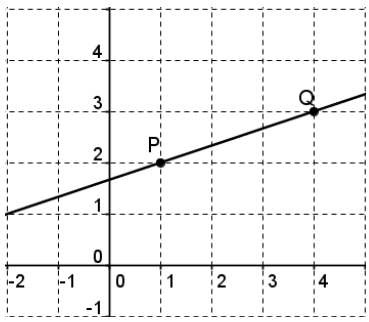
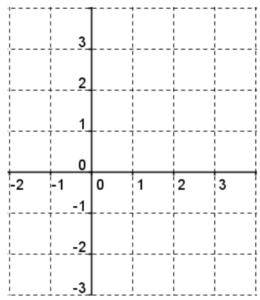
2. RECTES EN EL PLA

Determinació de rectes

Una recta ve determinada per:

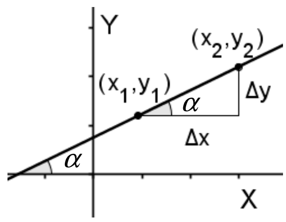
- **Dos punts.**

Exemple: **Dibuixa la recta que passa pels punts P(1,2) i Q(4,3):**	**Exercici**: Dibuixa la recta que passa pels punts A(3,-2) i B(0,2):
	

- **Un punt i una direcció**, la qual pot venir donada per:
  - **Un vector** que té la mateixa direcció que la recta, anomenat **vector director.**

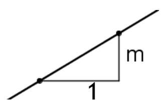
    (Una recta té infinits vectors directors, ja que hi ha infinits vectors amb la mateixa direcció)
  - **L'angle** d'inclinació de la recta respecte l'eix OX.
  - **El pendent** de la recta.

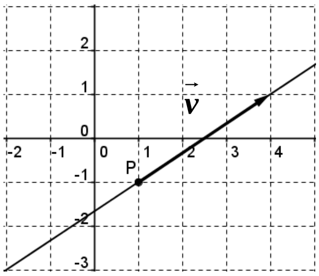
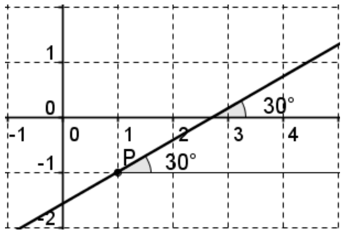
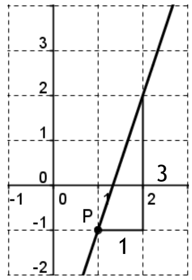
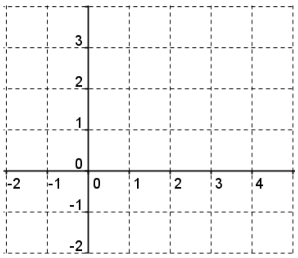
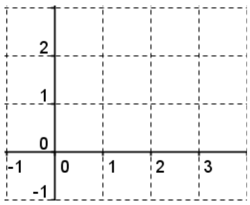
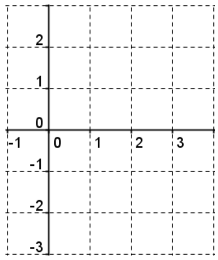
El **pendent** ***m*** **d'una recta** es defineix com la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix OX. Si la recta és obliqua, talla l'eix OX i el divideix en dues parts. Per calcular el pendent, prenem l'angle que forma la recta amb la part dreta de l'eix OX, mesurat en sentit directe des de l'eix OX.



Donats dos punts qualssevol de la recta, el pendent és el quocient de l'increment (variació) de l'ordenada (Δy) entre l'increment de l'abscissa (Δx). Així, el pendent indica la variació de l'ordenada quan l'abscissa s'incrementa en una unitat:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{increment de l'ordenada}}{\text{increment de l'abscissa}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



<table>
<tr><td colspan="3"><u>Exemple</u>: Dibuixa la recta que passa pel punt $P(1,-1)$ i que:</td></tr>
<tr>
<td>a) té per vector director $\vec{v} = (3,2)$
</td>
<td>b) forma un angle de 30º amb la part positiva de l'eix OX.
</td>
<td>c) el seu pendent és m = 3
</td>
</tr>
<tr><td colspan="3"><u>Exercici:</u> Dibuixa la recta que passa pel punt P(2,1) i que:</td></tr>
<tr>
<td>a) té per vector director $\vec{v} = (-2,1)$
</td>
<td>b) forma un angle de 45º amb la part positiva de l'eix OX.
</td>
<td>c) el seu pendent és m = -2
</td>
</tr>
</table>

<u>*Equacions de la recta*</u>

Una **equació de la recta** és una <u>igualtat que verifiquen tots els punts (x,y) de la recta</u>, i només aquests.

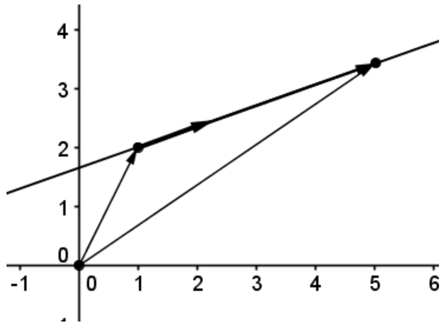
L'equació de la recta ens permet calcular qualsevol punt de la recta i discernir si un punt hi pertany o no, ja que els punts que no pertanyen a la recta no verifiquen la seva equació.

Hi ha diferents equacions d'una mateixa recta, totes elles equivalents.

Equació vectorial

Hem vist que un punt i un vector determinen una recta.

Donat un **punt** $\boldsymbol{P(p_1, p_2)}$ de la recta i un **vector director** $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$, volem trobar una fórmula que relacioni qualsevol punt de la recta $\boldsymbol{X(x,y)}$ amb P i $\vec{v}$.



De la figura de la dreta deduïm que:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$$

Com que $\overrightarrow{PX}$ té la mateixa direcció que $\vec{\boldsymbol{v}}$, existeix un nombre real k que verifica que $\overrightarrow{PX} = k\vec{v}$. Si substituïm en la igualtat anterior $\overrightarrow{PX}$ per $k\vec{v}$ obtenim **l'equació vectorial de la recta:**

$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + k\vec{v}}}$ → **Equació vectorial de la recta**

$\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OP}$ són els vectors de posició dels punts X i P. Recordem que els components del vector de posició d'un punt coincideixen amb les coordenades del punt. Per tant:

$$\overrightarrow{OX} = (x, y) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{OP} = (p_1, p_2)$$

Si expressem l'equació vectorial de la recta en components, obtenim:

$\boxed{\boldsymbol{(x,y) = (p_1, p_2) + k(v_1, v_2)}}$ → **Equació vectorial de la recta (en components)**

Cada valor de k determina un punt de la recta.

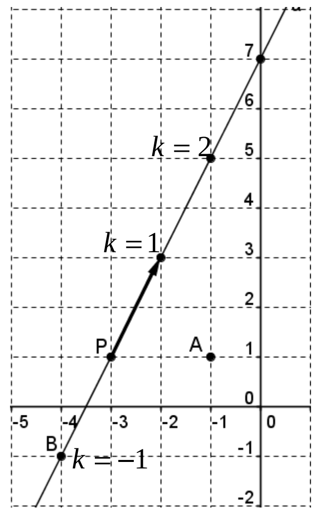
<u>Exemples</u>**:**

<u>1.</u> Donada la recta $\boldsymbol{r}$ que passa pel punt $\boldsymbol{P(-3,1)}$ i que té per vector director $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{(1,2)}$:

a) Determina l'equació vectorial de la recta $\boldsymbol{r}$.

$$r: (x,y) = (p_1, p_2) + k(v_1, v_2) \rightarrow \boxed{r: (x,y) = (-3,1) + k(1,2)}$$

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta *r* .



$$k=0 \rightarrow \boxed{P(-3,1)}$$
$$k=1 \rightarrow (x,y)=(-3,1)+1\cdot(1,2)=(-3+1,1+2)=\boxed{(-2,3)}$$
$$k=2 \rightarrow (x,y)=(-3,1)+2\cdot(1,2)=(-3+2,1+4)=\boxed{(-1,5)}$$

c) Esbrina si els punts *A*(-1,1) i *B*(-4,-1) pertanyen a la recta *r* .

