres a partir de la tercera; per tant, l'aproximació és 3,428.

b) 3,428 571… aproximat per arrodoniment a les centèsimes és 3,43, ja que la tercera xifra és més gran que 5; per tant, sumem una unitat a les centèsimes.

12. a) Passem a notació científica tots els factors:

$$700\,000 = 7 \cdot 10^5;\ 0{,}000\,35 = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$$

Aleshores:

$$(700\,000 : 0{,}000\,35) \cdot 0{,}4 \cdot 10^3 = (7 \cdot 10^5 : 3{,}5 \cdot 10^{-4}) \cdot$$
$$\cdot\, 0{,}4 \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^9 \cdot 0{,}4 \cdot 10^3 = 0{,}8 \cdot 10^{12} = 8 \cdot 10^{11}$$

b) Hem de posar cada nombre amb la mateixa potència de 10; en aquest cas, fem que totes siguin potència 10^{-2}:

$$5 \cdot 10^{-4} = 0{,}05 \cdot 10^{-2};\ 84 \cdot 10^{-3} = 8{,}4 \cdot 10^{-2}$$

Aleshores:

$$0{,}315 \cdot 10^{-2} - 0{,}05 \cdot 10^{-2} + 8{,}4 \cdot 10^{-2} = 8{,}665 \cdot 10^{-2}$$

13. Tenim que el nombre π és un nombre irracional i el nombre 1,618 033 989… també és irracional. Per tant, com que els seus decimals són infinits i diferents en els dos nombres, la resta entre tots dos també és un nombre irracional.

14. La resta de dos nombres irracionals no ha de ser necessàriament sempre un irracional. En cas que els nombres que s'han de restar siguin iguals, el resultat de la resta serà 0, i aquest no és un nombre irracional.

— Si elevem un nombre irracional al quadrat, no ha de donar com a resultat necessàriament un nombre irracional. En posem un contraexemple:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

En què 2 és un nombre racional.

15. En aquest exemple, els tres nombres decimals són racionals, amb la qual cosa es poden expressar com una fracció cadascun d'ells. En conseqüència, la resta de dues fraccions donarà una altra fracció que, dividida entre una altra fracció, donarà com a resultat una última fracció. Per tant, l'expressió serà un nombre racional.

16. Comprovem la propietat calculant la suma $6{,}\widehat{6} + 3{,}\widehat{3}$:

$$6{,}\widehat{6} + 3{,}\widehat{3} = \frac{66-6}{9} + \frac{33-3}{9} = \frac{60}{9} + \frac{30}{9} = \frac{90}{9} = 10$$

En què el resultat, que és 10, és un nombre enter.

17. La condició necessària perquè una arrel tingui solució és que el radical sigui positiu o igual a 0. Tenint aquesta condició en compte, efectuem els apartats de l'exercici:

a) $\sqrt{m+3}$ té solució si $m + 3 \geq 0 \rightarrow m \geq -3$

Per tant, l'interval de valors que pren m és $[-3, +\infty)$.

b) $\sqrt{2-m}$ té solució si $2 - m \geq 0 \rightarrow 2 \geq m$

Per tant, l'interval de valors que pren m és $(-\infty, 2]$.

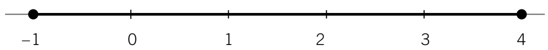
c) $\sqrt{2m-1}$ té solució si $2m - 1 \geq 0 \rightarrow m \geq 1/2$

Per tant, l'interval de valors que pren m és $[1/2, +\infty)$.

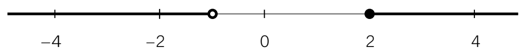
d) $\sqrt{\dfrac{2+m}{3}}$ té solució si $(2 + m)/3 \geq 0 \rightarrow m \geq -2$

Per tant, l'interval de valors que pren m és $[-2, +\infty)$.

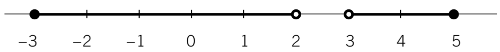
18. a)



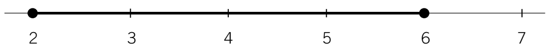
b)



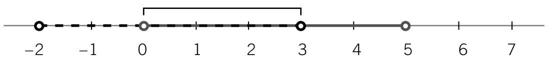
c)



d)



19. La intersecció és $(0, 5) \cap (-2, 3) = (0, 3)$.



20. a) $|m - 3| = 3 \rightarrow m - 3 = 3,\ -m + 3 = 3 \rightarrow m = 6,\ m = 0$

b) $|m - 2| \leq 9 \rightarrow m - 2 \leq 9,\ -m + 2 \leq 9 \rightarrow m \leq 11,\ m \geq -7$

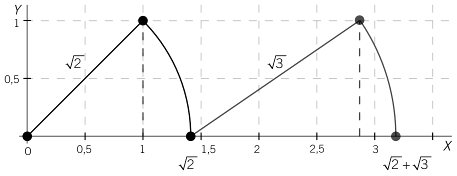
c) $|m + 5| \geq 8 \rightarrow m + 5 \geq 8,\ -m - 5 \geq 8 \rightarrow m \geq 3,\ m \leq -13$

d) $|2m + 6| = 2 \rightarrow 2m + 6 = 2,\ -2m - 6 = 2 \rightarrow m = -2,\ m = -4$

21. Per a representar aquesta suma en la recta real, hem de representar $\sqrt{2}$ i, a partir d'aquest punt, representar $\sqrt{3}$.

Hi apliquem el teorema de Pitàgores i construïm el triangle rectangle de catets 1 i 1 unitats: $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$

Per a $\sqrt{3}$, també podem construir el triangle rectangle de catets 1 i $\sqrt{2}$ unitats: $\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$



22. a) $7{,}65 \cdot 10^{-9} - 3{,}74 \cdot 10^{-10} + 1{,}52 \cdot 10^{-8} = 0{,}765 \cdot 10^{-8} - 0{,}0374 \cdot 10^{-8} + 1{,}52 \cdot 10^{-8} = 2{,}2476 \cdot 10^{-8}$

Notació convencional: 0,000 000 022 476

b) $(5{,}6 \cdot 10^{12} \cdot 4{,}05 \cdot 10^{-6}) : 2{,}113 \cdot 10^4 = 22{,}68 \cdot 10^6 \cdot 2{,}113 \cdot 10^4 = 10{,}734 \cdot 10^2 = 1{,}0734 \cdot 10^3$

Notació convencional: 1 073,4

c) $1{,}08 \cdot 10^{-20} : (5 \cdot 10^{-18} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-7}) = 1{,}08 \cdot 10^{-20} \cdot 12 \cdot 10^{-25} = 0{,}09 \cdot 10^5 = 9 \cdot 10^3$

Notació convencional: 9 000

23. a) $6{,}84 \cdot 10^2 - 3{,}18 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^4 = 0{,}684 \cdot 10^3 - 3{,}18 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^3 = 9{,}504 \cdot 10^3$

b) $$\frac{4{,}16 \cdot 10^{-5} + 3{,}84 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}4 \cdot 10^6}{5{,}843 \cdot 10^{-11}} = \frac{4{,}16 \cdot 10^{-5} + 13{,}056 \cdot 10^2}{5{,}843 \cdot 10^{-11}} = \frac{4{,}16 \cdot 10^{-5} + 130\,560\,000 \cdot 10^{-5}}{5{,}843 \cdot 10^{-11}} = \frac{130\,560\,004{,}16 \cdot 10^{-5}}{5{,}843 \cdot 10^{-11}} =$$
$$= 22\,344\,686{,}66 \cdot 10^6 = 2{,}2344 \cdot 10^{13}$$

c) $$\frac{5{,}433 \cdot 10^3 - 4{,}3 \cdot 10^3 + 23{,}2 \cdot 10^2}{8{,}5 \cdot 10^{-3} - 4{,}56 \cdot 10^{-3}} = \frac{5{,}433 \cdot 10^3 - 4{,}3 \cdot 10^3 + 2{,}32 \cdot 10^3}{3{,}94 \cdot 10^{-3}} = \frac{3{,}453 \cdot 10^3}{3{,}94 \cdot 10^{-3}} =$$
$$= 0{,}8764 \cdot 10^6 = 8{,}764 \cdot 10^5$$

24. La mida d'un full DIN A4 és 210 × 297 mm; és a dir, la superfície d'un full d'aquest estil és 62 370 mm². Convertim aquest valor en m²:

$$62370\ \cancel{mm^2} \cdot \frac{1\ m^2}{10^6\ \cancel{mm^2}} = 0{,}06237\ m^2$$

Per tant, 500 fulls tenen una superfície de:

$$500 \cdot 0{,}062\,37\ \text{m}^2 = 31{,}185\ \text{m}^2$$

Calculem els quilograms que pesen 500 fulls, sabent que un full pesa 80 g:

$$31{,}185 \cdot 80 = 2\,494{,}8\ \text{g} \rightarrow 2\,494{,}8\ \cancel{\text{g}} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \cancel{\text{g}}} = 2{,}4948\ \text{kg}$$

Calculem l'error absolut i l'error relatiu comesos:

$$\varepsilon_a = |2{,}4948 - 2{,}5| = |-5{,}2 \cdot 10^{-3}| = 5{,}2 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_r = \frac{5{,}2 \cdot 10^{-3}}{2{,}4948} \cdot 100 = 0{,}21\ \%$$

25. a) $\dfrac{C-B}{A} = \dfrac{2{,}01 \cdot 10^4 - 5{,}28 \cdot 10^3}{3{,}2 \cdot 10^6} = \dfrac{2{,}01 \cdot 10^4 - 0{,}528 \cdot 10^4}{3{,}2 \cdot 10^6} =$

$= \dfrac{1{,}482 \cdot 10^4}{3{,}2 \cdot 10^6} = 0{,}4631 \cdot 10^{-2} = 4{,}631 \cdot 10^{-3}$

b) $4{,}631 \cdot 10^{-3} = 0{,}004631$. Si trunquem aquest resultat amb tres xifres significatives, el resultat és 0,00463.

