10 Funcions de variable real

En context (pàg. 237)

a) La catenària és la forma que té un cable subjecte de dos punts, com per exemple els cables elèctrics; l'equació que la descriu és:

$$y = \frac{1}{2\gamma}\left[\cos h\left(\gamma(2x-a)\right) - \cos h(\gamma a)\right]$$

En canvi, la fórmula de la paràbola és:

$$y = x^2$$

b) Gaudí també dissenyava amb formes helicoïdals, el·lipses, cercles, etc.

c) Resposta oberta a manera de reflexió personal.

Llenguatge matemàtic (pàg. 238)

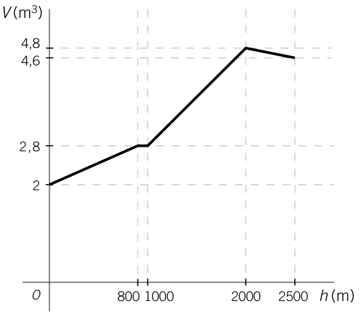
Resposta oberta a manera de reflexió personal.

Fixa-t'hi (pàg. 239)

Per poder-la considerar una funció, per a cada valor de x només hauria d'existir un valor de $f(x)$, cosa que no passa, per exemple, en $x = 4$.

Problemes resolts (pàgs. 252 i 253)

1. a)



$D(f) = [0, 2\,500]$

$R(f) = [2; 4,8]$

Creix en (0, 800) i (1 000, 2 000), experimenta un màxim en (2 000; 4,8) i decreix en (2 000, 2 500).

b) $V(h = 400) = 2,4\text{m}^3$

2. a) $f(t) = \dfrac{2}{t-1}$

Busquem el punt on s'anul·la el denominador:

$t - 1 = 0 \rightarrow t = 1$

Per tant, el domini és: $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

El recorregut és:

$R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $f(x) = e^{x+1}$

L'equació té valor per a qualsevol valor de x. Per tant: $D(f) = \mathbb{R}$

Una exponencial de base positiva sempre donarà un valor positiu; per tant, el recorregut és: $D(f) = (0, +\infty)$

3. a) $h \circ g = h\left(g(x)\right) = \dfrac{1}{e^{-x} - 2}$

b) $h \circ f \circ g = h\left(f\left(g(x)\right)\right) = \dfrac{1}{\left(e^{-2x}\right) - 2 - 2} = \dfrac{1}{e^{-2x} - 4}$

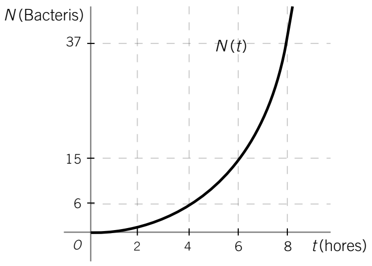
c) $f \circ g = f\left(g(x)\right) = e^{-2x} - 2$

d) $f \circ g \circ h = f\left(g\left(h(x)\right)\right) = e^{\frac{-2}{x-2}} - 2$

4. a) $N = N_0 \cdot 2^{kt} \rightarrow 6 = 2^{4k} \rightarrow \log 6 = 4k \log 2$

$k = \dfrac{\log 6}{4 \log 2} = 0,65$

b)



Exercicis i problemes (pàgs. 254 a 258)

1 CONCEPTE DE FUNCIÓ Pàg. 254

5. a) $f(x) = x^3 - 4x + 6$

$f(0) = 6$ $f(-2) = 6$ $f(3) = 21$

b) $f(x) = \sqrt{x-3}$

$f(0)$ N.E $f(-2)$ N.E. $f(3) = 0$

c) $f(x) = ln(x + 1)$

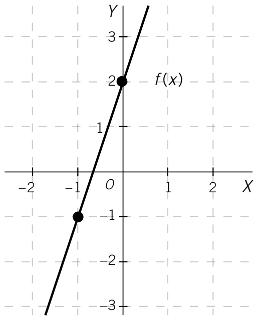
$f(0) = 0$ $f(-2)$ N.E. $f(3) = 1,39$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

$f(0) = -0,5$ $f(-2)$ N.E. $f(3) = 0,4$

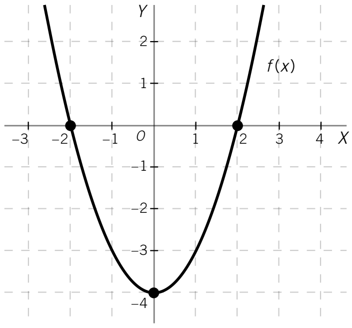
6. a) $f(x) = 3x + 2$

x	$f(x)$
−1	−1
0	2
1	5



b) $f(x) = x^2 - 4$

x	$f(x)$
−4	12
−2	0
0	−4
2	0
4	12



7. a) $f(x) = 2{,}5 + 0{,}2x$

b) $f(t) = N_0 \cdot e^{-t}$

8. $f(x) = 0$ no existeix.

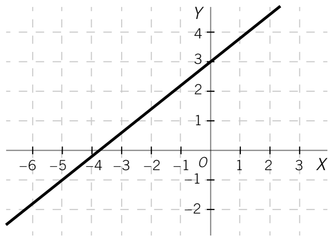
$f(x) = 1$ s'esdevé quan $x = 0$.

$f(x) = 1$ s'esdevé quan $x = -1$.

9. Considerem els punts de tall de la recta amb els eixos de coordenades; són (−6,0) i (0, 3), de manera que:

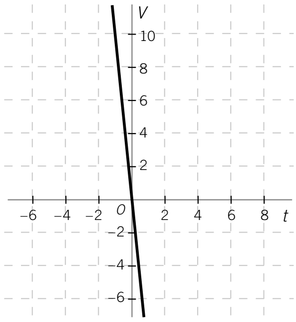
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow \frac{x + 6}{6} = \frac{y}{3} \rightarrow y = 0{,}5x + 3$$

10. a) $f(x) = 3 + 0{,}8x$



b) No és una funció.

c) $V(t) = -9{,}8 \cdot t$



11. a) $f(x) = \dfrac{5}{x - 3}$

Busquem el punt on s'anul·la el denominador:

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Per tant: $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

Com que el numerador mai no pot ser 0, tampoc no ho podrà ser $f(x)$. Per tant:

$$R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

b) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

El radicand no pot ser negatiu, així que:

$$x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

$D(f) = [2, +\infty)$

Com que és una arrel, $f(x)$ només pot prendre com a valors 0 o valors positius, $R(f) = [0, +\infty)$.