Un punt pertany a la recta si verifica l'equació de la recta, és a dir, si en substituir-lo per (x,y) existeix un nombre real k que verifica la igualtat:

Si $\boldsymbol{A(-1,1)} \in r \rightarrow (-1,1)=(-3,1)+k(1,2) \rightarrow (-1,1)-(-3,1)=k(1,2)$

$$\rightarrow (2,0)=k(1,2)=(k,2k) \rightarrow \begin{cases} 2=k \\ 0=2k \rightarrow k=0 \end{cases} \rightarrow \nexists\, k$$

El punt A no pertany a la recta, ja que k no pot prendre dos valors diferents, no pot ser igual a 2 i a 0 a la vegada.

Si $\boldsymbol{B(-4,-1)} \in r \rightarrow (-4,-1)=(-3,1)+k(1,2) \rightarrow (-4,-1)-(-3,1)=k(1,2)$

$$\rightarrow (-1,-2)=k(1,2)=(k,2k) \rightarrow \begin{cases} -1=k \\ -2=2k \rightarrow k=-1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\exists k=-1}$$

El punt B sí que pertany a la recta, ja que existeix un valor real k = -1 que verifica la igualtat.

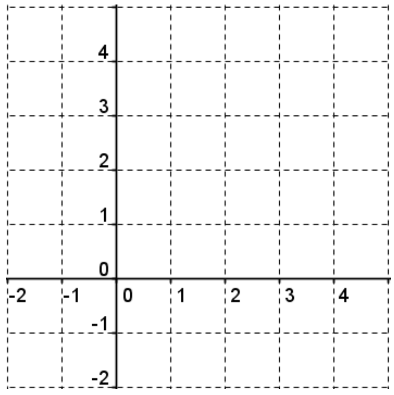
2. Donada la recta $r: (x,y)=(-8,-3)+k(7,-2)$, troba'n un punt i un vector director.

$P(-8,-3)$ i $\vec{v}=(7,-2)$

Exercici:

1. Donada la recta r que passa pel punt P(2,1) i que té per vector director $\vec{v}$ = (1,-1):

a) Determina l'equació vectorial de la recta r.



b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r.

c) Esbrina si els punts A(1,1) i B(0,3) pertanyen a la recta r.

d) Representa gràficament la recta r i els punts dels apartats b) i c).

2. Donada la recta $r:(x,y)=(1,\text{-}6)+k(\text{-}5,3)$, troba'n un punt i un vector director.

A partir de l'equació vectorial de la recta es dedueixen les altres equacions.

Equacions paramètriques

Si fem les operacions indicades en l'equació vectorial de la recta, en components, obtenim les **equacions paramètriques de la recta**:

$$(x,y)=(p_1,p_2)+k(v_1,v_2)\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases}}$$ → **Equacions paramètriques de la recta**

Exemples:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(5,\text{-}4)$ i que té per vector director $\vec{v}$ = (-3,2):

a) Determina les equacions paramètriques de la recta r .

$$r:\begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases} \rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x = 5-3k \\ y = -4+2k \end{cases}}$$

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r.

$$k=0\rightarrow \boxed{P(5,-4)}$$

$$k=1\rightarrow\begin{cases} x=5-3\cdot 1=2 \\ y=-4+2\cdot 1=-2 \end{cases}\rightarrow\boxed{(2,-2)};\qquad k=2\rightarrow\begin{cases} x=5-3\cdot 2=-1 \\ y=-4+2\cdot 2=0 \end{cases}\rightarrow\boxed{(-1,0)}$$

c) Esbrina si els punts A(1,-1) i B(-10,6) pertanyen a la recta r.

$$\text{Si } \mathbf{A(1,\text{-}1)} \in r \rightarrow \begin{cases} 1=5-3k \rightarrow 1-5=-3k \rightarrow -4=-3k \rightarrow k=\dfrac{4}{3} \\ -1=-4+2k \rightarrow -1+4=2k \rightarrow 3=2k \rightarrow k=\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \nexists\, k$$

<u>El punt A no pertany a la recta</u>, ja que k no pot prendre dos valors diferents (k no pot ser igual a 4/3 i a 3/2 a la vegada).

$$\text{Si } \mathbf{B(\text{-}10,6)} \in r \rightarrow \begin{cases} -10=5-3k \rightarrow -10-5=-3k \rightarrow -15=-3k \rightarrow k=5 \\ 6=-4+2k \rightarrow 6+4=2k \rightarrow 10=2k \rightarrow k=5 \end{cases} \rightarrow \exists\ \boxed{k=5}$$

<u>El punt B sí que pertany a la recta</u>, ja que existeix un valor real $k = 5$ que verifica la igualtat.

<u>2.</u> Troba un punt i un vector director de les rectes següents:

a) $\boldsymbol{r:} \begin{cases} \boldsymbol{x=2-4k} \\ \boldsymbol{y=5+3k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(2,5) \\ \vec{v}=(-4,3) \end{cases}$ **b)** $\boldsymbol{r:} \begin{cases} \boldsymbol{x=1-k} \\ \boldsymbol{y=k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(1,0) \\ \vec{v}=(-1,1) \end{cases}$

<u>Exercici</u>:

<u>1.</u> Donada la recta r que passa pel punt P(-1,3) i que té per vector director $\vec{v}$ = (-5,-1):

a) Determina les equacions paramètriques de la recta r.

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r.

c) Esbrina si els punts A(-1,1) i B(9,5) pertanyen a la recta r.

2. Troba un punt i un vector director de les rectes següents:

a) $r: \begin{cases} x = -3 - 2k \\ y = 7 + 6k \end{cases}$

b) $s: \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 5 \end{cases}$

Equació contínua

Si aïllem el paràmetre k de les equacions paramètriques i igualem les dues expressions obtingudes, trobem **l'equació contínua de la recta**:

$$\begin{cases} x = p_1 + kv_1 \to k = \dfrac{x - p_1}{v_1} \\ y = p_2 + kv_2 \to k = \dfrac{y - p_2}{v_2} \end{cases} \to \boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}}$$

→ **Equació contínua de la recta**

Aquesta equació no s'utilitza si $v_1 = 0$ o $v_2 = 0$, ja que no es pot dividir per 0.

Exemples:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(-3,4)$ i que té per vector director $\vec{v} = (6,-1)$:

a) Determina l'equació contínua de la recta r.

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \to \frac{x - (-3)}{6} = \frac{y - 4}{-1} \to \boxed{\frac{x+3}{6} = \frac{y-4}{-1}}$$

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r.

Per calcular punts de la recta r, substituïm una coordenada, x o y, per valors reals qualssevol i calculem l'altra coordenada. Si no volem treballar amb fraccions, intentem substituir x per valors que facin que el quocient del primer membre sigui un nombre enter, o y per valors que facin que el quocient del segon membre sigui un nombre enter:

$$x = -3 \to \frac{-3+3}{6} = \frac{y-4}{-1} \to 0 = \frac{y-4}{-1} \to y = 4 \to \boxed{P(-3,4)}$$

$$x = 3 \to \frac{3+3}{6} = \frac{y-4}{-1} \to 1 = \frac{y-4}{-1} \to -1 = y - 4 \to -1 + 4 = y \to y = 3 \to \boxed{(3,3)}$$

$$y = 1 \to \frac{x+3}{6} = \frac{1-4}{-1} \to \frac{x+3}{6} = 3 \to x + 3 = 18 \to x = 15 \to \boxed{(15,1)}$$

c) Esbrina si els punts A(-1,1) i B(-15,6) pertanyen a la recta r.