Després de truncar aquest nombre amb tres xifres significatives, podem assegurar que $0{,}00462 < 0{,}004631 < 0{,}00463$. Per tant, $\varepsilon_a = 0{,}00001$.

26. Calculem quin és el resultat real de la hipotenusa:

$$h = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6{,}403124...$$

a) Calculem l'error absolut comès:

$$\varepsilon_a = |\text{valor exacte} - \text{valor aproximat}| = |\sqrt{41} - 6{,}4| = 0{,}0031242...\ \text{cm}$$

b) Calculem la cota d'error absolut:

S'ha aproximat la hipotenusa a les dècimes i s'ha obtingut 6,4, leshores podem assegurar que $6{,}35 \leq h \leq 6{,}45$. Per tant, $\varepsilon_a = 0{,}05$ cm.

Calculem la cota d'error relatiu:

$$\text{Cota de } \varepsilon_r = \frac{\text{Cota de } \varepsilon_a}{\text{Valor aprox.}} \cdot 100 = \frac{0{,}05}{6{,}4} \cdot 100 = 0{,}78125\,\%$$

27. El valor de la fracció 89/55 és 1,618181818… Aleshores, si arrodonim aquest valor a les deumil·lèsimes, tenim que és 1,6182 (ja que el nombre següent de les deumil·lèsimes és un 8; per tant, sumem un 1 a l'1).

Amb això, observem que les xifres significatives que resulten són cinc.

28. En primer lloc, calculem la superfície de l'hexàgon, la fórmula corresponent del qual és $S = \dfrac{P \cdot a}{2}$. Per tant, determinem el perímetre i l'apotema de l'hexàgon: $P = 6 \cdot 4 = 24$; $a = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$

Aleshores, la superfície és:

$$S = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{24 \cdot \sqrt{12}}{2} = 41{,}569219...$$

a) Si arrodonim el valor de la superfície a les centèsimes, resulta que $S = 41{,}57$ dm², ja que el nombre següent a les centèsimes és un 9 > 5; per tant, se li suma 1 al 6.

b) Després d'arrodonir aquest nombre a les centèsimes, podem assegurar que $41{,}565 < 41{,}57 < 41{,}575$.

Per tant, la cota del seu error absolut és $\varepsilon_a = 0{,}005$ dm².

c) Calculem la cota d'error relatiu:

$$\text{Cota de } \varepsilon_r = \frac{\text{Cota de } \varepsilon_a}{\text{Valor aprox.}} \cdot 100 = \frac{0{,}005}{41{,}57} \cdot 100 = 0{,}0120279\,\%$$

29. Sabem que els punts (3, 3) i (3, 1) estan alineats, igual que els punts (–1, 1) i (3, 1). Per tant, la hipotenusa del triangle està formada pel segment delimitat pels punts (3, 3) i (–1, 1).

Per a calcular el valor de la hipotenusa, només hem de calcular la distància entre aquests dos punts; és a dir:

$$d((3,3),(-1,1)) = \sqrt{(3+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

2 RADICALS

Pàgs. 39 a 41

30. a) $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$

b) $2\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \sqrt{2^2 \cdot \dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$

c) $\dfrac{x}{3}\sqrt{\dfrac{7}{2x}} = \sqrt{\dfrac{x^2}{3^2} \cdot \dfrac{7}{2x}} = \sqrt{\dfrac{7x}{18}}$

d) $\dfrac{5}{4}\sqrt[4]{\left(\dfrac{4}{5}\right)^3} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{5}{4}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^3} = \sqrt[4]{\dfrac{5}{4}}$

e) $-5\sqrt[5]{-3} = \sqrt[5]{(-5)^5 \cdot (-3)} = \sqrt[5]{9375}$

f) $\dfrac{1}{6}\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 \cdot 20} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{54}}$

31. a) $\sqrt[15]{x^5} = x^{\frac{5}{15}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

b) $\sqrt[5]{a^6 b^{10}} = \sqrt[5]{a \cdot a^5 \cdot b^5 \cdot b^5} = ab^2\sqrt[5]{a}$

c) $\sqrt[3]{-54} = \sqrt[3]{-2 \cdot 3^3} = 3\sqrt[3]{-2}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}} = \sqrt[5 \cdot 2]{1024} = \sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

e) $\sqrt[12]{64y^6} = \sqrt[12]{2^6 y^6} = 2^{\frac{6}{12}} \cdot y^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2y}$

f) $\sqrt[4]{16x^2y^8} = \sqrt[4]{2^4 x^2 y^8} = 2^{\frac{4}{4}} \cdot x^{\frac{2}{4}} \cdot y^{\frac{8}{4}} =$

$= 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^2 = 2y^2\sqrt{x}$

32. En primer lloc, trobem el m.c.m. dels índexs. A continuació, multipliquem l'índex del radical i l'exponent del radicand pel nombre que fa que l'índex sigui igual al m.c.m.

a) Tenim que m.c.m. (3, 4, 2) = 12; per tant:

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4},\ \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3},\ \sqrt{6} = \sqrt[12]{6^6}$$

b) Tenim que m.c.m. (6, 4) = 12; per tant:

$$\sqrt[6]{xy^3} = \sqrt[12]{x^2y^6},\ \sqrt[4]{x^3y} = \sqrt[12]{x^9y^3}$$

c) Tenim que m.c.m. (8, 2, 4) = 8; per tant:

$$\sqrt[8]{9} = \sqrt[8]{9},\ \sqrt{72} = \sqrt[8]{72^4},\ \sqrt[4]{100} = \sqrt[8]{100^2}$$

d) Tenim que m.c.m. (5, 3) = 15; per tant:

$$\sqrt[5]{51} = \sqrt[15]{51^3},\ \sqrt[3]{100} = \sqrt[15]{100^5}$$

33. a) $\sqrt[6]{y^4} = y^{\frac{4}{6}} = y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{y^2}$

b) $\sqrt[12]{z^9} = z^{\frac{9}{12}} = z^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{z^3}$

c) $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d) $\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = 2^{\frac{5}{10}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[4]{x^4y^2} = x^{\frac{4}{4}}y^{\frac{2}{4}} = xy^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{y}$

f) $\sqrt[8]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

34. a) $\frac{\sqrt[3]{x^7}}{x^2} = \sqrt[3]{\frac{x^7}{x^6}} = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[5]{\frac{1}{y^2}} = \sqrt[5]{y^{-2}} = y^{\frac{-2}{5}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{125}} = \frac{\sqrt[6]{25^2}}{\sqrt[6]{125^3}} = \sqrt[6]{\frac{25^2}{125^3}} = \sqrt[6]{\frac{5^4}{5^9}} = \sqrt[6]{\frac{1}{5^5}} =$

$= \sqrt[6]{5^{-5}} = 5^{\frac{-5}{6}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{m^2}}{m^3} \cdot \frac{m^4}{\sqrt{m}} = \frac{m\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt[6]{m^{10}}}{\sqrt[6]{m^3}} = \sqrt[6]{\frac{m^{10}}{m^3}} =$

$= \sqrt[6]{m^7} = m^{\frac{7}{6}}$

35. a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}} = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[10]{5} = \sqrt[10]{3^2} \cdot \sqrt[10]{5} = \sqrt[10]{45}$

b) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[12]{2^3}}{\sqrt[12]{2^2}} = \sqrt[12]{\frac{2^3}{2^2}} = \sqrt[12]{2}$

c) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

36. En primer lloc, trobem el m.c.m. dels índexs. A continuació, multipliquem l'índex del radical i l'exponent del radicand pel nombre que fa que l'índex sigui igual al m.c.m. Finalment, ho comparem.

a) Tenim que m.c.m. (2, 4) = 4; per tant:

$$\sqrt{z^3} = \sqrt[4]{z^6},\ \sqrt[4]{z^5} = \sqrt[4]{z^5}$$

No es poden ordenar, ja que el valor de cada arrel depèn del valor que tingui *z*.