12. $f(x) = \dfrac{2}{x - 4}$

a) $f(2) = -1$ $f(4)$ N.E. $f(6) = 1$

b) $f(x) = 0{,}25$

$$\frac{2}{x - 4} = 0{,}25 \rightarrow 8 = x - 4 \rightarrow x = 12$$

$f(x) = -1$

$$\frac{2}{x - 4} = -1 \rightarrow -2 = x - 4 \rightarrow x = 2$$

$f(x) = 0{,}5$

$$\frac{2}{x - 4} = 0{,}5 \rightarrow 4 = x - 4 \rightarrow x = 8$$

13. a) $f(x) = \sqrt{(x - 3)(x + 3)}$

Sabem que el radicand no pot ser negatiu i que els punts que cal estudiar són −3 i 3.

	x				
	−4	−3	0	3	4
$x - 3$	−	−	−	0	+
$x + 3$	−	0	+	+	+
$(x - 3)(x + 3)$	+	0	−	0	+

$$D(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

b) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \cos x \rightarrow D(f) = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} \rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

d) $f(x) = \dfrac{4x}{x^3 - x}$

Busquem els punts on s'anul·la el denominador:

$$x^3 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

14. a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

El radicand no pot ser negatiu; per tant:

$$x^2 + 2x + 1 > 0 \rightarrow (x+1)^2 > 0$$

	−2	1	2
$x + 1$	−	0	+
$(x + 1)^2$	+	0	+
$x^2 + 2x + 1$	+	0	+

$D(f) = \mathbb{R}$

Com que és una arrel, $f(x)$ només pot prendre com a valors 0 o valors positius: $R(f) = [0, +\infty)$

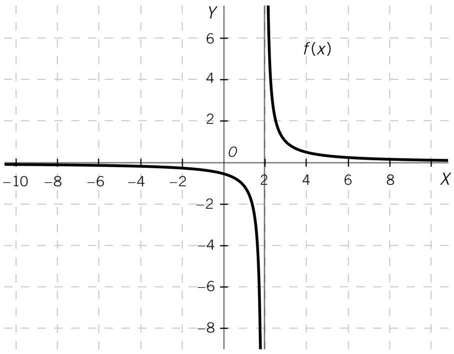
b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

Busquem els punts on s'anul·la el denominador:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Per trobar el recorregut, representem gràficament la funció:

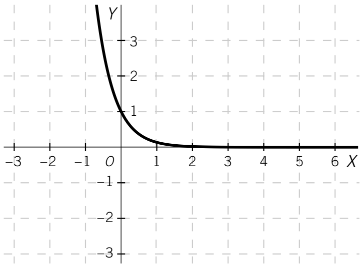


$R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

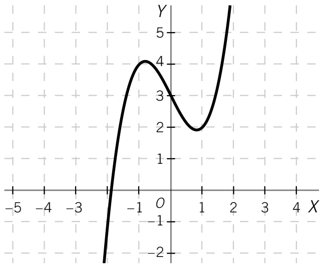
15. Veiem que es tracta d'una paràbola. Tindrà la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; a més a més, sabem que passa per (−2, 0), (0, −2) i (2, 0).

$$\left.\begin{array}{l} a(-2)^2 + b(-2) + c = 0 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -2 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = x^2 - 4$$

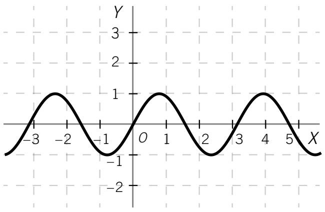
16. a) $f(x) = e^{-2x}$



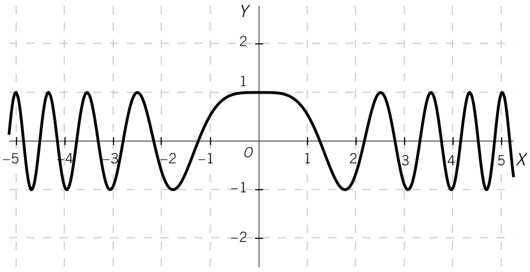
b) $f(x) = x^3 - 2x + 3$



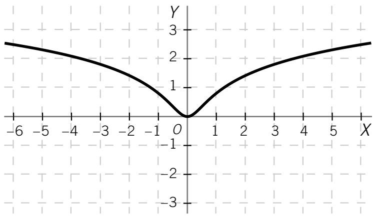
c) $f(x) = \sin(2x)$



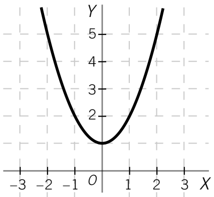
d) $f(x) = \cos(x^2)$



e) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$



f) $f(x) = x^2 + 1$



17. Les gràfiques de la dreta no corresponen a funcions, ja que per a alguns valors de x tenen assignats més d'un valor de $f(x)$; ho podem comprovar amb $x = 4$ en la gràfica superior dreta, i amb $x = 3$ en la gràfica inferior dreta. En la gràfica superior esquerra: $D(f) = \mathbb{R}$ i $R(f) = [0, +\infty)$. En la gràfica inferior esquerra: $D(f) = \mathbb{R}$ i $R(f) = [-1, 1]$.

2 OPERACIONS AMB FUNCIONS Pàg. 255

18. $f(x) = x + 2 \quad g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 8} \quad x = 4$

a) $g(x) - f(x) = 0{,}5 - 6 = -5{,}5$

b) $f(x) \cdot g(x) = 6 \cdot 0{,}5 = 3$

c) $(f \circ g)(x) = \dfrac{4}{4^2 - 8} + 2 = 2{,}5$

d) $(g \circ f)(x) = \dfrac{6}{6^2 - 8} = 0{,}21$

19. $f(x) = x^2 - 1 \quad g(x) = 2x + 3 \quad h(x) = \dfrac{2}{x + 1}$

a) $f(x) + g(x) = x^2 - 1 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 2$

b) $f(x) + h(x) = x^2 - 1 + \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{x^3 + x^2 - x + 1}{x + 1}$

c) $h(x) - g(x) = \dfrac{2}{x + 1} - 2x - 3 = \dfrac{-2x^2 - 5x - 1}{x + 1}$

d) $g(x) - h(x) = 2x + 3 - \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1}$

e) $f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 1)(2x + 3) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

f) $g(x) \cdot h(x) = (2x + 3) \cdot \left(\dfrac{2}{x + 1}\right) = \dfrac{4x + 6}{x + 1}$

g) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 3}$

h) $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 1}$

20. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

a) $f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \dfrac{x^2 - 4}{x}$

b) $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{(x^2 - 4)^{3/2}}{x}$

c) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\dfrac{(x^2 - 4)^2 - 4x^2}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{x^4 - 12x^2 + 16}{x^2}}$

d) $(g \circ f)(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x}$

21. $f(x) = \cos x \quad g(x) = \sqrt{x - 2}$

a) $(f \circ g)(x) = \cos\left(\sqrt{x - 2}\right)$

b) $(g \circ f)(x) = \sqrt{\cos x - 2}$

c) $(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x - 2} - 2}$

d) $(f \circ g \circ f)(x) = \cos\left(\sqrt{\cos x - 2}\right)$

22. Consisteix a intercanviar la $f(x)$ per la x i, posteriorment, aïllar la nova $f(x)$, que serà la funció inversa.

a) $f(x) = 2x - 6 \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} + 3$

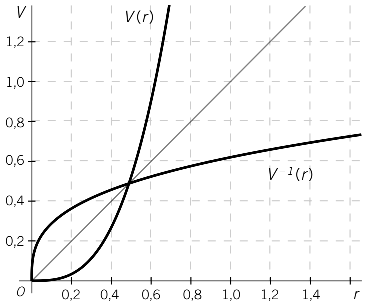
b) $f(x) = -x \rightarrow f^{-1}(x) = -x$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16} \rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x^2 + 16}$

d) $f(x) = \dfrac{2x}{x - 5} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{5x}{x - 2}$