Si $\mathbf{A(-1,1)} \in r \rightarrow \frac{-1+3}{6} = \frac{1-4}{-1} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{-3}{-1} \rightarrow \frac{1}{3} = 3 \rightarrow$ Fals : $\frac{1}{3} \neq 3$

<u>El punt A no pertany a la recta</u>, ja que en substituir les coordenades de A per x i y no es verifica la igualtat.

Si $\mathbf{B(-15,6)} \in r \rightarrow \frac{-15+3}{6} = \frac{6-4}{-1} \rightarrow \frac{-12}{6} = \frac{2}{-1} \rightarrow \boxed{-2=-2} \rightarrow$ Cert

<u>El punt B sí que pertany a la recta</u>, ja que en substituir les coordenades de B per x i y es verifica la igualtat.

<u>2.</u> Troba un punt i un vector director de les rectes següents:

a) $r: \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-2} \rightarrow P(2,-3)$ i $\vec{v} = (5,-2)$

b) $s: \frac{x}{2} = y+1 \rightarrow P(0,-1)$ i $\vec{v} = (2,1)$

* Dividim per 2 el numerador i el denominador del primer membre. Multipliquem per -1 el numerador i el denominador del segon membre.

c) *$t: \frac{2x-1}{4} = \frac{-y+3}{2} \rightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{2} = \frac{y-3}{-2} \rightarrow P\left(\frac{1}{2},3\right)$ i $\vec{v} = (2,-2)$

<u>Exercici</u>:

<u>1.</u> Donada la recta r que passa pel punt P(8,-7) i que té per vector director $\vec{v}$ = (-3,-5):

a) Determina l'equació contínua de la recta r.

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r.

c) Esbrina si els punts A(-1,1) i B(14,3) pertanyen a la recta r.

2. Troba un punt i un vector director de les rectes següents:

a) $r:\dfrac{x+5}{9}=\dfrac{y\text{-}1}{\text{-}11}$

b) $s: x-4=y$

c) $r:\dfrac{\text{-}x\text{-}13}{2}=\dfrac{\text{-}3y+2}{9}$

Equació general o implícita

Si traiem denominadors en l'equació contínua de la recta (multiplicant en creu) i agrupem tots els termes en un membre, obtenim **l'equació general de la recta**:

$$\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}\to v_2(x-p_1)=v_1(y-p_2)\to v_2x-v_2p_1=v_1y-v_1p_2$$

$$\to v_2x-v_2p_1-v_1y+v_1p_2=0\to \underbrace{v_2}_{A}\,x\underbrace{-v_1}_{B}\,y\underbrace{-v_2p_1+v_1p_2}_{C}=0$$

Així, l'equació general de la recta és del tipus:

$$\boxed{\boldsymbol{Ax+By+C=0}}$$ → **Equació general de la recta**

on A, B i C són nombres reals i $(A,B)=(v_2,-v_1)$

Vector director i característic

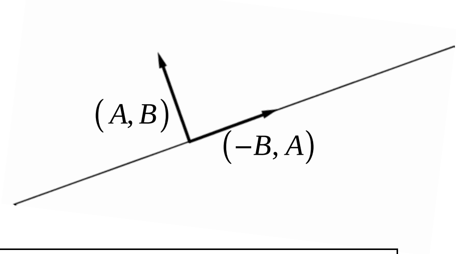
Com que $A=v_2$ i $B=-v_1$, un **vector director** de la recta és:

$\boxed{\vec{v}=(-B,A)}$.

El vector (A,B) és perpendicular al vector director $(-B,A)$ i, per tant, a la recta.

S’anomena **vector característic** de la recta (o vector **normal** a la recta):

$$\begin{array}{ccc} (A,B) & \perp & (-B,A) \\ \text{vector} & & \text{vector} \end{array}$$



Exemples:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(2,-7)$ i que té per vector director $\vec{v}$ = (3,-4):

a) Determina l’equació general de la recta r.

Hi ha dues maneres de calcular l’equació general:

- A partir de l’equació contínua:

$$\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}\rightarrow\frac{x-2}{3}=\frac{y-(-7)}{-4}\rightarrow\frac{x-2}{3}=\frac{y+7}{-4}\quad \text{equació contínua}$$

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+7}{-4}\rightarrow-4(x-2)=3(y+7)\rightarrow-4x+8=3y+21\rightarrow$$

$$\rightarrow-4x-3y+8-21=0\rightarrow\boxed{r:-4x-3y-13=0}$$

- Substituint A per v_2 i B per $-v_1$ i calculant C (fent que P verifiqui l’equació):

$$Ax+By+C=0 \;\; on \;\; (A,B)=(v_2,-v_1)=(-4,-3)\rightarrow-4x-3y+C=0$$

$$P(2,-7)\rightarrow-4\cdot2-3\cdot(-7)+C=0\rightarrow-8+21+C=0\rightarrow C=-13\rightarrow\boxed{-4x-3y-13}$$

Nota: Podem multiplicar els dos membres de l’equació per -1, perquè els termes siguin positius, i l’equació obtinguda és equivalent:

$$-4x-3y-13=0\rightarrow\boxed{r:\; 4x+3y+13=0}$$

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r.

Per calcular punts de la recta r, substituïm una coordenada, x o y, per valors reals qualssevol i calculem l’altra coordenada.

$$x=2\rightarrow 4\cdot 2+3y+13=0\rightarrow 3y+21=0\rightarrow y=\frac{-21}{3}=7\rightarrow \boxed{P(2,-7)}$$

$$y=1\rightarrow 4x+3\cdot 1+13=0\rightarrow 4x+16=0\rightarrow x=\frac{-16}{4}=-4\rightarrow \boxed{(-4,1)}$$

$$x=-1\rightarrow 4\cdot(-1)+3y+13=0\rightarrow 3y+9=0\rightarrow y=\frac{-9}{3}=-3\rightarrow \boxed{(-1,-3)}$$

c) Esbrina si els punts A(-7,5) i B(3,-4) pertanyen a la recta r.

Si $\mathbf{A(-7,5)}\in r\rightarrow 4\cdot(-7)+3\cdot 5+13=0\rightarrow -28+15+13=0\rightarrow \boxed{0=0}$ Cert

El punt A sí que pertany a la recta, ja que en substituir les coordenades de A per x i y es verifica la igualtat.

Si $\mathbf{B(3,-4)}\in r\rightarrow 4\cdot 3+3\cdot(-4)+13=0\rightarrow 12-12+13=0\rightarrow 13=0$ Fals $:13\neq 0$

El punt B no pertany a la recta, ja que en substituir les coordenades de B per x i y no es verifica la igualtat.

2. Donada la recta $r:\ 5x - 3y + 10 = 0$, troba'n un punt i un vector director.

$$(A,B)=(5,-3)\rightarrow \vec{v}=(-B,A)=(3,5)\rightarrow \boxed{\vec{v}=(3,5)}$$ → Vector director

$$x=-2\rightarrow 5\cdot(-2)-3y+10=0\rightarrow -3y=0\rightarrow y=0\rightarrow \boxed{P(-2,0)}$$

Exercici:

1. Donada la recta r que passa pel punt P(0,-7) i que té per vector director $\vec{v}$ = (1,-2):
   - **a)** Determina l'equació general de la recta r.
   - **b)** Calcula tres punts que pertanyin a la recta r.
   - **c)** Esbrina si els punts A(-6,5) i B(1,3) pertanyen a la recta r .

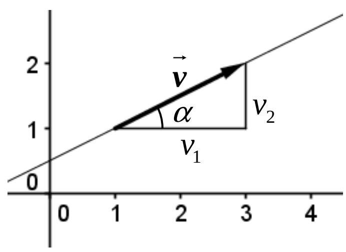
2. Donada la recta $r:\ x+2y-1=0$, troba'n un punt i un vector director.