b) Tenim que m.c.m. (2, 3) = 6; per tant:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{8} = \sqrt[6]{8^3} \\ \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[6]{8^3} > \sqrt[6]{5^2}$$

c) Tenim que m.c.m. (2, 3, 4) = 12; per tant:

$$\sqrt{x} = \sqrt[12]{x^6},\ \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[12]{x^8},\ \sqrt[4]{2x} = \sqrt[12]{2^3x^3} = \sqrt[12]{8x^3}$$

No es poden ordenar, ja que el valor de cada arrel depèn del valor que tingui *x*.

d) Tenim que m.c.m. (3, 4) = 12; per tant:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} \\ \sqrt[4]{8} = \sqrt[12]{8^3} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[12]{8^3} > \sqrt[12]{4^4}$$

e) Tenim que m.c.m. (2, 3, 6) = 6; per tant:

$$\sqrt{m} = \sqrt[6]{m^3},\ \sqrt[3]{m^2} = \sqrt[6]{m^4},\ \sqrt[6]{m^5} = \sqrt[6]{m^5}$$

No es poden ordenar, ja que el valor de cada arrel depèn del valor que tingui *m*.

f) Tenim que m.c.m. (2, 5, 10) = 10; per tant:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{5} = \sqrt[10]{5^5} \\ \sqrt[5]{9} = \sqrt[10]{9^2} \\ \sqrt[10]{8^2} = \sqrt[10]{8^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[10]{5^5} > \sqrt[10]{9^2} > \sqrt[10]{8^2}$$

37. a) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{x^2y^4}}} = \sqrt[3\cdot2\cdot4]{x^2y^4} = \sqrt[24]{x^2y^4} = x^{\frac{2}{24}}y^{\frac{4}{24}} =$

$= x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{2}{12}} = \sqrt[12]{xy^2}$

b) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{12}}}\right)^3 = \left(\sqrt[3\cdot2\cdot2]{12}\right)^3 = \sqrt[12]{12^3} = 12^{\frac{3}{12}} = 12^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{12}$

c) $\sqrt[9]{x^6y^3} = x^{\frac{6}{9}}y^{\frac{3}{9}} = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2y}$

38. a) $6a\sqrt{2a} + a\sqrt{8a} - 5\sqrt{2a^3} = 6a\sqrt{2a} + a\sqrt{2^3a} - 5\sqrt{2a^3} =$

$= 6a\sqrt{2a} + 2a\sqrt{2a} - 5a\sqrt{2a} = \sqrt{2a}\,(6a + 2a - 5a) =$

$= 3a\sqrt{2a}$

b) $\sqrt{\frac{7}{5}} - \sqrt{\frac{7}{80}} = \sqrt{\frac{7}{5}} - \sqrt{\frac{7}{2^4 5}} = \sqrt{\frac{7}{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{5}} =$

$= \sqrt{\frac{7}{5}}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{5}}$

c) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}\,(1 + 3) =$

$= 4\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{18a^3} - \sqrt{50a^3} = \sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot a^3} - \sqrt{5^2 \cdot 2 \cdot a^3} =$

$= 3a\sqrt{2a} - 5a\sqrt{2a} = \sqrt{2a}\,(3a - 5a) = -2a\sqrt{2a}$

39. a) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(5 - 2 + \frac{5}{3} - \frac{5}{2}\right) =$

$= \frac{13\sqrt{3}}{6}$

b) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{18} - 2\sqrt{50} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2 \cdot 3^2} - 2\sqrt{5^2 \cdot 2} =$

$= 5\sqrt{2} - 9\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(5 - 9 - 10) = -14\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} =$

$= \sqrt{2}\,(3 + 2) = 5\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{50} = 6\sqrt{400} = 6\sqrt{2^4 \cdot 5^2} = 6 \cdot 2^2 \cdot 5 = 120$

e) $\sqrt[3]{7ac^2} \cdot \sqrt[3]{3a^2b} = \sqrt[3]{21a^3bc^2} = a\sqrt[3]{21bc^2}$

f) $\sqrt[4]{625} : \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{626 : 25} = \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} =$
$= \sqrt{5}$

40. a) $\sqrt[4]{\dfrac{a^4c}{b^5}} + \sqrt[4]{\dfrac{a^4c^5}{bd^4}} - \sqrt[4]{\dfrac{a^4cd^4}{bc^8}} =$
$= \dfrac{a}{b}\sqrt[4]{\dfrac{c}{b}} + \dfrac{ac}{d}\sqrt[4]{\dfrac{c}{b}} - \dfrac{ad}{c^2}\sqrt[4]{\dfrac{c}{b}} =$
$= \sqrt[4]{\dfrac{c}{b}}\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{ac}{d} - \dfrac{ad}{c^2}\right) =$
$= \dfrac{ac^2d + abc^3 - abd^2}{bdc^2}\sqrt[4]{\dfrac{c}{b}}$

b) $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[12]{a^8b^4} \cdot \sqrt[12]{a^3b^9} = \sqrt[12]{a^{11}b^{13}} = b\sqrt[12]{a^{11}b}$

c) $\sqrt{a^3b} : 5\sqrt{ab^3} = \dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{a^3b}{ab^3}} = \dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}} = \dfrac{a}{5b}$

d) $\sqrt[4]{4} : \sqrt[6]{8} = \sqrt[12]{4^3} : \sqrt[12]{8^2} = \sqrt[12]{4^3 : 8^2} = \sqrt[12]{64 : 64} =$
$= \sqrt[12]{1} = 1$

41. a) $2\sqrt{20} \cdot 3\sqrt{18} = 6\sqrt{20 \cdot 18} = 6\sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} =$
$= 6 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{10} = 36\sqrt{10}$

b) $\sqrt[4]{ab^3} \cdot 3a\sqrt{b} = 3a\sqrt[4]{ab^3} \cdot \sqrt[4]{b^2} = 3a\sqrt[4]{ab^5} = 3ab\sqrt[4]{ab}$

c) $\sqrt{xy} : 2\sqrt{xy^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{xy}{xy^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{y^2}} = \dfrac{\sqrt{y}}{2y}$

d) $5\sqrt[3]{x^2} \cdot 6x\sqrt[3]{xy} = 30x\sqrt[3]{x^3y} = 30x^2\sqrt[3]{y}$

e) $-3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt[5]{6} = -12\sqrt[10]{2^5} \cdot \sqrt[10]{6^2} = -12\sqrt[10]{1152}$

f) $\sqrt[9]{125} : \sqrt[6]{25} = \sqrt[18]{125^2} : \sqrt[18]{25^3} = \sqrt[18]{125^2 : 25^3} =$
$= \sqrt[18]{1} = 1$

42. a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

b) $\dfrac{4}{3 + \sqrt{5}} = \dfrac{4\left(3 - \sqrt{5}\right)}{\left(3 + \sqrt{5}\right)\left(3 - \sqrt{5}\right)} = \dfrac{12 - 4\sqrt{5}}{9 - 5} =$
$= \dfrac{12 - 4\sqrt{5}}{4} = 3 - \sqrt{5}$

c) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{8 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{8\sqrt[3]{4}}{2} = 4\sqrt[3]{4}$

d) $\dfrac{a}{a + \sqrt{b}} = \dfrac{a\left(a - \sqrt{b}\right)}{\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right)} = \dfrac{a^2 - a\sqrt{b}}{a^2 - b}$

e) $\dfrac{x}{\sqrt[4]{x}} = \dfrac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{x\sqrt[4]{x^3}}{x} = \sqrt[4]{x^3}$

f) $\dfrac{-6}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \dfrac{-6\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)} =$
$= \dfrac{-6\sqrt{2} + 6\sqrt{6}}{2 - 6} = \dfrac{3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{2}$

43. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)}{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3\sqrt{2} - 4}{9 - 8} =$
$= 3\sqrt{2} - 4$

b) $\dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}} = \dfrac{\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)} =$
$= \dfrac{6\sqrt{10} - 18 - 20 + 6\sqrt{10}}{20 - 18} = \dfrac{12\sqrt{10} - 38}{2} =$
$= 6\sqrt{10} - 19$

c) $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \dfrac{\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)} =$
$= \dfrac{5 + 3 + 2\sqrt{15}}{5 - 3} = 4 + \sqrt{15}$

d) $\dfrac{a + 1}{\sqrt{a} - 1} = \dfrac{(a + 1)\left(\sqrt{a} + 1\right)}{\left(\sqrt{a} - 1\right)\left(\sqrt{a} + 1\right)} = \dfrac{a\sqrt{a} + a + \sqrt{a} + 1}{a - 1}$