23. $V(r) = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

$V^{-1}(r) = \sqrt[3]{\dfrac{3r}{4\pi}}$



3 TRANSFORMACIÓ DE FUNCIONS Pàg. 255

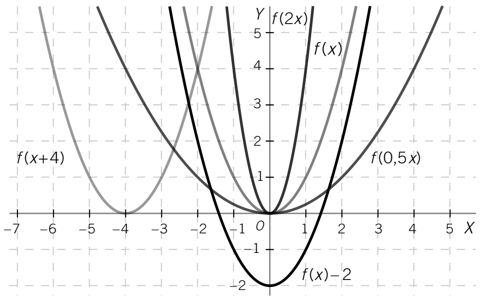
24. $f(x) = x^2$

a) $f(x) - 2$

b) $f(x + 4)$

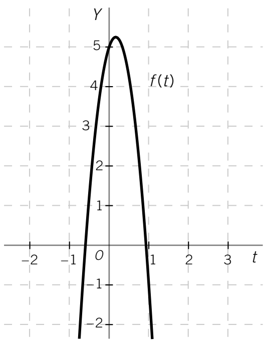
c) $f(2x)$

d) $f(0{,}5x)$

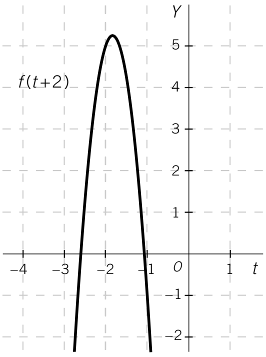


25. $f(t) = 5 + 3t - 4{,}9t^2$

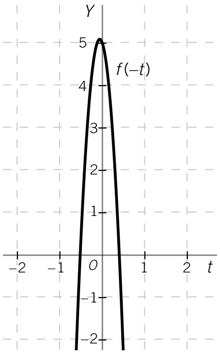
a)



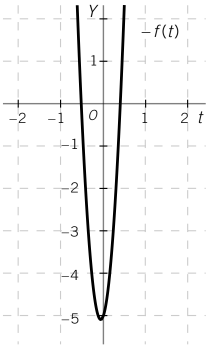
b)



c)



d)



26. Vermella → $f(x) = x^2$

Marró → $f(x) = 4x^2$

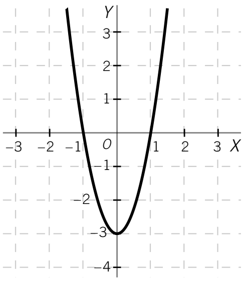
Groga → $f(x) = (x + 1)^2$

Negra → $f(x) = x^2 - 2$

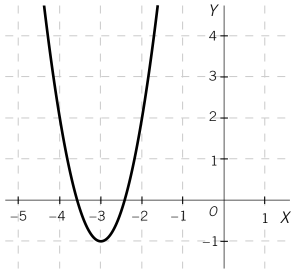
Blava → $f(x) = (x + 2)^2 - 2$

27. La funció de la gràfica és $f(x) = 3x^2 - 1$.

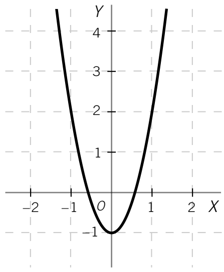
a) $f(x) - 2$



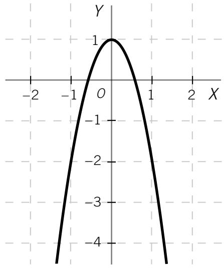
b) $f(x + 3)$



c) $f(-x)$



d) $-f(x)$



4 CARACTERÍSTIQUES D'UNA FUNCIÓ

Pàgs. 255 i 256

28. a) $f(x) = 4x$

Busquem el valor de $f(x)$ quan $x = 0$:

$$f(0) = 0$$

Per tant, el punt de tall és (0, 0).

b) $f(x) = 3x - 2$

Calculem el valor de $f(x)$ quan $x = 0$:

$$f(0) = -2$$

Per tant, el punt de tall és (0, –2). Busquem ara el valor de x quan $f(x) = 0$:

$$3x - 2 = 0 \rightarrow x = 2/3$$

Per tant, el punt de tall és (2/3, 0).

c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Calculem el valor de $f(x)$ quan $x = 0$:

$$f(0) = 2$$

Per tant, el punt de tall és (0, 2).

Busquem el valor de x quan $f(x) = 0$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Per tant, els punts de tall són (1, 0) i (2, 0).

d) $f(x) = x^2 - 16$

Calculem el valor de $f(x)$ quan $x = 0$:

$$f(0) = -16$$

Per tant, el punt de tall és (0, –16).

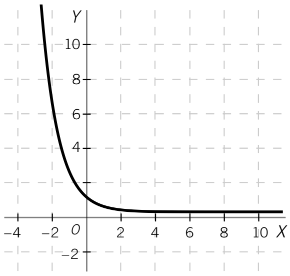
Busquem el valor de x quan $f(x) = 0$:

$$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

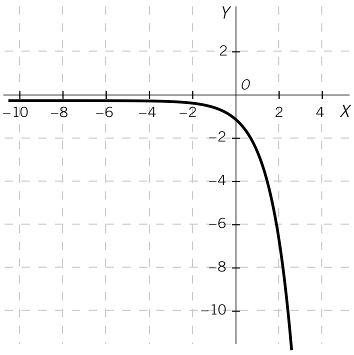
Per tant, els punts de tall són (–4, 0) i (4, 0).

29. $f(x) = e^x$

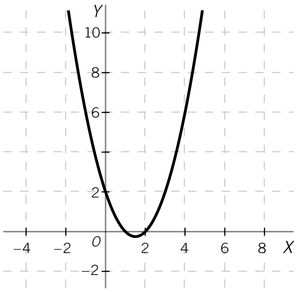
a) $f(-x)$



b) $-f(x)$

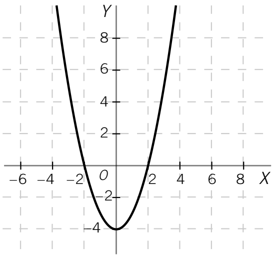


30. a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$



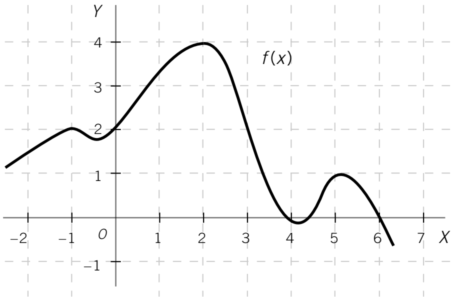
Mínim en (1,5, –0,25)

b) $f(x) = x^2 - 4$

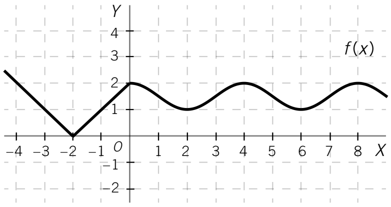


Mínim en (0, –4)

31.