Equació punt-pendent

Si en l'equació contínua de la recta aïllem $y-p_2$, obtenim **l'equació punt-pendent de la recta**:

$$\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}\rightarrow y-p_2=\frac{v_2\cdot(x-p_1)}{v_1}=\frac{v_2}{v_1}(x-p_1)$$

Com s'observa en la figura de la dreta:



$$\boxed{\frac{v_2}{v_1}=\mathbf{tg}\,\alpha=m\quad \text{(pendent de la recta)}}$$

Així, l'equació punt-pendent queda:

$$\boxed{y - p_2 = m \cdot (x - p_1)}$$ → **Equació punt-pendent de la recta**

Aquesta equació s'utilitza quan es coneix un punt i el pendent de la recta.

Càlcul del vector director a partir del pendent

Suposem que coneixem el pendent m d'una recta i volem calcular-ne un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Els components del vector, v_1 i v_2, han de verificar la fórmula: $\dfrac{v_2}{v_1} = m$

Hi ha infinits vectors directors d'una recta i, per tant, infinites solucions (infinits parells de nombres el quocient dels quals és m). Podem triar, per exemple, el vector $\boxed{\vec{v} = (1, m)}$, ja que $\dfrac{m}{1} = m$.

Si m és una fracció, $m = \dfrac{a}{b}$, aleshores $\vec{v} = (b, a)$:

$$\boxed{m = \frac{a}{b} \rightarrow \vec{v} = (b, a)}$$

Exemples:

1. Determina l'equació punt-pendent de la recta r de pendent 4 i que passa pel punt P(2,-3).

$$y - p_2 = m \cdot (x - p_1) \rightarrow \boxed{r: y + 3 = 4(x - 2)}$$

2. Troba un punt, el pendent i un vector director de les rectes següents:

a) $r: y - 1 = -2(x + 2) \rightarrow P(-2, 1); \quad m = -2; \quad \vec{v} = (1, m) = (1, -2)$.

b) $s: y + 2 = \dfrac{2}{5}(x - 4) \rightarrow P(4, -2); \quad m = \dfrac{2}{5}; \quad \vec{v} = (5, 2)$.

Exercici:

1. Determina l'equació punt-pendent de la recta r de pendent -3 i que passa pel punt P(-5,2).

2. Troba un punt, el pendent i un vector director de les rectes següents:

a) $r: y+6=-(x-1)$

b) $s: y-1=\frac{4}{3}(x-2)$

Equació explícita

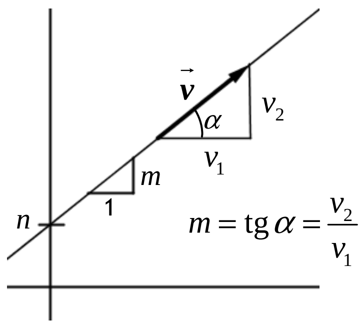
Si aïllem la y de l'equació punt-pendent o de l'equació general i operem, obtenim **l'equació explícita de la recta:**

$$y - p_2 = m\cdot(x - p_1) \rightarrow y = m\cdot(x - p_1) + p_2 = mx \underbrace{- mp_1 + p_2}_{n}$$

Així, l'equació explícita de la recta és del tipus:

$\boxed{\boldsymbol{y = mx + n}}$ → **Equació explícita de la recta**

(m = pendent, n = punt de tall eix OY)



Si donem a x el valor zero:

$x=0 \rightarrow y = m\cdot 0 + n \rightarrow y = n \rightarrow (0,n)$ pertany a la recta

El punt $(0,n)$ pertany a l'eix OY. Aleshores, n és l'ordenada en l'origen o el punt de tall amb l'eix OY.

Exemples:

1. Donada la recta r que passa pel punt P(5,-2) i que té per vector director $\vec{v}$ = (-2,6):

a) Determina el pendent de la recta.

$$m=\frac{v_2}{v_1}=\frac{6}{-2}=-3\rightarrow \boxed{m=-3}$$

b) Determina l'equació explícita de la recta r.

Hi ha dues maneres de calcular l'equació explícita:

- A partir de l'equació punt-pendent:

$$y-p_2=m\cdot(x-p_1)\rightarrow y+2=-3(x-5)$$ → Equació punt-pendent

$$\rightarrow y=-3(x-5)-2\rightarrow y=-3x+15-2=-3x+13\rightarrow \boxed{r: y=-3x+13}$$

- A partir de l'expressió de l'equació explícita, substituint m per -3 i calculant n (fent que P verifiqui l'equació):

$$\left.\begin{array}{l} y=mx+n\rightarrow y=-3x+n \\ P(5,-2)\rightarrow -2=-3\cdot 5+n\rightarrow -2+15=n\rightarrow \boxed{n=13} \end{array}\right\}\rightarrow \boxed{y=-3x+13}$$

c) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r.

Per calcular punts de la recta r, <u>substituïm x per valors reals qualssevol i calculem y:</u>

$$x=1\rightarrow y=-3\cdot 1+13=10\rightarrow y=10\rightarrow \boxed{(1,10)};$$
$$x=2\rightarrow y=-3\cdot 2+13=7\rightarrow y=7\rightarrow \boxed{(2,7)}$$
$$x=-1\rightarrow y=-3\cdot(-1)+13=16\rightarrow y=16\rightarrow \boxed{(-1,16)}$$

d) Esbrina si els punts A(4,1) i B(3,-4) pertanyen a la recta r.

Si $\mathbf{A(4,1)}\in r\rightarrow 1=-3\cdot 4+13\rightarrow \boxed{1=1}$ Cert

<u>El punt A sí que pertany a la recta</u>, ja que en substituir les coordenades de A per x i y es verifica la igualtat.

Si $\mathbf{B(3,-4)}\in r\rightarrow -4=-3\cdot 3+13\rightarrow -4=4$ Fals: $-4\neq 4$

<u>El punt B no pertany a la recta</u>, ja que en substituir les coordenades de B per x i y no es verifica la igualtat.

2. Donada la recta $r: y = x - 8$, troba'n el punt de tall amb l'eix OY, el pendent i un vector director.

Punt de tall eix OY: $(0,-8)$; $m = 1$; $\vec{v} = (1, m) = (1,1)$

Exercici:

1. Donada la recta r que passa pel punt P(-2,2) i que té per vector director $\vec{v}$ = (-2,-4):

a) Determina el pendent de la recta r.

b) Determina l'equació explícita de la recta r.

c) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r.

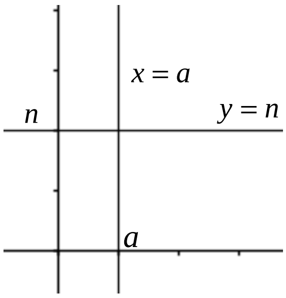
d) Esbrina si els punts A(4,1) i B(-3,0) pertanyen a la recta r.

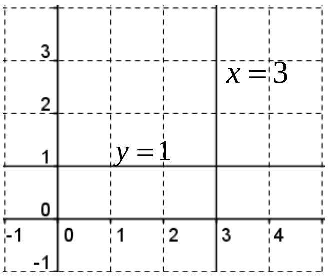
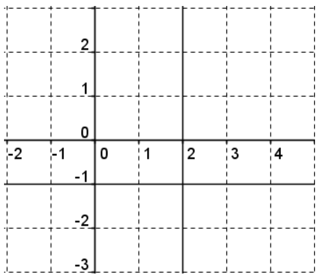
2. Donada la recta $r: y = 5x - 2$, troba'n el punt de tall amb l'eix OY, el pendent i un vector director.