44. a) $\dfrac{4 + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \dfrac{\left(4 + \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{6}\right)} =$
$= \dfrac{4\sqrt{7} + 4\sqrt{6} + \sqrt{42} + 6}{7 - 6} = \sqrt{7} + 4\sqrt{6} + \sqrt{42} + 6$

b) $\dfrac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{\left(a\sqrt{b} + b\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)} =$
$= \dfrac{a\sqrt{ab} - ab + ab - b\sqrt{ab}}{a - b} = \dfrac{a\sqrt{ab} - b\sqrt{ab}}{a - b} =$
$= \dfrac{\sqrt{ab}\,(a - b)}{a - b} = \sqrt{ab}$

c) $\dfrac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \dfrac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \dfrac{4\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right) - 3\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)}$
$= \dfrac{4\sqrt{6} + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{5}}{6 - 5} = \sqrt{6} + 7\sqrt{5}$

d) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{\sqrt{7} + \sqrt{8}} + \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{8}}{\sqrt{7} - \sqrt{8}} = \dfrac{\left(\sqrt{7} - \sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{7} + \sqrt{8}\right)^2}{\left(\sqrt{7} + \sqrt{8}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{8}\right)} =$
$= \dfrac{15 - 2\sqrt{56} + 15 + 2\sqrt{56}}{7 - 8} = \dfrac{30}{-1} = -30$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}\,\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2}} =$
$= \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}\,\left(2 - \sqrt{2}\right)}{\left(2 + \sqrt{2}\right)\left(2 - \sqrt{2}\right)} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}\,\left(2 - \sqrt{2}\right)$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}\right)} =$
$= \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 - 5} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{-2\sqrt{6}} =$
$= \dfrac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}\right)\sqrt{6}}{-2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{12} - \sqrt{18} - \sqrt{30}}{-12} =$
$= \dfrac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{-12}$

45. Sabem que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; per tant, tenim:

$$\left.\begin{aligned}\Phi - 1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\\ \frac{1}{\Phi} &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \frac{2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$

— $\Phi^2 = \Phi + 1$

$$\left.\begin{aligned}\Phi + 1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}\\ \Phi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1$$

— $\Phi^3 = \frac{\Phi+1}{\Phi-1}$

$$\frac{\Phi+1}{\Phi-1} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} : \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}+3\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2+\sqrt{5}$$

$$\Phi^3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{16+8\sqrt{5}}{8} = 2+\sqrt{5} \Rightarrow \Phi^3 = \frac{\Phi+1}{\Phi-1}$$

46. Igualem cada operació a x, en què x és el nombre enter que estem buscant.

a) $x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} \rightarrow$

$$x^2 = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$$

$$x^2 = \left(7+4\sqrt{3}\right) + \left(7-4\sqrt{3}\right) + 2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\,\sqrt{7-4\sqrt{3}} =$$

$$= 14 + 2\sqrt{49-48} = 14 + 2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = 4$$

b) $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} \rightarrow$

$$x^2 = \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$x^2 = \left(4+2\sqrt{3}\right) + \left(4-2\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}\,\sqrt{4-2\sqrt{3}} =$$

$$= 8 - 2\sqrt{16-12} = 8 - 4 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = 2$$

47. El volum d'un tetraedre es calcula a partir de la fórmula següent: $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, en què a és l'aresta del tetraedre.

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{12}8^3 = \frac{512\sqrt{2}}{12} = \frac{128\sqrt{2}}{3}\text{cm}^3$$

48. El volum d'un con es calcula mitjançant la fórmula $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$, en què r és el radi de la base i h és l'altura del con. Per saber el valor de l'altura, hi apliquem el teorema de Pitàgores:

$$10^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 5\sqrt{3}}{3} = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3}\text{m}^3$$

L'àrea total d'un con es calcula mitjançant la fórmula $A_T = \pi \cdot r \cdot (g + r)$, en què g és la generatriu del con i r, el radi de la base.

$$\Rightarrow A_T = \pi \cdot r \cdot (g + r) = \pi \cdot 5 \cdot (10 + 5) = 75\pi \text{ m}^2$$

49. Siguin x l'edat del pare d'aquí a 24 anys i y, l'edat del fill d'aquí a 24 anys. Per tant, l'edat actual del pare és $x - 24$ i la del fill, $y - 24$.

La primera condició de l'enunciat es tradueix a $\sqrt{x-24} = y - 24$, i la segona a $x = 2y$.

Si resolem aquest sistema, resultaran les edats:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x-24} &= y - 24\\ x &= 2y\end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 60, y = 30$$

Finalment, l'edat del pare i la del fill d'aquí a 24 anys serà 60 anys i 30 anys, respectivament.

50. Calculem quin és el valor de x depenent de m; és a dir, aïllem x:

$$\sqrt{(x-1)^2 + m} = x + 1 \rightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2 + m}\right)^2 = (x+1)^2$$

$$(x-1)^2 + m = (x+1)^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + m = x^2 + 2x + 1$$

$$m = 4x \rightarrow x = \frac{m}{4}$$

Per tant, perquè la solució sigui entera, ha de succeir que $m = 4k$, per a k enter.

51. a) $\sqrt{11+\sqrt{112}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$$\left(\sqrt{11+\sqrt{112}}\right)^2 = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$$

$$11 + \sqrt{112} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

$$11 + 2\sqrt{28} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}x + y &= 11\\ 28 &= xy\end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 7, y = 4$$

b) $\sqrt{11-4\sqrt{6}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

$$\left(\sqrt{11-4\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$$

$$11 - 4\sqrt{6} = x + y - 2\sqrt{xy}$$

$$11 + 2\sqrt{24} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}x + y &= 11\\ 24 &= xy\end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 8, y = 3$$

3 LOGARITMES — Pàgs. 41 i 42

52. Hi apliquem la definició del logaritme, $\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y$.

a) $\log_4 256 = x \rightarrow 4^x = 256 = 4^4 \rightarrow x = 4 \rightarrow \log_4 256 = 4$

b) $\log 1\,000 = x \rightarrow 10^x = 1\,000 = 10^3 \rightarrow x = 3 \rightarrow \log 1\,000 = 3$

c) $\log_6 36 = x \rightarrow 6^x = 36 = 6^2 \rightarrow x = 2 \rightarrow \log_6 36 = 2$

d) $\log_2 (1/8) = x \to 2^x = 1/8 = (1/2)^3 = 2^{-3} \to x = -3$

$\to \log_2 (1/8) = -3$

e) $\log 0{,}001 = x \to 10^x = 0{,}001 = 10^{-3} \to x = -3$

$\to \log 0{,}001 = -3$

f) $\log_5 0{,}04 = x \to 5^x = 0{,}04 = 4/100 = 1/5^2 = 5^{-2} \to x = -2$

$\to \log_5 0{,}04 = -2$

53. Hi apliquem la definició del logaritme, $\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y$.

a) $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_4 16 - \log_2 \sqrt{2}$

- $\log_3 27 = x \to 3^x = 27 = 3^3 \to x = 3$
- $\log_2 \frac{1}{8} = x \to 2^x = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{-3} \to x = -3$
- $\log_4 16 = x \to 4^x = 16 = 4^2 \to x = 2$
- $\log_2 \sqrt{2} = x \to 2^x = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \to x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_4 16 - \log_2 \sqrt{2} =$

$= 3 - 3 - 2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

b) $\log_3 \frac{1}{243} - \log_6 1 + \log_2 32$

- $\log_3 \frac{1}{243} = x \to 3^x = \frac{1}{243} = 3^{-5} \to x = -5$
- $\log_6 1 = 0$
- $\log_2 32 = x \to 2^x = 32 = 2^5 \to x = 5$

$\Rightarrow \log_3 \frac{1}{243} - \log_6 1 + \log_2 32 = -5 - 0 + 5 = 0$

c) $\ln 1 + \ln e + \ln e^3 + \ln \sqrt[3]{e} + \ln \frac{1}{e}$

- $\ln 1 = x \to e^x = 1 \to x = 0$
- $\ln e = x \to e^x = e \to x = 1$
- $\ln e^3 = x \to e^x = e^3 \to x = 3$
- $\ln \sqrt[3]{e} = x \to e^x = \sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}} \to x = \frac{1}{3}$
- $\ln \frac{1}{e} = x \to e^x = \frac{1}{e} = e^{-1} \to x = -1$

$\Rightarrow \ln 1 + \ln e + \ln e^3 + \ln \sqrt[3]{e} + \ln \frac{1}{e} =$

$= 0 + 1 + 3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{10}{3}$

54. Hi apliquem la definició del logaritme: $\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y$.

a) $\log \pi = x \to \pi^x = \pi \to x = 1 \to \log \pi = 1$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{\sqrt{3}} = x \to \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \to$

