EQUACIONS LOGARÍTMIQUES RESOLTES

1r mètode

1. Reduir els dos membres a un únic logaritme utilitzant les propietats dels logaritmes

- $n = \log_a a^n$
- $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
- $n \log_a x = \log_a x^n$
- $\frac{1}{n} \log_a x = \log_a \sqrt[n]{x}$

2. Igualar el que queda dins de cada logaritme ($\log a = \log b \Rightarrow a = b$)
3. Comprovar les solucions sobre l'equació inicial, tenint en compte que sols existeixen logaritmes de nombres positius

Exemples

- $\log x + \log(70 - x) = 3$

$$\log x + \log(70 - x) = 3$$
$$\log x + \log(70 - x) = \log 1000$$
$$\log x \cdot (70 - x) = \log 1000$$
$$70x - x^2 = 1000$$
$$-x^2 + 70x - 1000 = 0$$
$$x = \frac{-70 \pm \sqrt{4900 - 4(-1)(-1000)}}{2(-1)} = \frac{-70 \pm 30}{-2} = \begin{cases} \boxed{X_1 = 20} \\ \boxed{X_2 = 50} \end{cases}$$

Comprovació :

x_1=20 és vàlida ja que es pot fer log 20 i log(70-50)

x_2=50 també és vàlida ja que es pot fer log 50 i log(70-50)=log 20

- $\log(22-x)-\log x=1$

$\log(22-x)-\log x=1$

$\log(22-x)-\log x=\log 10$

$\log\dfrac{22-x}{x}=\log 10$

$\dfrac{22-x}{x}=10 \to 22-x=10x \to 22=11x \to \boxed{2=x}$ ✔

Comprovació :

x=2 és vàlida ja que es pot fer log (22-2)=log20 i log2

- $2\log x-\log(x-16)=2$

$2\log x-\log(x-16)=2$

$2\log x-\log(x-16)=\log 100$

$\log x^2-\log(x-16)=\log 100$

$\log\dfrac{x^2}{x-16}=\log 100$

$\dfrac{x^2}{x-16}=100$

$x^2=100(x-16) \to x^2-100x+1600=0$

$x=\dfrac{100\pm\sqrt{10000-4\cdot 1\cdot 1600}}{2\cdot 1}=\dfrac{100\pm 60}{2}=$ $\nearrow \boxed{X_1=80}$ ✔ $\searrow \boxed{X_2=20}$ ✔

Comprovació :

x_1=80 és vàlida ja que es pot fer log 80 i log(80-16)=log64

x_2=20 també és vàlida ja que es pot fer log 20 i log(20-16)=log 4

- $\log_2(x-8)+\log_2 x=7$

$\log_2(x-8)+\log_2 x=7$

$\log_2(x-8)+\log_2 x=\log_2 2^7$

$\log_2(x-8)+\log_2 x=\log_2 128$

$\log_2(x-8)x=\log_2 128$

$(x-8)x=128 \to x^2-8x=128 \to x^2-8x-128=0$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64+512}}{2}=\frac{8\pm 24}{2}=\begin{cases}\boxed{X_1=16} \\ X_2=\cancel{-8}\end{cases}$$

Comprovació :

x_1=16 és vàlida ja que es pot fer $\log_2$ (16-8) i $\log_2 16$

x_2= - 8 NO és vàlida ja que $\log_2(-8)$ no existeix

- $2\log x=3+\log\frac{x}{10}$

$$2\log x=3+\log\frac{x}{10}$$

$$2\log x=\log 1000+\log\frac{x}{10}$$

$$\log x^2=\log 1000+\log\frac{x}{10}$$

$$\log x^2=\log 1000\cdot\frac{x}{10}$$

$$x^2=1000\cdot\frac{x}{10}\rightarrow x^2=100x\rightarrow x^2-100x=0\rightarrow x(x-100)=0\begin{cases}X_1=\cancel{0} \\ \boxed{X_2=100}\end{cases}$$

Comprovació :

x_1=0 NO és vàlida ja que log 0 no existeix

x_2= 100 és vàlida ja que log100 i log (100/10)=log10 existeixen

- $\log\sqrt{3x+1}-\log\sqrt{2x-3}=1-\log 5$

$$\log\sqrt{3x+1}-\log\sqrt{2x-3}=1-\log 5$$

$$\log\sqrt{3x+1}-\log\sqrt{2x-3}=\log 10-\log 5$$

$$\log\frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-3}}=\log\frac{10}{5}$$

$$\log\frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-3}}=\log 2$$

$$\frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-3}}=2\rightarrow\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x-3}$$

$$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=\left(2\sqrt{2x-3}\right)^2$$

$$3x+1=4\cdot(2x-3)\rightarrow 3x+1=8x-12\rightarrow -5x=-13\rightarrow \boxed{x=\frac{13}{5}}$$

Comprovació :

x=13/5 és vàlida ja 3·13/5+1>0 i 2·13/5-3>0 i a més x=13/5 és solució de l'equació irracional que ens surt després d'eliminar els logaritmes (recorda que a l'elevar al quadrat una equació irracional es poden introduir solucions falses)

2n mètode

1. Aplicant la definició de logaritme , transformar l'equació logarítmica en exponencial

$$\boxed{\log_a b=c \quad \text{amb } a>0 \ \text{ i } \ b>0 \quad \leftrightarrow \quad a^c=b}$$

2. Resoldre l'equació exponencial obtinguda

Exemples

- $\log_x 25=2$

  $\log_x 25=2\rightarrow x^2=25$

  $\rightarrow \boxed{x_1=5} \quad \text{i} \quad x_2=\cancel{-5}$

  Comprovació :

  x_1=5 és vàlida ja que és la base del logaritme i és positiva

  x_2= -5 NO és vàlida ja que la base del logaritme no pot ser negativa

- $\log_{x-1} 125=3$

  $\log_{x-1} 125=3$

  $(x-1)^3=125$

  $(x-1)^3=5^3\rightarrow x-1=5\rightarrow \boxed{x=6}$

  Comprovació :

  x=6 és vàlida ja que 6-1=5 és la base del logaritme i és positiva

- $\log_{x^2-1} 81 = 4$

$\log_{x^2-1} 81 = 4$

$(x^2-1)^4 = 81$

$(x^2-1)^4 = 3^4 \rightarrow x^2-1=3 \rightarrow x^2=4$ → $\boxed{X_1 = 2}$ ✓ ; $\boxed{X_2 = -2}$ ✓

o

$(x^2-1)^4 = (-3)^4 \rightarrow x^2-1=-3 \rightarrow x^2=-2$ que no té solució

Comprovació :

Totes dues solucions són vàlides ja que en els dos casos la base dóna 3 que és positiva

- $\log_3 27 = 2x-15$

$\log_3 27 = 2x-15$

$3^{2x-15} = 27$

$3^{2x-15} = 3^3 \rightarrow 2x-15=3 \rightarrow 2x=18 \rightarrow \boxed{x=9}$ ✓

Comprovació :

x=9 és vàlida ja que 2x-5 pot donar qualsevol nombre

- $\log_5(3x-2) = 4$

$\log_5(3x-2) = 4$

$5^4 = 3x-2$

$625 = 3x-2 \rightarrow 627 = 3x \rightarrow \boxed{x=209}$ ✓

Comprovació :

x=209 és vàlida ja que 3·209-2=625 > 0