32.



33. a) La funció és creixent en tot el seu domini.

Els punts de tall són $(0,0), (\pi,0), (2\pi,0)$; no té màxims ni mínims.

b) La funció creix entre $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0,2)$, i decreix en $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup (2,+\infty)$. Els punts de tall són (–2π, 0), (–π, 0), (0, 1) i (5, 0).

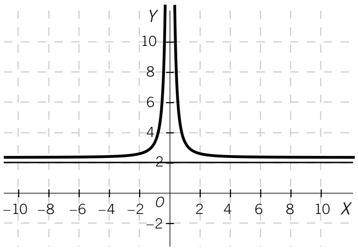
34. a) $f(x) = 4x^2 - 16$: funció parella.

b) $f(x) = \sin 2x$: funció imparella.

c) $f(x) = 2x^3 + x$: funció imparella.

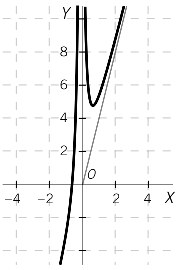
d) $\dfrac{2}{x^2 - 1}$: funció parella.

35. a) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$



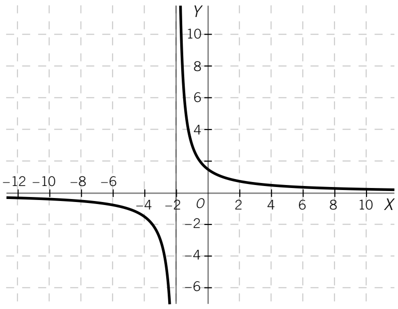
Asímptotes $x = 0$, $y = 2$.

b) $f(x) = \dfrac{4x^3 + 1}{x^2}$



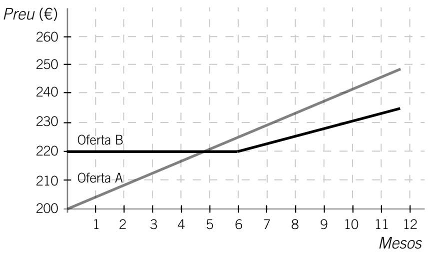
Asímptotes $x = 0$, $y = 4x$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x + 2}$



Asímptotes $x = -2$, $y = 0$

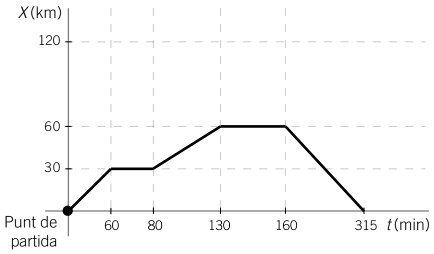
36. a)



b) L'oferta *A* és mes favorable els 5 primers mesos. A partir de llavors és més favorable l'oferta *B*.

c) La diferència és màxima en el moment de comprar l'ordinador i és de 20 €.

37. a)



b) $D(f) = [0, 5 \text{ h } 15 \text{ min}]$ $\quad R(f) = [0, 60]$

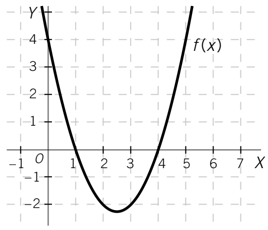
c) Els punts de tall són (0, 0) i (5 h 15 min, 0).

d) Creix en (0, 1), (1 h 20 min, 2 h 10 min) i decreix en (2 h 40 min, 5 h 15 min).

e) No té màxims ni mínims relatius.

38. a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Com que és una funció polinòmica $D(f) = \mathbb{R}$. El vèrtex de la paràbola es troba en $x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{5}{2}$ i correspon a un mínim absolut, ja que $a > 0$. La funció decreix en $(-\infty, 2{,}5)$ i creix en $(2{,}5, +\infty)$. La funció talla els eixos en (0, 4), (1, 0) i (4, 0).



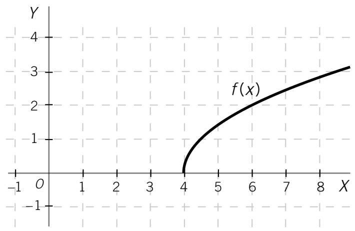
b) $f(x) = \sqrt{2x - 8}$

El radicand ha de ser positiu o nul:

$$2x - 8 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$$

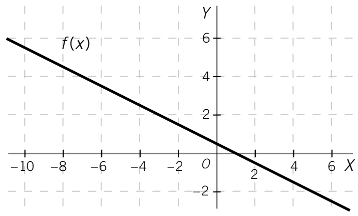
Per tant, $D(f) = [4, +\infty)$. El recorregut d'una arrel quadrada simple és: $R(f) = [0, +\infty)$.

La funció no presenta extrems relatius ni absoluts, i presenta punts de tall en (4, 0).



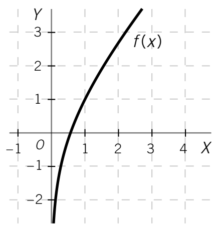
c) $f(x) = \dfrac{-x + 1}{2}$

Com que és una funció polinòmica, sabem que $D(f) = \mathbb{R}$ i $R(f) = \mathbb{R}$. La funció és decreixent en tot el seu domini i no presenta extrems absoluts ni relatius; talla els eixos en els punts (0, 1/2) i (1, 0).



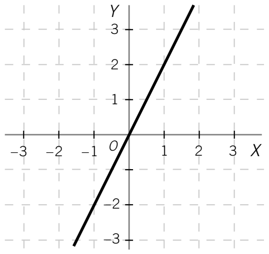
d) $f(x) = \ln x + x$

El contingut d'un logaritme mai no pot ser negatiu ni nul; per tant, $D(f) = (0, +\infty)$ i $R(f) = \mathbb{R}$. La funció sempre és creixent i no presenta extrems absoluts ni relatius; talla amb els eixos de coordenades en (0,567; 0).