$\to 3^{-x} = 3^{\frac{1}{2}} \to x = -\frac{1}{2}$

c) $\log_{\sqrt{2}} 2 = x \to (\sqrt{2})^x = 2 \to \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$

d) $\log_3 (1/81) = x \to 3^x = 1/81 = (1/3)^4 = 3^{-4} \to x = -4$

$\log_3 (1/81) = -4$

e) $\log_4 1024 = x \to 4^x = 1024 = 4^5 \to x = 5 \to \log_4 1024 = 5$

f) $\log_2 \sqrt{2} = x \to 2^x = \sqrt{2} = 2^{1/2} \to x = 1/2$

$\log_2 \sqrt{2} = 1/2$

55. Utilitzant la calculadora i aproximant a les deumil·lèsimes, obtenim els resultats següents:

a) $\ln e^3 = 3$

b) $\ln 12{,}45 = 2{,}5217206\ldots \approx 2{,}5217$

c) $\ln 333{,}33 = 5{,}8091329\ldots \approx 5{,}8091$

d) $\ln 0{,}464 = -0{,}7678707\ldots \approx -0{,}7679$

e) $\ln \sqrt{125} = 2{,}414156\ldots \approx 2{,}4142$

f) $\ln 403{,}4288 = 6{,}000000016\ldots \approx 6$

56. Utilitzem la fórmula de canvi de base: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

a) $\log_5 244 = \dfrac{\log 244}{\log 5} = \dfrac{2{,}3873\ldots}{0{,}6989\ldots} = 3{,}4156$

b) $\log_5 6 = \dfrac{\log 6}{\log 5} = \dfrac{0{,}7781\ldots}{0{,}6989\ldots} = 1{,}1133$

c) $\log_{0,8} 24 = \dfrac{\log 24}{\log 0{,}8} = \dfrac{1{,}3802\ldots}{-0{,}0969\ldots} = -14{,}2422$

d) $\log e = \dfrac{\log e}{\log 10} = \dfrac{0{,}43429\ldots}{1} = 0{,}4343$

e) $\log_\pi 3 = \dfrac{\log 3}{\log \pi} = \dfrac{0{,}4771\ldots}{0{,}4971\ldots} = 0{,}9597$

f) $\log_7 2000 = \dfrac{\log 2000}{\log 7} = \dfrac{3{,}3010\ldots}{0{,}8450\ldots} = 3{,}9061$

57. a) $\log_x \frac{ab}{c} = \log_x ab - \log_x c = \log_x a + \log_x b - \log_x c$

En què, en la primera igualtat, hem utilitzat la propietat del logaritme d'un quocient i, en la segona, la propietat del logaritme d'un producte.

b) $\log_x \frac{a}{b^2} = \log_x a - \log_x b^2 = \log_x a - 2\log_x b$

En què, en la primera igualtat, hem utilitzat la propietat del logaritme d'un quocient i, en la segona, la propietat del logaritme d'una potència.

c) $\log_x \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2\log_x \frac{a}{b} = 2\left(\log_x a - \log_x b\right) =$

$= 2\log_x a - 2\log_x b$

En què, en la primera igualtat, hem utilitzat la propietat del logaritme d'una potència i, en la segona, la propietat del logaritme d'un quocient.

d) $\log_x \frac{a^3 b}{\sqrt{c}} = \log_x a^3 b - \log_x \sqrt{c} =$

$= \log_x a^3 + \log_x b - \frac{\log_x c}{2} = 3\log_x a + \log_x b - \frac{\log_x c}{2}$

En què, en la primera igualtat, hem utilitzat la propietat del logaritme d'un quocient; en la segona igualtat, la propietat del logaritme d'un producte i la d'un radical, i, finalment, en la tercera igualtat, la propietat d'una potència.

58. a) Busquem les potències de 3 entre les quals es troba el nombre 200. Aquestes són 3^4 i 3^5; és a dir, es verifica que $3^4 < 200 < 3^5$.

Prenent logaritmes en base 3 es manté la desigualtat, ja que la base és més gran que 1. Així:

$$\log_3 3^4 < \log_3 200 < \log_3 3^5 \rightarrow 4 < \log_3 200 < 5$$

d'on es dedueix que la part entera de $\log_3 200$ és 4.

b) Busquem les potències de 7 entre les quals es troba el nombre 60. Aquestes són 7^2 i 7^3; és a dir, es verifica que $7^2 < < 60 < 7^3$.

Prenent logaritmes en base 7 es manté la desigualtat, ja que la base és més gran que 1, així:

$$\log_7 7^2 < \log_7 60 < \log_7 7^3 \rightarrow 2 < \log_7 60 < 3$$

d'on es dedueix que la part entera de $\log_7 60$ és 2.

c) Busquem les potències de 8 entre les quals es troba el nombre 525. Aquestes són 8^3 i 8^4; és a dir, es verifica que $8^3 < 525 < 8^4$.

Prenent logaritmes en base 8 es manté la desigualtat, ja que la base és més gran que 1. Així:

$$\log_8 8^3 < \log_8 525 < \log_8 8^4 \rightarrow 3 < \log_8 525 < 4$$

d'on es dedueix que la part entera de $\log_8 525$ és 3.

d) Busquem les potències de 4 entre les quals es troba el nombre 3. Aquestes són 4^0 i 4^1; és a dir, es verifica que $4^0 < 3 < 4^1$.

Prenent logaritmes en base 4 es manté la desigualtat, ja que la base és més gran que 1. Així:

$$\log_4 4^0 < \log_4 3 < \log_4 4^1 \rightarrow 0 < \log_4 3 < 1$$

d'on es dedueix que la part entera de $\log_4 3$ és 0.

e) Busquem les potències de 10 entre les quals es troba el nombre 0,02. Aquestes són 10^0 i 10^{-1}; és a dir, es verifica que $10^{-1} < 0{,}02 < 10^0$.

Prenent logaritmes en base 10 es manté la desigualtat, ja que la base és més gran que 1. Així:

$$\log 10^{-1} < \log 0{,}02 < \log 10^0 \rightarrow -1 < \log 0{,}02 < 0$$

d'on es dedueix que la part entera de $\log 0{,}02$ és -1.

f) Busquem les potències de 5 entre les quals es troba el nombre 20. Aquestes són 5^1 i 5^2; és a dir, es verifica que $5^1 < 20 < 5^2$.

Prenent logaritmes en base 5 es manté la desigualtat, ja que la base és més gran que 1. Així:

$$\log_5 5^1 < \log_5 20 < \log_5 5^2 \rightarrow 1 < \log_5 20 < 2$$

d'on es dedueix que la part entera de $\log_5 20$ és 1.

59. Hi apliquem la definició del logaritme, $\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y$.

a) $\log_{\sqrt{5}} 125 = x \rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^x = 125 = 5^3 \rightarrow 5^{x/2} = 5^3 \rightarrow x/2 = 3 \rightarrow x = 6$

b) $\log_x 81 = -4 \rightarrow x^{-4} = 81 = 3^4 = (1/3)^{-4} \rightarrow x = 1/3$

c) $\log_{\sqrt{2}} (1/4) = x \rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = 1/4 = (1/2)^2 = 2^{-2} \rightarrow 2^{x/2} = 2^{-2} \rightarrow x/2 = -2 \rightarrow x = -4$

d) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{\dfrac{1}{81}} = x \rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{81}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3^4}} = 3^{-\frac{4}{3}} \rightarrow$

$\rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-\frac{4}{3}} \rightarrow \dfrac{x}{2} = -\dfrac{4}{3} \rightarrow x = -\dfrac{8}{3} = -2{,}6667$

e) $\log_2 x^3 = 6 \rightarrow 2^6 = x^3 \rightarrow x = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 \rightarrow x = 4$

f) $\log_x 125 = -3 \rightarrow x^{-3} = 125 = 5^3 = (1/5)^{-3} \rightarrow x = 1/5$

60. Hi apliquem les propietats dels logaritmes:

a) $\log_x x^{\frac{5}{2}} = \dfrac{5}{2}\log_x x = \dfrac{5}{2} \cdot 1 = \dfrac{5}{2}$

b) $\log_2 \sqrt[5]{64} = \dfrac{\log_2 64}{5} = \dfrac{6}{5}$

en què: $\log_2 64 = x \rightarrow 2^x = 64 = 2^6 \rightarrow x = 6 \rightarrow \log_2 64 = 6$

c) $2^{\log_x x^2} = 2^{2\log_x x} = 2^{2 \cdot 1} = 2^2 = 4$

d) $\log_{10} (\log_{10} 10) = \log_{10} 1 = 0$

e) $\log_x \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \log_x \sqrt{x} - \log_x \sqrt[3]{x^2} = \dfrac{\log_x x}{2} - \dfrac{\log_x x^2}{3} =$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{2\log_x x}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6}$

f) $\log_{0,5} 64^{1/3} = \dfrac{1}{3}\log_{0,5} 64 = \dfrac{1}{3} \cdot (-6) = -2$

En què: $\log_{0,5} 64 = x \rightarrow 0{,}5^x = (1/2)^x = 64 = 2^6 = (1/2)^{-6} \rightarrow \rightarrow x = -6 \rightarrow \log_{0,5} 64 = -6$

61. Hi apliquem les propietats dels logaritmes i que $\log x = 7{,}2$.

a) $\log \dfrac{x}{100} = \log x - \log 100 = 7{,}2 - 2 = 5{,}2$

b) $\log \sqrt[4]{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\log \dfrac{1}{x}}{4} = \dfrac{\log 1 - \log x}{4} = \dfrac{0 - 7{,}2}{4} = -1{,}8$

c) $\log\ (0{,}01\ x^2) = \log\ 0{,}01 + \log\ x^2 = \log\ 0{,}01 + 2\log\ x = = -2 + 2 \cdot 7{,}2 = 12{,}4$

d) $(\log x)^{\frac{1}{3}} = (7{,}2)^{\frac{1}{3}} = 1{,}931$

62. Utilitzem les propietats dels logaritmes per a desenvolupar aquestes expressions:

a) $\log_3 \left[x(x+1)\right] = \log_3 x + \log_3(x+1)$

En aquesta expressió, hi hem aplicat la propietat del logaritme d'un producte.