Rectes verticals i horitzontals

El quadre següent resumeix les característiques de les rectes horitzontals i verticals:

	Recta **horitzontal**	Recta **vertical**
Equació	$\boldsymbol{y = n}$, on n és un nombre real (tots els punts de la recta tenen la mateixa ordenada; y és constant)	$\boldsymbol{x = a}$, on a és un nombre real (tots els punts de la recta tenen la mateixa abscissa; x és constant)
Vector director	$(v_1, 0)$	$(0, v_2)$
Pendent	$m = 0 \quad \left(\text{tg}\, 0^\text{o} = \dfrac{0}{v_1} = 0 \right)$	No existeix $\left(\nexists \ \text{tg}\, 90^\text{o} = \dfrac{v_2}{0} \right)$



<u>Exemple</u>: **Determina l'equació de les rectes representades en el gràfic:** 	**<u>Exercici</u>**: Determina l'equació de les rectes representades en el gràfic: 

Resum de les equacions de la recta

Nom	Equació $\begin{cases}\text{Punt}: P(p_1, p_2)\\ \text{Vector director}: \vec{v}(v_1, v_2)\end{cases}$		Exemple: $P(2,-3);\ \vec{v}=(-1,5)$
Equació vectorial	$(x,y)=(p_1,p_2)+k(v_1,v_2)$		$(x,y)=(2,-3)+k(-1,5)$
Equacions paramètriques	$\begin{cases}x=p_1+kv_1\\ y=p_2+kv_2\end{cases}$		$\begin{cases}x=2-k\\ y=-3+5k\end{cases}$
Equació contínua	$\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}$		$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{5}$
Equació general	$Ax+By+C=0$ $(A,B)=(v_2,-v_1)\rightarrow\vec{v}=(-B,A)$		$5x+y-7=0$
Equació punt-pendent	$y-p_2=m\cdot(x-p_1)$	$m=\frac{v_2}{v_1};\ \vec{v}=(1,m)$	$y+3=-5\cdot(x-2)$
Equació explícita	$y=mx+n$		$y=-5x+7$

Exemple: **Escriu les diferents equacions de la recta que passa pel punt $P(-4,7)$ i que té com a vector director el vector $\vec{v}=(2,-1)$.**

Equació vectorial: $\boxed{(x,y)=(-4,7)+k(2,-1)}$

Equacions paramètriques: $\boxed{\begin{cases}x=-4+2k\\ y=7-k\end{cases}}$

Equació contínua: $\boxed{\frac{x+4}{2}=\frac{y-7}{-1}}$

Equació general:

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-7}{-1}\rightarrow-(x+4)=2(y-7)\rightarrow-x-4=2y-14\rightarrow\boxed{-x-2y+10=0}$$

Equació punt-pendent: $m=\frac{v_2}{v_1}=-\frac{1}{2}\rightarrow\boxed{y-7=-\frac{1}{2}\cdot(x+4)}$

Equació explícita:

$$y-7=-\frac{1}{2}\cdot(x+4)\rightarrow y-7=-\frac{1}{2}x-2\rightarrow y=-\frac{1}{2}x-2+7\rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{2}x+5}$$

<u>Exercici</u>: Escriu les diferents equacions de la recta que passa pel punt P(-1,1) i que té com a vector director el vector $\vec{v}$ = (-2,6).

Recta determinada per dos punts

Sigui r la recta que passa per dos punts donats $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$. Aleshores, el vector que uneix els dos punts és un vector director de r:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \rightarrow \text{ Vector director de la recta } r.$$

A partir d'un dels dos punts i del vector director, podem trobar qualsevol equació de la recta:

Recta determinada per $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ = Recta determinada per $A(a_1, a_2)$ i

Exemple: **Escriu l'equació contínua de la recta que passa pels punts $A(3,-6)$ i $B(2,4)$.**

- Calculem un vector director de la recta: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2-3, 4-(-6)) = (-1,10) \rightarrow \boxed{\vec{v} = (-1,10)}$$

- Donat un punt $A(3,-6)$ i un vector director $\vec{v} = (-1,10)$, calculem l'equació contínua:

Equació contínua: $\boxed{\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+6}{10}}$

Exercici: Escriu l'equació contínua de la recta que passa pels punts $A(0,3)$ i $B(-3,7)$.

Sol.: $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y-3}{4}$

Alineació de punts

Ja hem vist que, utilitzant vectors, podem esbrinar si tres punts estan alineats.

També ho podem fer calculant l'equació de la recta que uneix dos d'aquests punts i comprovant si el tercer punt pertany a aquesta recta.

Exemple: **Esbrina si els punts $A(3,-6)$, $B(2,4)$ i $C(1,5)$ estan alineats.**

En l'exemple anterior hem calculat l'equació de la recta r que uneix els punts A i B:

Recta que passa per A i B: $r: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+6}{10}$

Vegem si el punt C pertany a la recta r:

$$\frac{1-3}{-1} = \frac{5+6}{10} \rightarrow \frac{-2}{-1} = \frac{11}{10} \rightarrow 2 = \frac{11}{10} \quad \text{Fals}: 2 \neq \frac{11}{10}$$

El punt C no pertany a la recta r. Llavors, els punts A, B i C no estan alineats.

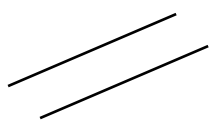
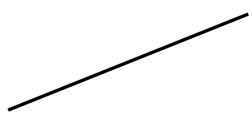
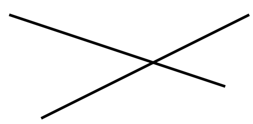
Exercici: Esbrina si els punts $A(3,1)$, $B(5,3)$ i $C(-1,-3)$ estan alineats.

Sol.: Sí que estan alineats

Posició relativa de dues rectes

Dues rectes en el pla poden ser:

- **Secants:** tenen diferents direccions i un punt comú.
- **Paral·leles:** tenen la mateixa direcció i cap punt comú.
- **Coincidents:** tenen la mateixa direcció i tots els punts comuns.

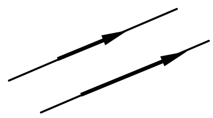
Paral·leles	Coincidents	Secants o incidents
		

Si dues rectes són paral·leles o coincidents, tenen el mateix pendent i els seus vectors directors són iguals o paral·lels. Els seus vectors característics (perpendiculars) també són paral·lels.

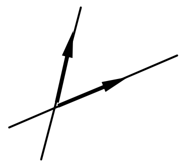
Si dues rectes són secants, els seus pendents són diferents i els seus vectors directors tenen direccions diferents (no són paral·lels). Els seus vectors característics tampoc són paral·lels.

Així, donades dues rectes *r* i *s*, que tenen per vectors directors $\vec{v}=(v_1,v_2)$ i $\vec{u}=(u_1,u_2)$, respectivament, i els seus pendents són *m* i *m'*, respectivament:

- Si *r* i *s* són paral·leles o coincidents → $\frac{v_1}{u_1}=\frac{v_2}{u_2}$ i $m=m'$

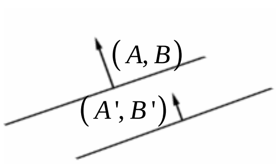


- Si *r* i *s* són secants → $\frac{v_1}{u_1}\neq\frac{v_2}{u_2}$ i $m\neq m'$



Si les equacions generals de *r* i *s* són $r: Ax+By+C=0$ i $s: A'x+B'y+C'=0$:

- Si *r* i *s* són paral·leles o coincidents → (A,B) i (A',B') són paral·lels → $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$
- Si *r* i *s* són secants → (A,B) i (A',B') no són paral·lels → $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$



Si dues rectes són coincidents, les seves equacions són equivalents (expressen la mateixa recta) i, per tant, els coeficients de les seves equacions generals són proporcionals (obtenim una equació multiplicant els dos membres de l'altra equació per un nombre):

- Si *r* i *s* són coincidents → $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$
- Si *r* i *s* són paral·leles→ $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$

Determinació de la posició relativa de dues rectes a partir de les seves equacions

A partir de les seves equacions vectorials, paramètriques o contínues

Per esbrinar la posició relativa de les rectes r i s, a partir de les seves equacions vectorials, paramètriques o contínues, procedim de la manera següent:

- Calculem un punt i un vector director de cada recta:

$$r \to P(p_1, p_2);\ \vec{v}(v_1, v_2) \qquad s \to Q(q_1, q_2);\ \vec{u}(u_1, u_2)$$

- Esbrinem si els vectors directors són paral·lels:
  - Si $\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}$, les rectes són secants.
  - Si $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$ → les rectes són paral·leles o coincidents.
- Si els vectors són paral·lels, les rectes, o bé tenen tots els punts en comú (coincidents), o no tenen cap punt en comú (paral·leles). Per esbrinar si són paral·leles o coincidents, serà suficient comprovar si un punt d'una recta pertany a l'altra:
  - Si $P \in s$, les rectes són coincidents.
  - Si $P \notin s$, les rectes són paral·leles.