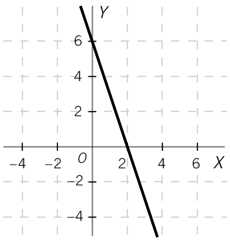


5 TIPUS DE FUNCIONS Pàgs. 256 i 257

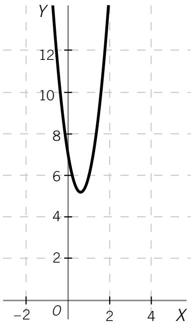
39. a) $f(x) = 2x$



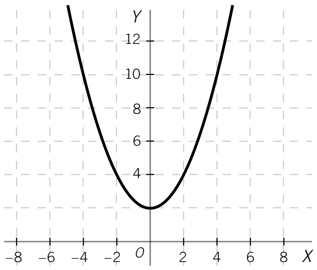
b) $f(x) = -3x + 6$



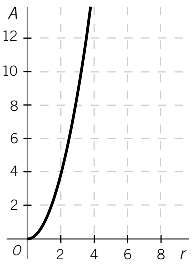
c) $f(x) = 5x^2 - 6x + 7$



d) $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$



40. $A = \pi r^2$

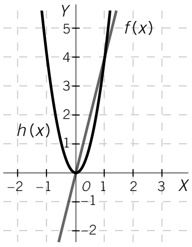


41. En el cas lineal, sabem que passa per (0, 0) i (1, 4):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{f(x) - 0}{4 - 0} \rightarrow$$
$$\rightarrow f(x) = 4x$$

En el cas de la interpolació quadràtica, sabem que el vèrtex es troba en (0, 0). La posició del vèrtex és determinada per $x_v = -\frac{b}{2a}$; per tant, b ha de ser 0. Així:

$$h(x) = ax^2 + c \rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot 0^2 + c = 0 \\ a \cdot 1^2 + c = 4 \end{array}\right\} \rightarrow h(x) = 4x^2$$

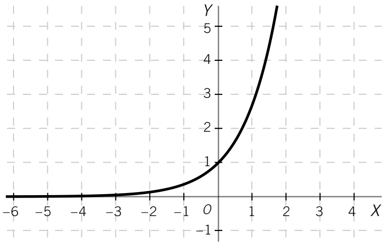


Les expressions algèbriques són $y = 4x$ i $y = 4x^2$.

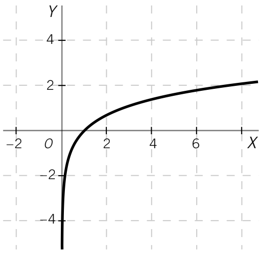
42. Sabem que la funció passa pels punts (0, 3) i (3/2, 0); així:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow \frac{x - 0}{3/2 - 0} = \frac{f(x) - 3}{0 - 3} \rightarrow$$
$$\rightarrow f(x) = -2x + 3$$

43. a) $f(x) = e^x$



b) $f(x) = \ln x$



44. a) $f(x) = \cos(2x)$

$f(\pi/2) = -1 \quad f(3\pi/2) = -1 \quad f(-\pi) = 1$

b) $f(x) = \sin^2 x$

$f(\pi/2) = 1 \quad f(3\pi/2) = 1 \quad f(-\pi) = 0$

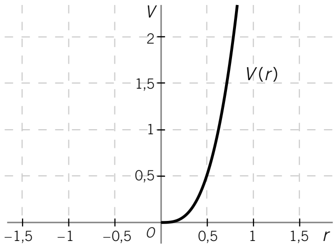
c) $f(x) = \text{tg}^2 x$

$f(\pi/2)$ *N.E.* $\quad f(3\pi/2)$ *N.E.* $\quad f(-\pi) = 0$

d) $f(x) = \operatorname{cosec} x$

$f(\pi/2) = 1 \qquad f(3\pi/2) = -1 \qquad f(-\pi)$ *N.E.*

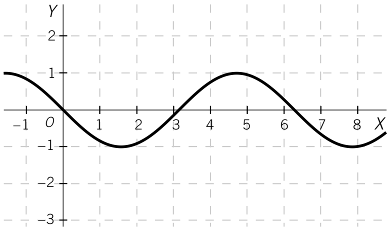
45. $V(r) = \dfrac{4\pi r^3}{3}$. Com que el radi és una distància, no pot ser negatiu; això implica que $D(f) = [0, +\infty)$.



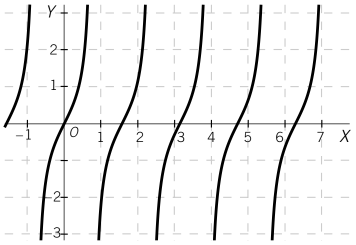
46. a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

b) Decreix en $(-\infty, 0]$ i creix en $[3, +\infty)$. La funció no té màxims ni mínims i talla els eixos en el punt (0, 0).

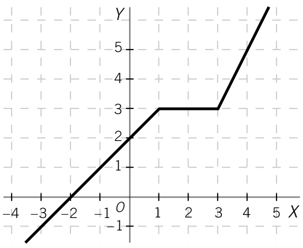
47. a) $f(x) = \sin(x - \pi)$



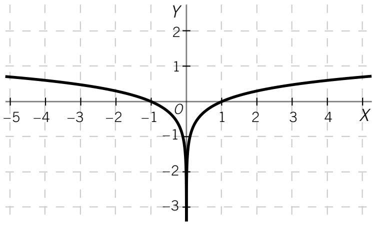
b) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$



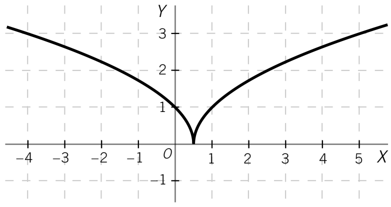
48. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



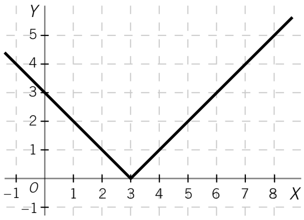
49. a) $f(x) = \log|x|$



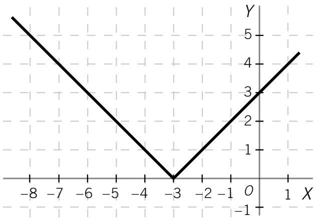
b) $f(x) = \sqrt{|2x - 1|}$



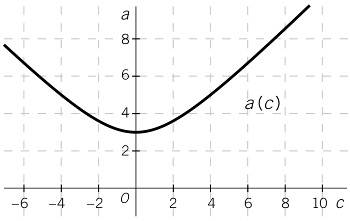
c) $f(x) = |x - 3|$



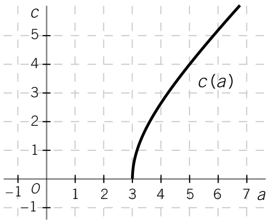
d) $f(x) = |-x - 3|$



50. a) $a(c) = \sqrt{c^2 + 9}$



b) $c(a) = \sqrt{a^2 - 9}$

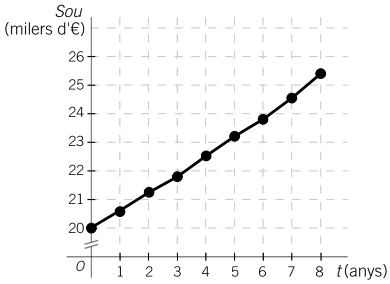


c) $[3, +\infty)$

51. a)

Any	Sou
0	20 000
1	20 600
2	21 218
3	21 854,54
4	22 510,17
5	23 185,48
6	23 881,04
7	24 597,47
8	25 335,40

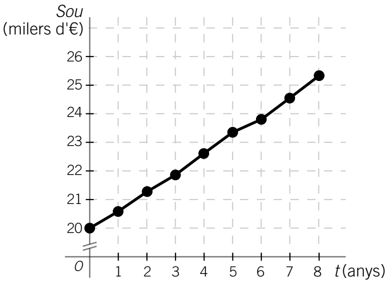
b)



c) $200\,000 \cdot x^8 = 25\,000 \rightarrow x = 1{,}0283 \rightarrow i = 2{,}83\ \%$

d) Calculem el sou de cada any en aquest cas.