b) $\log_5 \sqrt[4]{20} = \dfrac{\log_5 20}{4} = \dfrac{\log_5 2^2 \cdot 5}{4} = \dfrac{\log_5 2^2 + \log_5 5}{4} =$

$= \dfrac{2\log_5 2 + 1}{4}$

c) $\ln \dfrac{xy}{\sqrt[3]{z}} = \ln xy - \ln \sqrt[3]{z} = \ln x + \ln y - \dfrac{\ln z}{3}$

d) $\log_4 \dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}} = \log_4 x(x^2+1) - \log_4 \sqrt{x^2-1} =$

$= \log_4 x + \log_4(x^2+1) - \dfrac{\log_4(x^2-1)}{2}$

63. a) $\log 216 = \log(2^3 3^3) = \log 2^3 + \log 3^3 = 3\cdot\log 2 + 3\cdot\log 3 =$
$= 3\cdot 0{,}3010 + 3\cdot 0{,}4771 = 2{,}3343$

b) $\log 75 = \log(3\cdot 5^2) = \log 3 + \log 5^2 = \log 3 + 2\cdot\log 5 =$
$= 0{,}4771 + 2\cdot 0{,}6989 = 1{,}8749$

c) $\log 0{,}002^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log 0{,}002 = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{2}{1000} = \dfrac{1}{2}(\log 2 -$
$-\log 1000) = \dfrac{1}{2}(\log 2 - \log 10^3) = \dfrac{1}{2}(\log 2 - 3\log 10) =$
$= \dfrac{1}{2}(\log 2 - 3\log 2\cdot 5) = \dfrac{1}{2}(\log 2 - 3\log 2 - 3\log 5) =$
$= \dfrac{1}{2}(0{,}3010 - 3\cdot 0{,}3010 - 3\cdot 0{,}6989) = -1{,}3494$

d) $\log\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}} = \log 1 - \log\sqrt[3]{16} = 0 - \dfrac{\log 16}{3} = -\dfrac{\log 2^4}{3} =$
$= -\dfrac{4\log 2}{3} = -\dfrac{4\cdot 0{,}3010}{3} = -0{,}4013$

64. Fem servir les propietats dels logaritmes per a expressar-los en un sol logaritme:

a) $\log(ab) - 2\log\dfrac{a}{b} = \log(ab) - \log\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 =$
$= \log\left[(ab) : \left(\dfrac{a}{b}\right)^2\right] = \log\left(\dfrac{ab^3}{a^2}\right) = \log\dfrac{b^3}{a}$

b) $2\ln(x-y) - \ln(x^2-y^2) = \ln(x-y)^2 - \ln(x-y)(x-y) =$
$= \ln\dfrac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = \ln\dfrac{x-y}{x+y}$

c) $2\log_4 t - \dfrac{\log_4 y}{3} + (z-2)\log_4 8 = \log_4 t^2 - \log_4\sqrt[3]{y} +$
$+ \log_4 8^{z-2} = \log_4\dfrac{t^2}{\sqrt[3]{y}} + \log_4 8^{z-2} = \log_4\dfrac{t^2\cdot 8^{z-2}}{\sqrt[3]{y}}$

65. Sigui $\log x = k$, i utilitzant les propietats dels logaritmes, resulta que:

a) $\log x^3 = 3\cdot\log x = 3k$

b) $\log\dfrac{x}{1000} = \log x - \log 1000 = k - \log 10^3 =$
$= k - 3\log 10 = k - 3\cdot 1 = k - 3$

c) $\log x\sqrt{10} = \log x + \log\sqrt{10} = k + \dfrac{\log 10}{2} =$
$= k + \dfrac{1}{2} = k + 0{,}5$

66. Transformem els logaritmes de manera que la base sigui igual al nombre del qual volem calcular el logaritme i, així, hi apliquem la propietat $\log_a a = 1$.

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49 =$
$= 2\log_4 4^2 + \log_2 2^5 - 3\log_7 7^2 =$
$= 2\cdot 2\cdot\log_4 4 + 5\cdot\log_2 2 - 3\cdot 2\cdot\log_7 7 = 4 + 5 - 6 = 3$

b) $\log_5 625 - \log_9 1 = \log_5 5^4 - 0 = 4\cdot\log_5 5 = 4\cdot 1 = 4$

67. Amb les propietats del logaritme, resulta que:

a) $3\log_5 a + 4\log_5 b = \log_5 a^3 + \log_5 b^4 = \log_5 a^3 b^4$

b) $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} a - 3\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{2}} a^3 =$
$= \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^3} = \log_{\frac{1}{2}} a^{-\frac{5}{2}}$

c) $2(\log_4 x + 2\log_4 i - 3\log_3 z) = 2(\log_4 x + \log_4 y^2 - \log_3 z^3) =$
$= 2(\log_4 xy^2 - \log_3 z^3) = 2\log\dfrac{xy^2}{z^3} = \log\left(\dfrac{xy^2}{z^3}\right)^2$

d) $\ln\dfrac{x}{x-1} + \ln\dfrac{x+1}{x} - \ln(x^2-1) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\left(\dfrac{x+1}{x}\right) -$
$-\ln(x^2-1) = \ln\dfrac{x+1}{x-1} - \ln(x-1)(x+1) =$
$= \ln\left[\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) : (x-1)(x+1)\right] = \ln\dfrac{1}{(x-1)^2}$

68. a) $\log(xy) = \log x + \log y = 3 + 5 = 8$

b) $\log\dfrac{x^2}{y} = \log x^2 - \log y = 2\log x - \log y = 2\cdot 3 - 5 = 1$

c) $\log x^{\log y} = (\log y)\cdot(\log x) = 5\cdot 3 = 15$

d) $\log\sqrt[3]{xy^2} = \dfrac{\log xy^2}{3} = \dfrac{\log x + \log y^2}{3} = \dfrac{\log x + 2\log y}{3} =$
$= \dfrac{3 + 2\cdot 5}{3} = \dfrac{13}{3}$

e) $\log\dfrac{y}{\sqrt[4]{x}} = \log y - \log\sqrt[4]{x} = \log y - \dfrac{\log x}{4} = 5 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{17}{4}$

f) $\log y^{\log(xy)} = \log(xy)\cdot\log y = (\log x + \log y)\cdot\log y =$
$= (3+5)\cdot 5 = 40$

69. Sigui $a \neq 1$, aleshores:

$$\frac{\log a^3}{\log a + \log\sqrt{a}} = \frac{3\cancel{\log a}}{\cancel{\log a} + \dfrac{\cancel{\log a}}{2}} = \frac{3}{1 + \dfrac{1}{2}} = 2$$

70. Fem servir les propietats del logaritme, el canvi de base i la calculadora:

a) $\log_5 36^2 = 2\log_5 36 = 2\log_5 6^2 = 2\cdot 2\cdot\log_5 6 = 4\cdot\log_5 6 =$
$= 4\cdot\dfrac{\log 6}{\log 5} = 4\cdot\dfrac{0{,}7781...}{0{,}6989...} = 4{,}4531$

b) $\log_2\sqrt{31} = \dfrac{\log_2 31}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\log 31}{\log 2} =$
$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1{,}4913...}{0{,}3010...} = 2{,}4771$

c) $\log_6 100 = \log_6 10^2 = 2\log_6 10 = 2\cdot\dfrac{\log 10}{\log 6} =$
$= 2\cdot\dfrac{1}{0{,}7781...} = 2{,}5702$

d) $\log_4 31^5 = 5\log_4 31 = 5\cdot\dfrac{\log 31}{\log 4} = 5\cdot\dfrac{1{,}4913...}{0{,}6020...} = 12{,}3855$

71. Utilitzem la definició del logaritme, $\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y$.

a) $\log_y 64 = 2 \rightarrow y^2 = 64 = 2^6 = (2^3)^2 \rightarrow y = 2^3 = 8$

b) $\log_y 1/4 = -2 \rightarrow y^{-2} = 1/4 = 2^{-2} \rightarrow y = 2$

c) $\log 4^y = 3 \rightarrow y \log 4 = 3 \rightarrow y = \dfrac{3}{\log 4} \rightarrow y = 2{,}9829$

d) $6^{-y} = 4 \rightarrow \log_6 4 = -y \rightarrow y = -\dfrac{\log 4}{\log 6} = 0{,}7737$

e) $\log y^3 = -3 \rightarrow 10^{-3} = y^3 \rightarrow (1/10)^3 = y^3 \rightarrow y = 1/10 = 0{,}1$

f) $8^y = 120 \rightarrow \log_8 120 = y \rightarrow y = \dfrac{\log 120}{\log 8} = 2{,}3023$