A partir de les seves equacions explícites

Volem esbrinar la posició relativa de les rectes r i s, a partir de les seves equacions explícites:

$$r: y = mx + n \quad \text{i} \quad s: y = m'x + n'$$

- Comparem els pendents i les ordenades en l'origen:
  - Si $m \neq m'$, les rectes són secants.
  - Si $m = m'$ i $n \neq n'$, les rectes són paral·leles.
  - Si $m = m'$ i $n = n'$, les rectes són coincidents.

A partir de les seves equacions generals

Volem esbrinar la posició relativa de les rectes r i s, a partir de les seves equacions generals:

$$r: Ax + By + C = 0 \ \text{ i } \ s: A'x + B'y + C' = 0$$

- Comprovem si els coeficients són proporcionals:
  - Si $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$, les rectes són secants.
  - Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$, les rectes són paral·leles.
  - Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$ les rectes són coincidents.

Quadre resum

Donades les rectes:

$$r: \begin{cases} \text{Punt}: P(p_1, p_2) \\ \text{Vector director}: \vec{v}(v_1, v_2) \\ \text{Pendent}: m \\ \text{Equació explícita}: y = mx + n \\ \text{Equació general}: Ax + By + C = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \text{Punt}: Q(q_1, q_2) \\ \text{Vector director}: \vec{u}(u_1, u_2) \\ \text{Pendent}: m' \\ \text{Equació explícita}: y = m'x + n' \\ \text{Equació general}: A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Posició relativa	Vectors directors	Punts en comú	Equació explícita	Equació general
Secants	No paral·lels: $\dfrac{v_1}{u_1} \neq \dfrac{v_2}{u_2}$	Un punt comú.	$m \neq m'$	$\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$
Paral·leles	Iguals o paral·lels: $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{v_2}{u_2}$	Cap punt comú. $P \notin s;\ Q \notin r$	$m = m'$ $n \neq n'$	$\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$
Coincidents	Iguals o paral·lels: $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{v_2}{u_2}$	Tots els punts comuns. $P \in s;\ Q \in r$	$m = m'$ $n = n'$	$\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$

Determinació de la posició relativa resolent un sistema d'equacions

Una altra manera de determinar la posició relativa de dues rectes consisteix a resoldre el sistema format per les seves equacions, ja que les solucions del sistema són punts comuns a les dues rectes:

- Si el sistema és **compatible determinat** (té una solució), les rectes són **secants** (tenen un punt en comú).
- Si el sistema és **compatible indeterminat** (té infinites solucions), les rectes són **coincidents** (tenen tots els punts en comú).
- Si el sistema és **incompatible** (no té solució), les rectes són **paral·leles** (no tenen cap punt en comú).

Exemple**: Esbrina la posició relativa dels parells de rectes següents:**

a) $\boldsymbol{r: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{-6}}$ **i** $\boldsymbol{s: x-1 = \frac{y+1}{-2}}$

- Calculem un punt i un vector director de cada recta:

$$r: \begin{cases} \text{Punt}: P(4,-2) \\ \text{Vector director}: \vec{v}(3,-6) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \text{Punt}: Q(1,-1) \\ \text{Vector director}: \vec{u}(1,-2) \end{cases}$$

- Esbrinem si els vectors directors són paral·lels:

$$\frac{3}{1} = \frac{-6}{-2} = 3 \rightarrow \text{ són paral·leles o coincidents}$$

- Esbrinem si el punt P pertany a la recta s:

$$\text{Si } P(4,-2) \in s \rightarrow 4-1 = \frac{-2+1}{-2} \rightarrow 3 = \frac{1}{2} \quad \text{Fals}: 3 \neq \frac{1}{2} \rightarrow \underline{r \text{ i } s \text{ són paral·leles}}$$

b) $\boldsymbol{r: y = 3x+1}$ **i** $\boldsymbol{s: y = 2x+1}$

Els pendents són diferents: $3 \neq 2 \rightarrow$ <u>r i s són secants</u>

c) $\boldsymbol{r: 3x - y + 4 = 0}$ **i** $\boldsymbol{s: -9x + 3y - 12 = 0}$

$$\frac{3}{-9} = \frac{-1}{3} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3} \rightarrow \underline{r \text{ i } s \text{ són coincidents}}$$

Exercici: Esbrina la posició relativa dels parells de rectes següents:

a) $r: 5x - 10y + 2 = 0$ i $s: x - 2y + 1 = 0$

b) $r: 2x - 3y + 5 = 0$ i $s: x - 2y + 1 = 0$

c) $r: 4x - 6y + 10 = 0$ i $s: 2x - 3y + 5 = 0$

d) $r: y = 3x + 1$ i $s: y = 3x - 1$

e) $r: y = 3x + 1$ i $s: y = -3x - 1$

f) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{6}$ i $s: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+4}{9}$

Sol.: **a)** paral·leles **b)** secants **c)** coincidents
d) paral·leles **e)** secants **f)** coincidents

Punt d'intersecció o de tall de dues rectes secants

Si dues rectes són secants, tenen un punt comú, és a dir, es tallen en un punt. Aquest punt s'anomena **punt d'intersecció o de tall de les rectes**.

Aquest punt verifica les equacions de les dues rectes, ja que pertany a totes dues.

Per tant, per calcular les coordenades del punt d'intersecció, resolem el sistema format per les equacions de les rectes.

Per resoldre el sistema, és convenient tenir les equacions generals o explícites de les rectes. Si tenim altres formes d'equació de la recta, operem per passar-les a equacions generals.

Exemple: **Calcula el punt d'intersecció de les rectes següents:**

a) $\boldsymbol{r: x - y + 1 = 0 \quad \text{i} \quad s: x - 2y + 3 = 0}$

Resolem el sistema per reducció:

$$\begin{array}{l} {}^{*}x - y = -1 \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ x - 2y = -3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -x + y = 1 \\ x - 2y = -3 \\ \hline \cancel{} - y = -2 \end{array} \rightarrow \boxed{y = 2} \quad \rightarrow {}^{*}x - 2 = -1 \rightarrow x = -1 + 2 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

El punt d'intersecció és $\boxed{(1,2)}$

b) $\boldsymbol{r: y = 3x + 1 \quad \text{i} \quad s: y = 2x + 1}$

Resolem el sistema per igualació:

$3x + 1 = 2x + 1 \rightarrow 3x - 2x = 1 - 1 \rightarrow \boxed{x = 0}$

$y = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \rightarrow \boxed{y = 1}$

→ El punt d'intersecció és $\boxed{(0,1)}$

Exercici: Calcula el punt d'intersecció de les rectes següents:

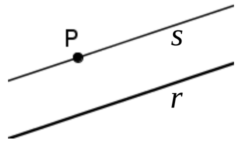
a) $r: 5x + 4y + 2 = 0 \quad i \quad s: x - 3y - 11 = 0$

b) $r: y = x - 10 \quad i \quad s: y = -2x + 2$

Sol.: a) (2,-3) **b)** (4,-6)

Equació d'una recta paral·lela a una recta donada

Suposem que volem **calcular l'equació d'una recta s que passa per un punt donat $P\left(p_1, p_2\right)$ i que és paral·lela a una recta donada r.**



Les rectes r i s tenen la mateixa direcció i, per tant, el mateix vector director, el mateix pendent i el mateix vector característic.