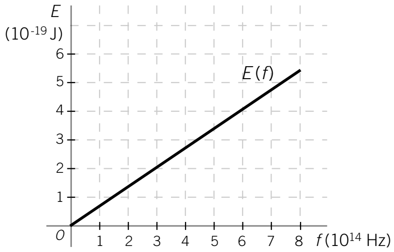
Any	Sou
0	20 000
1	20 650
2	21 300
3	21 950
4	22 600
5	23 250
6	23 900
7	24 550
8	25 200



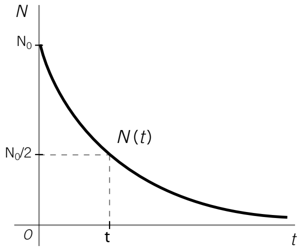
e) Els sis primers anys haurà cobrat més amb la segona oferta.

f) Sumant els sous de les dues opcions, comprovem que al treballador li hauria interessat més la segona opció i a l'empresa, la primera.

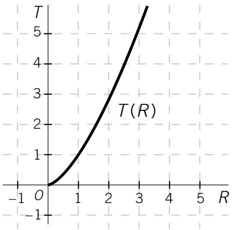
52. a) $E = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot f$. La representació corresponent tindrà un aspecte semblant a:



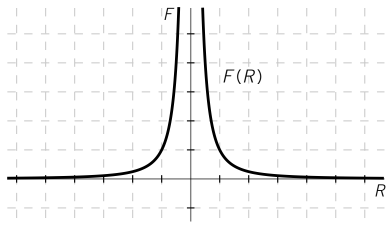
b) $N = N_0 \cdot e^{-kt}$. La representació corresponent tindrà un aspecte semblant a:



c) $T = k\sqrt{R^3}$. La representació corresponent tindrà un aspecte semblant a:



d) $F = \dfrac{k}{R^2}$. En el cas de la Terra i la Lluna, el valor de k és de $2{,}93 \cdot 10^{37}$. La representació corresponent tindrà un aspecte semblant a:



53. Descriu l'oscil·lació d'un pèndol al llarg del temps. L'amplitud d'oscil·lació és de 3 cm.

6 INTERPOLACIÓ I EXTRAPOLACIÓ

Pàgs. 257 i 258

54. $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}x$

a) $f(3) = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$

b) $f(4{,}5) = 1{,}5 \cdot 4{,}5 = 6{,}75$

c) $f(5) = 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$

55. a) $f(0) = 1{,}5 \cdot 0 = 0$

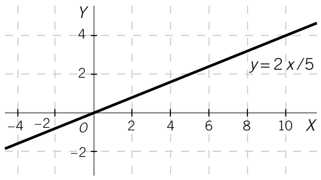
b) $f(20) = 1{,}5 \cdot 20 = 30$

56. Una interpolació cúbica tindrà la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hem de trobar, per tant, 4 incògnites (a, b, c i d). Per a això, necessitem 4 equacions que seran proporcionades per 4 punts.

57. a) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow \dfrac{x - 15}{35 - 15} = \dfrac{y - 6}{14 - 6}$

$y = \dfrac{2x}{5}$

b)



c) $y = \dfrac{2}{5}x \rightarrow x = \dfrac{5}{2}y \rightarrow F = 21{,}25$ N

d) $a(50\text{ N}) = 20\,\dfrac{m}{s^2} \qquad a(80\text{ N}) = 32\,\dfrac{m}{s^2}$

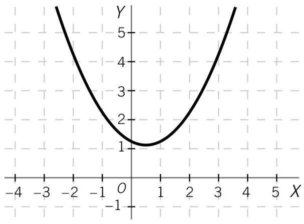
58. $\left.\begin{array}{l} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 = c \\ 1 = a + b + c \\ 9 = 9a + 3b + c \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

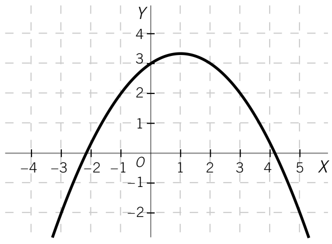
a) $f(0{,}5) = 1{,}5$

b) $f(4) = 19$

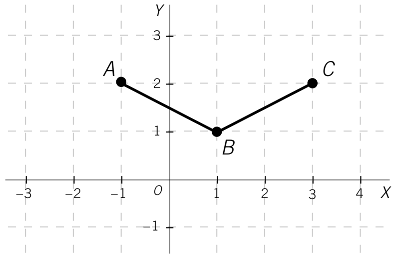
59. a) $\left.\begin{array}{l} 2 = a - b + c \\ 1 = a + b + c \\ 2 = 9a + 3b + c \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{4}$



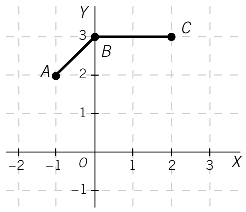
$\left.\begin{array}{l} 2 = a - b + c \\ 3 = c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2x}{3} + 3$



b) AB $\rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$ BC $\rightarrow y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$



AB $\rightarrow y = -x + 1$ BC $\rightarrow y = 3$



60. a) $\left.\begin{array}{l} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 = c \\ 4 = a + b + c \\ 7 = 4a + 2b + c \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

b) $f(3) = 14$

c) $g(x)$ és la funció lineal que passa per (0, 5) i (1, 4).

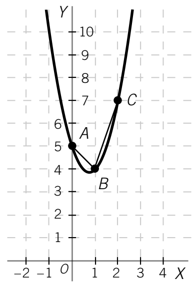
$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{g(x) - 5}{4 - 5} \rightarrow g(x) = -x + 5$$

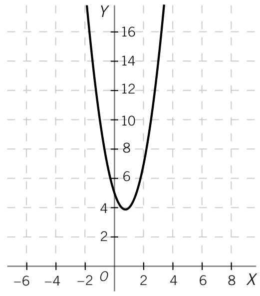
$h(x)$ és la funció lineal que passa per (1, 4) i (2, 7).