72. a) $\log_3 9^{x+3} = 3 \rightarrow 3^3 = 9^{x+3} = 3^{2x+6} \rightarrow 3 =$
$= 2x + 6 \rightarrow x = -1{,}5$

b) $\log_5 x + \dfrac{\log_5 125}{\log_5 x} = \dfrac{7}{2} \rightarrow$

$\rightarrow (\log_5 x)^2 - \dfrac{7}{2}\log_5 x + \log_5 125 = 0$

$2(\log_5 x)^2 - 7\log_5 x + 6 = 0,\ \log_5 x = t$

$2t^2 - 7t + 6 = 0 \rightarrow t = 2,$

$$t = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} \log_5 x = 2 \rightarrow x = 25 \\ \log_5 x = \dfrac{3}{2} \rightarrow x = 5\sqrt{5} \end{cases}$$

c) $\log(64 - x^3) - 3\log(4 - x) =$
$= 0 \rightarrow \log(64 - x^3) = 3\log(4 - x)$

$\log(64 - x^3) = \log(4 - x)^3 \rightarrow (64 - x^3) = (4 - x)^3$
$\rightarrow x = 0,\ x = 4$

Ens quedem amb el valor $x = 0$, ja que amb $x = 4$ no hi hauria solució del logaritme: $\log(64 - 4^3) = \log 0 \rightarrow \nexists$

73. a) $\log x - \log(x^2 - 2) = 1$

$\rightarrow \log \dfrac{x}{x^2 - 2} = 1 \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 2} =$

$= 10 \rightarrow x = \dfrac{1 + 3\sqrt{89}}{20} = 1{,}465$

Nota: No agafem el valor de $x = \dfrac{1 - 3\sqrt{89}}{20}$, ja que el logaritme $\log x$ donaria error.

b) $\log(x + 3) + \log x = 2$

$\log(x + 3)x = 2 \rightarrow (x + 3)x = 10^2 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{\sqrt{409} - 3}{2} = 8{,}612$

Nota: No agafem el valor de $x = \dfrac{-1 - \sqrt{409}}{2}$, ja que el logaritme $\log x$ donaria error.

c) $\log(3x - 1) + \log(x - 1) = 1 + \log x$

$\log(3x - 1)(x - 1) - \log x = 1 \rightarrow \log \dfrac{(3x - 1)(x - 1)}{x} = 1$

$\dfrac{(3x - 1)(x - 1)}{x} = 10 \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{46} + 7}{3} = 4{,}594$

Nota: No agafem el valor de $x = \dfrac{7 - \sqrt{46}}{3}$, ja que el logaritme $\log(x - 1)$ donaria error.

74. La fórmula per a calcular la magnitud d'un terratrèmol en l'escala de Richter és la següent:

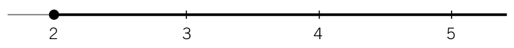
$$M = \log_{10}\left(\frac{A(\Delta t)^3}{1{,}62}\right)$$

En què A és l'amplitud de les ones en mil·límetres i Δt és el temps en segons des de l'inici de les ones P al de les ones S. Per tant, la magnitud és:

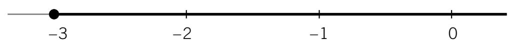
$$M = \log_{10}\left(\frac{23(24)^3}{1{,}62}\right) = 5{,}29$$

SÍNTESI Pàg. 42

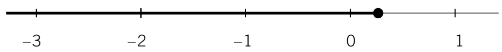
75. a) $\sqrt{x - 2} \rightarrow x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow [2, +\infty)$



b) $\sqrt{\dfrac{x + 3}{3}} \rightarrow \dfrac{x + 3}{3} \geq 0 \rightarrow x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$



c) $\sqrt{1 - 4x} \rightarrow 1 - 4x \geq 0 \rightarrow 1/4 \geq x \rightarrow (-\infty, 1/4]$



76. Racionalitzem de primer la fracció:

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)} =$$
$$= \frac{5 + 2\sqrt{6}}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

Aproximem aquest resultat a les mil·lèsimes:

$$5 + 2\sqrt{6} = 9{,}898\,979... \approx 9{,}899$$

Finalment, calculem el logaritme:

$$\log_6 \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \log_6 9{,}899 = \frac{\log 9{,}899}{\log 6} =$$
$$= \frac{0{,}995\,5...}{0{,}778\,1...} = 1{,}279$$

Avaluació (pàg. 44)

1. Tant en la resta, en la suma, en el producte com en la divisió de nombres irracionals pot donar com a resultat un nombre racional. Per exemple:

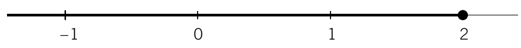
Suma: $(\sqrt{2} + 5) + (2 - \sqrt{2}) = 7$ (racional)

Resta: $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ (racional)

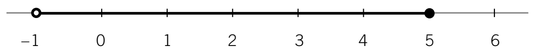
Producte: $(5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2}) = 23$ (racional)

Divisió: $\sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$ (racional)

2. a) $\{x/x \leq 2\} \rightarrow (-\infty, 2]$



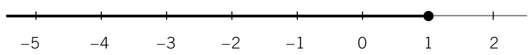
b) $\{x \,/\, -1 < x \leq 5\} \rightarrow (-1, 5]$



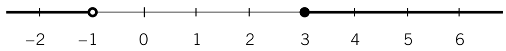
— Hi apliquem el següent: $d(a, b) = |b - a|$

$\rightarrow d(1, 5) = |5 - 1| = 4$

3. a)



b)



4. Calculem el nombre de glòbuls vermells del pacient amb un factor de conversió:

$$4{,}8 \cdot 10^6 \frac{g.r}{\cancel{mm^3}} \cdot \frac{10^6 \ \cancel{mm^3}}{1 \ \cancel{dm^3}} \cdot \frac{1 \ \cancel{dm^3}}{1 \ L} = 4{,}8 \cdot 10^{12} \ \frac{g.r}{L}$$

$$\Rightarrow \text{Nre. glòbuls} = 5 \ \cancel{L} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{12} \ \frac{g.r}{\cancel{L}} = 2{,}4 \cdot 10^{13} \text{ glòbuls}$$

— La longitud d'una filera formada pels glòbuls vermells d'aquest pacient expressada en quilòmetres és:

$$\text{long} = 2{,}4 \cdot 10^{13} \text{ glòbuls} \cdot 10^{-2} \text{ mm} = 2{,}4 \cdot 10^{11} \text{ mm}$$

$$2{,}4 \cdot 10^{11} \ \cancel{mm} \cdot \frac{1 \ km}{10^6 \ \cancel{mm}} = 2{,}4 \cdot 10^5 \ km$$

— Calculem ara el nombre de vegades que la filera de glòbuls vermells podria fer la volta a la Terra:

$$\Rightarrow \text{Nre. voltes} = 2{,}4 \cdot 10^5 \ \cancel{km} : 40\,000 \ \cancel{km} = 6$$

5. a) Com que l'aproximació ha de tenir dues xifres significatives i 8 > 5; l'aproximació queda així:

$$B = 1{,}68 \cdot 10^7 \approx 1{,}7 \cdot 10^7$$

b) Trobem els errors absolut i relatiu comesos:

$$\varepsilon_a = |1{,}68 \cdot 10^7 - 1{,}7 \cdot 10^7| = |-200\,000| = 200\,000$$

$$\varepsilon_r = \frac{200\,000}{1{,}68 \cdot 10^7} \cdot 100 = 1{,}19 \ \%$$

c) $A + B \cdot C = (5{,}2 \cdot 10^{-3}) + (1{,}7 \cdot 10^7 \cdot 7{,}3 \cdot 10^{-2}) =$
$= 1\,241\,000{,}005\,2$

d) Calculem els errors absolut i relatiu comesos:

$$A + B \cdot C = \left(5{,}2 \cdot 10^{-3}\right) + \left(1{,}68 \cdot 10^7 \cdot 7{,}3 \cdot 10^{-2}\right) = \\ = 1\,226\,400{,}005$$

$$\varepsilon_a = |1\,226\,400{,}005\,2 - 1\,241\,000{,}005\,2| = |-14\,600| = 14\,600$$

$$\varepsilon_r = \frac{14\,600}{1\,226\,400{,}005\,2} \cdot 100 = 1{,}19 \ \%$$

e) L'aproximació del nombre B fa que els errors relatius calculats en aquest exercici siguin iguals i que l'error absolut sigui més petit quan calculem $A + B \cdot C$.