Així, **la recta s ve determinada pel punt** P i la direcció de r (el vector director de r, el vector característic de r o pel pendent de r):

- Si $r: \dfrac{x-q_1}{v_1} = \dfrac{y-q_2}{v_2} \;\rightarrow\; s: \dfrac{x-p_1}{v_1} = \dfrac{y-p_2}{v_2}$
- Si $r: Ax+By+C=0 \rightarrow s: Ax+By+C'=0$ (calculem C' fent que P verifiqui l'equació)
- Si $r: y = mx+n \;\rightarrow\; s: y = mx+n'$ (calculem n' fent que P verifiqui l'equació)

Exemple: **Troba l'equació de la recta s que passa pel punt $P(5,-2)$ i que és paral·lela a la recta donada r:**

a) $\mathbf{r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{-3}} \;\rightarrow \boxed{s: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+2}{-3}}$

b) $\mathbf{r: 2x-y+1=0} \;\rightarrow \boxed{s: 2x-y-12=0}$

$$\left.\begin{array}{l} s: 2x-y+C=0 \\ P(5,-2)\in s \end{array}\right\} \rightarrow 2\cdot 5-(-2)+C=0 \rightarrow 10+2+C=0 \rightarrow \boxed{C=-12}$$

c) $\mathbf{r: y=-4x+3} \;\rightarrow \boxed{s: y=-4x+18}$

$$\left.\begin{array}{l} s: y=-4x+n \\ P(5,-2)\in s \end{array}\right\} \rightarrow -2=-4\cdot 5+n \rightarrow -2=-20+n \rightarrow n=-2+20 \rightarrow \boxed{n=18}$$

<u>Exercici</u>: Troba l'equació de la recta s que passa pel punt $P(-1,-3)$ i que és paral·lela a la recta donada r:

a) $r: \dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y+4}{8}$

b) $r: x-7y-10=0$

c) $r: y=-x+5$

Sol.: **a)** $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+3}{8}$ **b)** $x-7y-20=0$ **c)** $y=-x-4$

Punts de tall amb els eixos

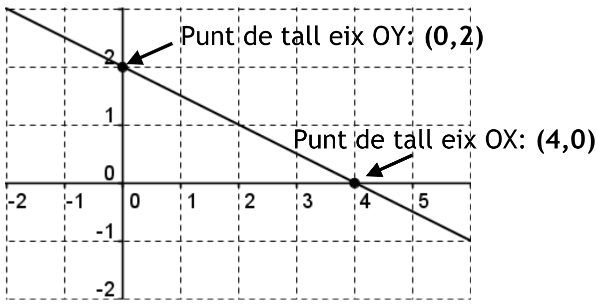
Els eixos de coordenades són dues rectes, una recta horitzontal (eix OX) i una de vertical (eix OY). Les seves equacions són:

$y=0 \rightarrow$ Equació de l'eix OX (qualsevol punt de l'eix de les abscisses té l'ordenada igual a 0)

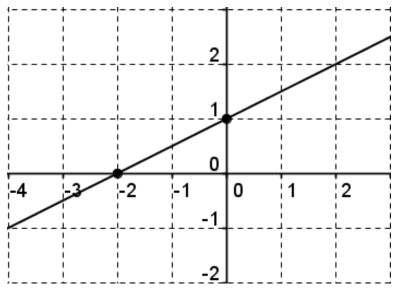
$x=0 \rightarrow$ Equació de l'eix OY (qualsevol punt de l'eix de les ordenades té l'abscissa igual a 0)

Una recta que no és ni horitzontal ni vertical tallarà els eixos de coordenades per dos punts (un punt de tall per cada eix).

Exemple: **Indica les coordenades dels punts de tall amb els eixos de la recta següent:**



Exercici: Indica les coordenades dels punts de tall amb els eixos de la recta següent:



Càlcul dels punts de tall amb els eixos

Per calcular el punt de tall d'una recta *r* amb un eix de coordenades, resolem el sistema format per l'equació de *r* i l'equació de l'eix.

Punt de tall amb l'eix OX

El **punt de tall de la recta *r* amb l'eix OX** és el punt de *r* que té l'ordenada igual a 0. Per calcular-lo, substituïm *y* per 0 ($y = 0$) en l'equació de la recta i calculem *x*:

$$\text{Resolem el sistema: } \begin{cases} r : Ax + By + C \rightarrow \text{equació de } r \\ y = 0 \rightarrow \text{equació de l'eix OX} \end{cases}$$

Punt de tall amb l'eix OY

El **punt de tall de la recta *r* amb l'eix OY** és el punt de *r* que té l'abscissa igual a 0. Per calcular-lo, substituïm *x* per 0 ($x = 0$) en l'equació de la recta i calculem *y*:

$$\text{Resolem el sistema: } \begin{cases} r : Ax + By + C \rightarrow \text{equació de } r \\ x = 0 \rightarrow \text{equació de l'eix OY} \end{cases}$$

Exemple: **Calcula els punts de tall amb els eixos de la recta $r: 2x - y + 4 = 0$:**

Punt de tall amb l'eix OX:

$$\begin{cases} r: 2x - y + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x - 0 + 4 = 0$$

$$\rightarrow 2x + 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{2} = -2 \rightarrow \boxed{(-2, 0)}$$

Punt de tall amb l'eix OY:

$$\begin{cases} r: 2x - y + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 2 \cdot 0 - y + 4 = 0$$

$$\rightarrow -y + 4 = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow \boxed{(0, 4)}$$

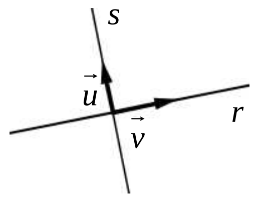
<u>Exercici</u>: Calcula els punts de tall amb els eixos de la recta $r: 5x - 2y + 10 = 0$:

Sol.: (-2,0); (0,5)

<u>Perpendicularitat de rectes</u>

Dues **rectes** són **perpendiculars** si, i només si, <u>els seus vectors directors són perpendiculars</u> (el seu producte escalar és igual a zero).

Donades dues rectes r i s que tenen per vectors directors $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $\vec{u} = (u_1, u_2)$, respectivament:

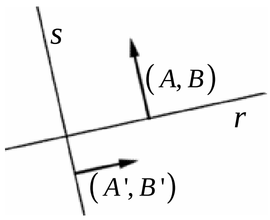


$$\boxed{r \perp s \;\leftrightarrow\; \vec{v} \perp \vec{w} \;\leftrightarrow\; \vec{v} \cdot \vec{w} = 0}$$

Els seus <u>vectors característics també són perpendiculars:</u>

$$\begin{cases} r: Ax + By + C = 0 \\ s: A'x + B'y + C' = 0 \end{cases} \rightarrow \; r \perp s \;\leftrightarrow\; (A, B) \perp (A', B') \;\leftrightarrow (A, B) \cdot (A', B') = 0$$

Per saber si dues rectes són perpendiculars, n'hi ha prou de comprovar si els seus vectors directors o característics ho són.



Exemple: **Esbrina si les rectes següents són perpendiculars:**

a) $\boldsymbol{r : \frac{x - 4}{3} = \frac{y + 2}{-1}}$ **i** $\boldsymbol{s : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{6}}$ $\rightarrow$ Els vectors directors són

$\vec{v} = (3, -1)$ i $\vec{u} = (2, 6)$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = (3, -1) \cdot (2, 6) = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 = 6 - 6 = 0 \rightarrow$ Són perpendiculars

b) $\boldsymbol{r : x - y + 1 = 0}$ **i** $\boldsymbol{s : x - 2y + 3 = 0}$

$(A, B) \cdot (A', B') = (1, -1) \cdot (1, -2) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 1 + 2 = 3 \neq 0 \rightarrow$ No són perpendiculars

Exercici: Esbrina si les rectes següents són perpendiculars:

a) $r : \frac{x - 4}{4} = \frac{y + 2}{-3}$ i $s : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{3}$

b) $r : 2x - 4y + 1 = 0$ i $s : 2x + y + 3 = 0$

Sol.: a) no **b)** sí

Pendents de rectes perpendiculars

Donades dues rectes r i s, de pendents m i m', respectivament:

$$\boxed{r \perp s \;\leftrightarrow\; m' = -\frac{1}{m}}$$

Demostració**:**

Els vectors directors de r i s són: $\vec{v} = (1, m)$ i $\vec{u} = (1, m')$

El producte escalar de $\vec{v}$ i $\vec{u}$ és: $(1, m) \cdot (1, m') = 1 \cdot 1 + m \cdot m' = 1 + m \cdot m'$