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{h(x) - 4}{7 - 4} \rightarrow h(x) = 3x + 1$$

d) $g(5) = 0 \qquad h(5) = 16$

e)



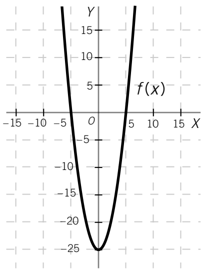


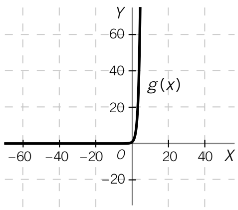
SÍNTESI Pàg. 258

61. a) $D(f) = \mathbb{R} \quad R(f) = [-25, +\infty)$

$D(g) = \mathbb{R} \quad R(f) = (0, +\infty)$

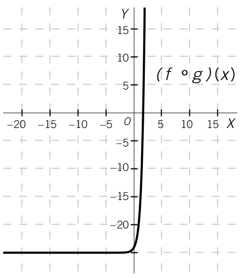
b)

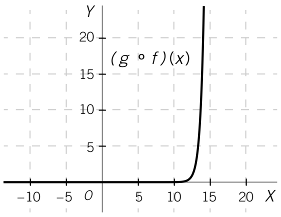




c) $(f \circ g) = e^{2x} - 25 \qquad (g \circ f) = e^{x^2-25}$

d)





e) La funció $f(g(x))$:

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \qquad R(f \circ g) = [-25, +\infty)$$

No presenta màxims ni mínims i és creixent en tot el seu domini.

La funció $g(f(x))$:

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \qquad R(g \circ f) = (0, +\infty)$$

Decreix en $(-\infty, 0)$, presenta un mínim en (0, 0) i creix en $(0, +\infty)$.

f) Resposta suggerida:

Escollim dos punts qualssevol de $f(x)$, com (–5, 0) i (5, 0).

$$\frac{x-(-5)}{5-(-5)} = \frac{y-0_1}{0-0} \rightarrow f(x) = 0$$

62. a) Si la funció és contínua i $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$, significa que la funció passa de tenir valor positiu a valor negatiu. Per tant, en efectuar aquesta transició ha de tallar l'eix d'abscisses en un punt anomenat c. Així, $f(c) = 0$.

b) Si la funció és contínua i no constant, perquè $f(a) = f(b)$ la funció ha de decréixer i després créixer, o viceversa; per tant, existeix algun extrem relatiu.

63. a) $f(2) = 0 \quad f(4) = 1,41$

$g(2) = 1{,}098 \quad g(5) = 1{,}609$

b) Estudi de $f(x)$:

$$D(f) = [2, +\infty) \qquad R(f) = [0, +\infty)$$

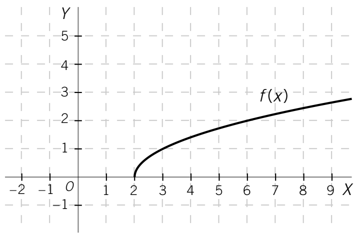
És creixent en tot el seu domini i no presenta extrems. Talla els eixos en (2, 0). No té simetria ni periodicitat.

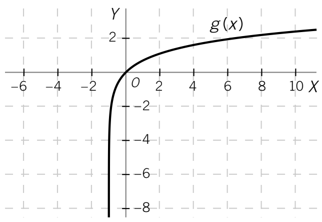
Estudi de $g(x)$:

$$D(g) = (-1, +\infty) \qquad R(g) = \mathbb{R}$$

És creixent en tot el seu domini i no presenta extrems. Talla els eixos en (0, 0). No té simetria ni periodicitat.

c)





d) $\sqrt{x-2} = \ln(x+1) \rightarrow x = 5{,}51 \rightarrow (5{,}51;\ 1{,}87)$

e) $(f \circ g) = \sqrt{\ln(x+1) - 2}$

f) Estudiem la funció $(f \circ g)$:
El radicand no pot ser negatiu; per tant:

$$\ln(x+1) - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 6{,}389$$

$$D(f \circ g) = [6{,}389, +\infty) \qquad R(f \circ g) = [0, +\infty)$$

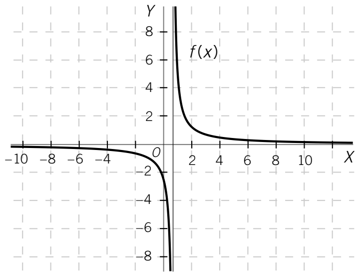
La funció és creixent en tot el seu domini i no presenta extrems. Talla l'eix d'abscisses en (6,389; 0).

64. $f(x) = \dfrac{5}{3x-2}$

a) $f(-2) = -0{,}625$; $f(1) = 5$; $f(2) = 1{,}25$

b) $f(x) = 1 \rightarrow x = 2{,}33$; $f(x) = 5 \rightarrow x = 1$

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{2/3\} \qquad R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

d) 

e) La funció decreix en tot el seu domini i no presenta màxims ni mínims. Té un punt de tall amb l'eix en (0, –2,5). No presenta periodicitat ni simetria.

f) Interpoladors lineals a trossos:

$g(x)$ és el polinomi interpolador que passa per (–2, –0,625) i (1, 5):

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{g(x)+0{,}625}{5+0{,}625} \rightarrow g(x) = -5{,}625x + 8{,}75$$

$h(x)$ és el polinomi interpolador que passa per (1, 5) i (2, 1,25):

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{h(x)-5}{1{,}25-5} \rightarrow h(x) = -3{,}75x + 8{,}75$$

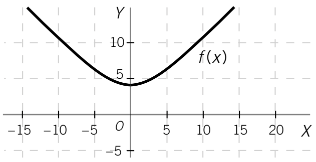
Polinomi interpolador quadràtic:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -0{,}625 = 4a - 2b + c \\ 5 = a + b + c \\ 1{,}25 = 4a + 2b + c \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = -1{,}406x^2 + 0{,}468x + 5{,}937$$

65. a) $f(3) = 5 \quad f(7) = 8{,}062$

b) $D(f) = \mathbb{R} \quad R(f) = [4, -\infty)$

c) 

d) La funció decreix en $(-\infty, 0)$, assoleix un mínim en (0, 4), punt que a més és l'únic tall amb els eixos. En $(0, +\infty)$ creix. No presenta periodicitat, però sí simetria respecte a $x = 0$.

e) $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

f) El polinomi ha de passar per (3, 5) i (7; 8,062).

$$\frac{x-3}{7-3} = \frac{g(x)-5}{8{,}062-5} \rightarrow g(x) = 0{,}7655x + 2{,}7035$$

Avaluació (pàg. 260)

1. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = [-3, 3]$

c) $D(f) = (0, +\infty)$

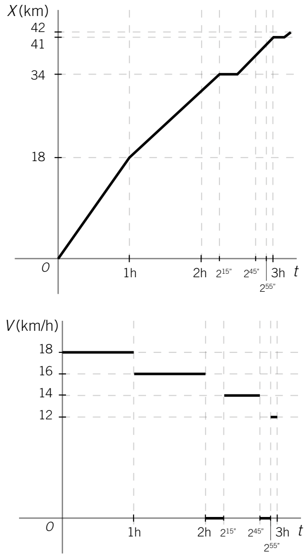
d) $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 1, 4\}$

2. a) $D(f) = [-3, 5] \quad R(f) = [-1, 6]$

És una funció creixent en (–3, 2), assoleix un màxim en (2, 6) i decreix en (2, 5). Els punts de tall són (–2, 0), (5, 0) i (0, 2), i no presenta periodicitat.

b) $D(f) = \mathbb{R} \quad R(f) = [-1, 1]$

La funció creix en $(\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi)$, assoleix màxims en els punts $(\pi + k\pi, 1)$, decreix en $(\pi + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ i presenta mínims en $(\pi/2 + k\pi, -1)$. Els punts de tall amb els eixos es produeixen en $(0, 1)$, $(\pi/4 + k\pi/2, 0)$. Es tracta d'una funció periòdica de període π.

3. a) 

b) $D(f) = [0, 3] \quad D(g) = [0, 3]$

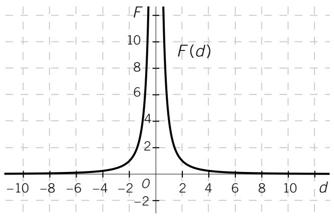
$R(f) = [0, 42] \quad R(g) = [0, 18]$

La funció $f(x)$ és contínua en tot el seu domini i creix en els intervals (0, 2 h), (2 h 15 min, 2 h 45 min) i (2 h 55 min, 3 h).

La funció $g(x)$ és discontínua per als següents valors de x: 1 h, 2 h, 2 h 15 min, 2 h 45 min i 2 h 55 min. No hi ha intervals de creixement ni decreixement, ja que la funció és constant en tot el seu recorregut excepte en les discontinuïtats.

4. $F = \dfrac{4}{d^2}$

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} \quad R(f) = (0, +\infty)$

b) 

c) $F(d) = 1 \rightarrow \dfrac{4}{d^2} = 1 \rightarrow d = \pm 2$

d) $F(0) = N.E. \quad F(-1) = 4 \quad F(1) = 4$
$F(100) = 0{,}0004$

5. $f(x) = e^{x+1} \rightarrow y = e^{x+1}$

Per a efectuar la inversa, on abans teníem y hi posem x, i viceversa:

$$x = e^{y+1} \rightarrow \ln x = y + 1 \rightarrow y = -1 + \ln x$$

6. a) $(f \circ g)(x) = (2x^2 + 5)^3 - 4(2x^2 + 5) + 6 =$

$= 8x^6 + 60x^4 + 142x^2 + 111$

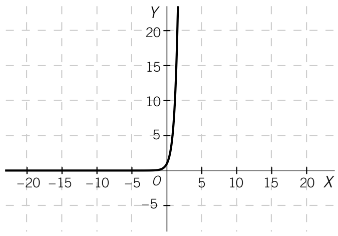
b) $(f \circ g)(2) = 2\,151$

c) $(g \circ f)(x) = 2(x^3 - 4x + 6)^2 + 5 =$

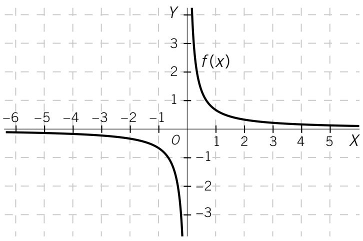
$= x^6 - 16x^4 + 24x^3 + 32^2 - 96x + 77$

d) $(g \circ f)(2) = 77$

7. a) $f(x) = e^{2x}$



b) $f(x) = \dfrac{2}{3x}$



8. a) $f(t)$ serà el polinomi que passa per (3, 37) i (5, 25).

$$\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t) - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{t - 3}{5 - 3} = \frac{f(t) - 37}{25 - 37}$$
$$f(t) = -6t + 55$$

$g(t)$ serà el polinomi que passa per (5, 25) i

$$\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{g(t) - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{t - 5}{8 - 5} = \frac{f(t) - 25}{-23 - 25}$$
$$g(t) = -16t + 105$$

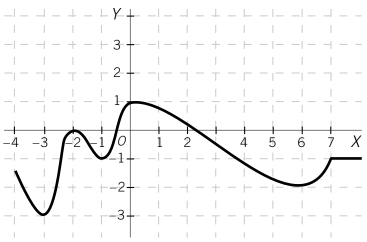
b) $\left.\begin{aligned} 37 &= 9a + 3b + c \\ 25 &= 25a + 5b + c \\ -23 &= 64a + 8b + c \end{aligned}\right\} \rightarrow x(t) = -2t^2 + 10t + 25$

c) $x(6) = 13$ m

$t(0) = 6{,}8$ s

$t(10) = 6{,}2$ s

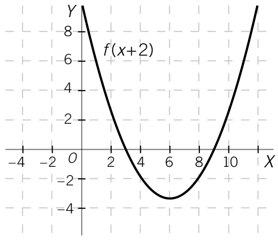
9.



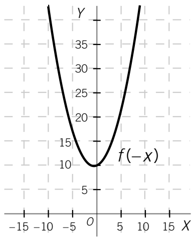
10. a) $\left.\begin{aligned} y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 10 &= c \\ 0 &= 9a + 3b + c \\ 0 &= 81a + 9b + c \end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow f(x) = \dfrac{10}{27}x^2 - \dfrac{40}{9}x + 10$

b)



c)



Zona + (pàg. 261)

— **Gràfiques sense esforç**

- Resposta oberta a manera de reflexió personal.
- Resposta oberta a manera de reflexió personal.

— **El risc d'extrapolar**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow \frac{x - 1{,}3}{1{,}7} = \frac{y - 5{,}2}{7{,}3} \rightarrow$$
$$\rightarrow y = 4{,}29x - 0{,}38 \rightarrow y = 4{,}29 \cdot 10 - 0{,}38 = 42{,}52$$

- Una extrapolació permet una predicció bastant fiable.
- No, ja que la capacitat de la molla per estirar-se no ha de ser necessàriament constant.

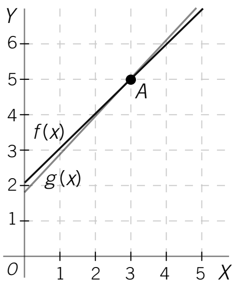
— **Baixa el preu del taxi?**

- $f(x) = 2{,}05 + 0{,}98x$

  $g(x) = 1{,}84 + 1{,}05x$

$$\left.\begin{aligned} -0{,}98x + y &= 2{,}05 \\ -1{,}05x + y &= 1{,}84 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 4{,}99 \end{aligned}\right\}$$

  Coincideixen al cap de 3 km.



- Resposta oberta a manera de reflexió personal.