6. a) $\sqrt{45} - 2\sqrt{20} + \dfrac{\sqrt{405}}{3} + \sqrt{80} = \sqrt{5 \cdot 3^2} - 2\sqrt{2^2 \cdot 5} +$
$+ \dfrac{\sqrt{5 \cdot 3^4}}{3} + \sqrt{2^4 \cdot 5} = 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \dfrac{9\sqrt{5}}{3} + 4\sqrt{5} =$
$= \sqrt{5}\,(3 - 4 + 3 + 4) = 6\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{x\sqrt{\sqrt{x^5y^3}}} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x^5y^3}}} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3\cdot2\cdot2]{x^5y^3} =$
$= \sqrt[3]{x}\,\sqrt[12]{x^5y^3} = \sqrt[12]{x^4}\,\sqrt[12]{x^5y^3} = \sqrt[12]{x^9y^3} = x^{\frac{9}{12}}\,y^{\frac{3}{12}} =$
$= x^{\frac{3}{4}}\,y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^3y}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5b^7c^4}}{\sqrt[3]{a^2b^5c^2}} = \dfrac{\sqrt[6]{a^5b^7c^4}}{\sqrt[6]{a^4b^{10}c^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^5b^7c^4}{a^4b^{10}c^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{a}{b^3}}$

7. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}\,\sqrt{2}}{5}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{5}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt[5]{5^4}}{\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{5^4}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt[5]{5^4}}{5} = \sqrt[5]{5^4}$

c) $\dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} = \dfrac{\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)} =$
$= \dfrac{\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)^2}{-6}$

8. a) Arrodonint a les mil·lèsimes els valors, tenim que:

$$A = \left(\sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{4 - \sqrt{5}}\right) = 2{,}288 \cdot 1{,}328 = \\ = 3{,}038 \ \text{cm}^2$$

b) Desenvolupem el producte de radicals i arrodonim $\sqrt{5}$ a les mil·lèsimes:

$$A = \left(\sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{4 - \sqrt{5}}\right) = \sqrt{\left(3 + \sqrt{5}\right)\left(4 - \sqrt{5}\right)} = \\ = \sqrt{7 + \sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5} = 2{,}236\,067... \approx 2{,}236 \Rightarrow A = \sqrt{7 + 2{,}236} = \\ = 3{,}039 \ \text{cm}^2$$

— Calculem els errors absoluts per a cada cas:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{a_1} = \left|\sqrt{7 + \sqrt{5}} - 3{,}038\right| = 0{,}001\,089\,9... \\ \varepsilon_{a_2} = \left|\sqrt{7 + \sqrt{5}} - 3{,}039\right| = 0{,}000\,089\,991\,6... \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_{a_1} > \varepsilon_{a_2}$$

Per tant, en el cas a) es comet un error absolut més gran que en el cas b). Això es deu al fet que, en simplificar-se en el càlcul de l'apartat b) $3\sqrt{5}$, s'ha reduït l'error global.

9. a) $0 \leq \log_3 x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \log_3 x \rightarrow 3^0 \leq x \rightarrow x \geq 1 \\ \log_3 x < 1 \rightarrow 3^1 > x \rightarrow x < 3 \end{cases} \Rightarrow [1, 3)$

b) $1 \leq \log_2 x \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \log_2 x \rightarrow 2^1 \leq x \rightarrow x \geq 2 \\ \log_2 x \leq 4 \rightarrow 2^4 \geq x \rightarrow x \leq 16 \end{cases} \Rightarrow [2, 16]$

c) $-1 \leq \log_2 x \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \log_2 x \rightarrow 2^{-1} \leq x \rightarrow x \geq \dfrac{1}{2} \\ \log_2 x \leq 0 \rightarrow 2^0 \geq x \rightarrow x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow [0{,}5;\ 1]$

d) $-2 < \ln x < 2 \Rightarrow e^{-2} < e^{\ln x} < e^2 \Rightarrow e^{-2} < x < e^2 \Rightarrow (e^{-2}, e^2)$

e) $0 < \log x < 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \log x \rightarrow 10^0 < x \rightarrow x > 1 \\ \log x < 2 \rightarrow 10^2 > x \rightarrow x < 100 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow (1, 100)$

f) $0 < \log 2x \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \log 2x \rightarrow 10^0 < 2x \rightarrow x > 0{,}5 \\ \log 2x \leq 3 \rightarrow 10^3 \geq 2x \rightarrow x \leq 500 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow (0{,}5; 500]$

10. Hi apliquem les propietats dels logaritmes:

a) $\log \sqrt[5]{\dfrac{xy^3}{z^2}} = \dfrac{\log \dfrac{xy^3}{z^2}}{5} = \dfrac{\log xy^3 - \log z^2}{5} =$

$= \dfrac{\log x + \log y^3 - \log z^2}{5} = \dfrac{\log x + 3\log y - 2\log z}{5} =$

$= \dfrac{3{,}1 + 3 \cdot (-0{,}7) - 2 \cdot 0{,}4}{5} = 0{,}04$

b) $\log \dfrac{0{,}01x^2\sqrt{y}}{z^2} = \log 0{,}01x^2\sqrt{y} - \log z^2 = \log\ 0{,}01 +$

$+ \log x^2 + \log \sqrt{y} - \log z^2 = \log \dfrac{1}{100} + 2\log x + \dfrac{\log y}{2} -$

$- 2\log z = \log\ 1 - \log\ 100 + 2 \cdot 3{,}1 + \dfrac{-0{,}7}{2} - 2 \cdot 0{,}4 =$

$= -\log\ 10^2 + 6{,}2 - 0{,}35 - 0{,}8 = -2\log\ 10 + 5{,}05 =$

$= -2 \cdot 1 + 5{,}05 = 3{,}05$

11. a) $\log_3 54 = \dfrac{\log\ 54}{\log\ 3} = \dfrac{1{,}7323...}{0{,}4771...} = 3{,}631$

b) $\log\ 0{,}2144 = \log \dfrac{2144}{10\,000} = \log\ 2144 - \log\ 10\,000 =$

$= \log\ 2144 - 4\log\ 10 = \log\ 2144 - 4 \cdot 1 = -0{,}669$

c) $\log_7 0{,}69 = \dfrac{\log\ 0{,}69}{\log\ 7} = \dfrac{-0{,}1611...}{0{,}8450...} = -0{,}191$

d) $\log_4 \sqrt[6]{8^3} = \dfrac{\log_4 8^3}{6} = \dfrac{3\log_4 8}{6} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\log\ 8}{\log\ 4} = 0{,}75$

e) $\log_{\sqrt{5}} 100 = \dfrac{\log\ 100}{\log \sqrt{5}} = \dfrac{2\log\ 10}{\dfrac{\log\ 5}{2}} = \dfrac{4\log\ 10}{\log\ 5} =$

$= \dfrac{4}{0{,}698...} = 5{,}723$

f) $\ln(\ln\ 512) = \ln(\ln\ 2^9) = \ln(9 \cdot \ln\ 2) = \ln\ 6{,}238... = 1{,}831$

12. a) $3\,(2\log_2 A - 5\log_2 B) = 3\,(\log_2 A^2 - \log_2 B^5) =$

$= 3\log_2 \dfrac{A^2}{B^5} = \log_2 \dfrac{A^6}{B^{15}}$

b) $\ln [x(x+1)] - 3 \cdot \ln x^2 = \ln [x(x+1)] - \ln x^6 = \ln \dfrac{x(x+1)}{x^6}$

Zona+ (pàg. 45)

— **Euler i els matemàtics del seu temps**

- Resposta suggerida:

  La constant matemàtica e és l'únic nombre real el valor de la derivada del qual (el pendent de la seva línia tangent) en la funció $f(x) = e^x$ en el punt $x = 0$ és exactament 1.

  La definició més comuna de e és com el valor límit de la sèrie $e = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$

- El valor del nombre e és 2,71828182845904523536028.

  Fins avui, s'han trobat 1000000000000 xifres.

— **Dublín i els logaritmes**

- McCann va assenyalar 15 punts al llarg dels dos canals que limitaven Dublín i va tractar d'unir-los usant un algorisme que trobés un camí de nord a sud i d'est a oest que passés a no menys de 35 metres de cadascun d'aquests punts.
- Resposta suggerida:

  Els logaritmes són presents en química quan es mesura el *pH*, en la interpretació de la intensitat d'un terratrèmol, en el creixement de poblacions, en psicologia, etc.

— **L'arrodoniment i el preu de la gasolina**

- Resposta suggerida: amb aquesta pregunta es pretén que l'alumne reflexioni sobre la influència que pot tenir fixar el pres de la gasolina a les mil·lèsimes d'euro i que es pregunti a quins motius podria ser degut, relacionant-ho amb les aproximacions per excés i defecte que es puguin donar.
- Amb l'opció d'aproximar el preu a les mil·lèsimes, tenim que el preu final en un dia a Espanya és d'$1{,}364 \cdot 1{,}22 \cdot 10^7 =$ $= 16640800$ €.

  Amb l'opció d'aproximar el preu a les centèsimes (1,36), tenim que el preu final en un dia a Espanya és d'$1{,}36 \cdot 1{,}22 \cdot 10^7 =$ $= 16592000$ €.

  Per tant, l'estalvi per als conductors escollint l'opció d'aproximar el preu a les centèsimes, opció més beneficiosa, és de 48800 €.