Les rectes seran perpendiculars si, i només si, $1 + m \cdot m' = 0$

$$r \perp s \;\leftrightarrow\; \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \;\leftrightarrow\; 1 + m \cdot m' = 0 \leftrightarrow m \cdot m' = -1 \leftrightarrow \boxed{m' = -\frac{1}{m}}$$

<u>Exemple</u>: **Esbrina si les rectes següents són perpendiculars:**

a) $\boldsymbol{r : y = 2x + 1}$ **i** $\boldsymbol{s : y = -\frac{1}{2}x + 1}$

$m = 2;\ m' = -\frac{1}{2} \rightarrow m' = -\frac{1}{m}$ → Són perpendiculars

b) $\boldsymbol{r : y = 3x + 1}$ **i** $\boldsymbol{s : y = \frac{1}{3}x + 1}$

$m = 3;\ m' = \frac{1}{3} \rightarrow m' \neq -\frac{1}{m}$ → No són perpendiculars

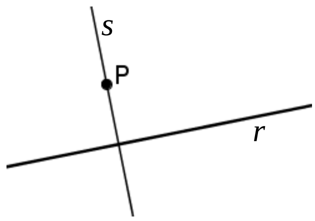
<u>Exercici</u>: Esbrina si les rectes següents són perpendiculars:

a) $r : y = x + 1 \quad i \quad s : y = -x - 5$

b) $r : y = 3x + 1 \quad i \quad s : y = -3x + 1$

Sol.: a) sí **b)** no

Equació d'una recta perpendicular a una recta donada



Suposem que volem **calcular l'equació d'una recta s que passa per un punt donat $P(p_1, p_2)$ i que és perpendicular a una recta donada *r*.**

Per determinar l'equació de la recta s, prenem el punt P i un vector director ortogonal al de r, o un vector característic ortogonal al de r, o el pendent igual a la inversa del pendent de r canviada de signe:

- Si (v_1, v_2) és un vector director de $r \rightarrow$ $(-v_2, v_1)$ i $(v_2, -v_1)$ són vectors directors de s.
- Si (A, B) és un vector característic de $r \rightarrow$ $(-B, A)$ i $(B, -A)$ són vectors característics de s.
- Si m és el pendent de $r \rightarrow$ $-\frac{1}{m}$ és el pendent de s.

Així, obtenim que:

- Si $r: \frac{x-q_1}{v_1} = \frac{y-q_2}{v_2} \rightarrow s: \frac{x-p_1}{-v_2} = \frac{y-p_2}{v_1}$
- Si $r: Ax + By + C = 0 \rightarrow s: -Bx + Ay + C' = 0$ (calculem C' fent que P verifiqui l'equació)
- Si $r: y = mx + n \rightarrow s: y = -\frac{1}{m}x + n'$ (calculem n' fent que P verifiqui l'equació)

<u>Exemple</u>**: Calcula l'equació de la recta s que passa pel punt $P(5,-2)$ i que és perpendicular a la recta donada r:**

a) $\boldsymbol{r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3}} \rightarrow \boxed{s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{2}}$

b) $\boldsymbol{r: 2x - y + 1 = 0} \rightarrow \boxed{s: x + 2y - 1 = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} s: x+2y+C=0 \\ P(5,-2) \in s \end{array}\right\} \rightarrow 5 + 2\cdot(-2) + C = 0 \rightarrow 1 + C = 0 \rightarrow \boxed{C = -1}$$

c) $\boldsymbol{r: y = -4x + 3} \rightarrow \boxed{s: y = \frac{1}{4}x - \frac{13}{4}}$

$$\left.\begin{array}{l} s: y=\frac{1}{4}x+n \\ P(5,-2) \in s \end{array}\right\} \rightarrow -2 = \frac{1}{4}\cdot 5 + n \rightarrow -2 - \frac{5}{4} = n \rightarrow \boxed{n = -\frac{13}{4}}$$

<u>Exercici</u>: Calcula l'equació de la recta s que passa pel punt $P(-1,-3)$ i que és perpendicular a la recta r:

a) $r: \frac{x-5}{-1} = \frac{y+4}{8}$

b) $r: x - 7y - 10 = 0$

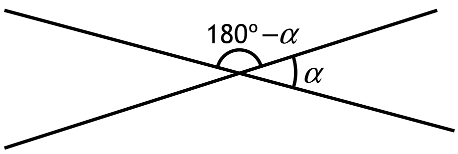
c) $r : y = 2x + 5$

Sol.: **a)** $\frac{x+1}{-8} = \frac{y+3}{-1}$ **b)** $7x + y + 10 = 0$ **c)** $y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

Angle que formen dues rectes

Dues rectes secants formen quatre angles iguals dos a dos. Els angles diferents són suplementaris.

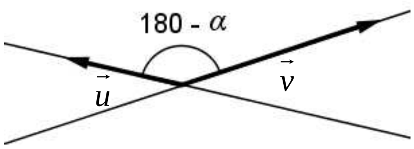
Anomenem **angle que formen dues rectes,** α, el menor dels angles que determinen.

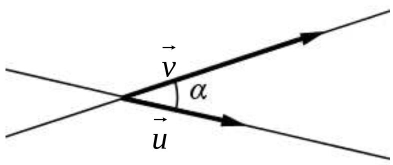


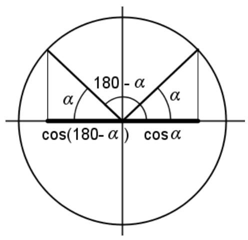
Si les dues rectes són perpendiculars, α = 90°.

Si no són perpendiculars, $\boldsymbol{\alpha}$ **< 90°**, és a dir, és un angle agut. Per tant, **cos** $\boldsymbol{\alpha}$ **>0**.

L'angle que formen els vectors directors de les rectes pot ser α o 180°- α (depenent dels sentits dels vectors directors). Però els cosinus d'aquests angles només es diferencien en el signe, atès que **cos** $\boldsymbol{\alpha}$ **= - cos (180°-**$\boldsymbol{\alpha}$**):**







Així, el cosinus de l'angle que formen dues rectes és el valor absolut del cosinus de l'angle que formen els seus vectors directors.

Si β és l'angle que formen els vectors directors, $\vec{v}$ i $\vec{u}$, de les rectes r i s, i α és l'angle que formen r i s :

$$\cos\alpha = \left|\cos\beta\right| = \left|\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|}\right| = \frac{\left|\vec{v}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|} \rightarrow \boxed{\cos\boldsymbol{\alpha} = \frac{\left|\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\right|}{\left|\vec{\boldsymbol{v}}\right|\cdot\left|\vec{\boldsymbol{u}}\right|}}$$

Prenem el valor absolut perquè cos α sigui positiu i α sigui l'angle agut.

Exemple: **Calcula l'angle que formen les rectes següents:**

a) $\boldsymbol{r: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{1}}$ **i** $\boldsymbol{s: y = -4x+3}$

Els vectors directors són $\vec{v} = (3,1)$ i $\vec{u} = (1,-4)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{|(3,1)\cdot(1,-4)|}{|(3,1)|\cdot|(1,-4)|} = \frac{|3\cdot 1+1\cdot(-4)|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{170}} \rightarrow \boxed{\alpha = 85,6^{\circ}}$$

b) $\boldsymbol{r: x-y+1=0}$ **i** $\boldsymbol{s: x-2y+3=0}$

Els vectors directors són $\vec{v} = (1,1)$ i $\vec{u} = (2,1)$

$$\cos\alpha = \frac{|(-B,A)\cdot(-B',A')|}{|(-B,A)|\cdot|(-B',A')|} = \frac{|(1,1)\cdot(2,1)|}{|(1,1)|\cdot|(2,1)|} = \frac{|1\cdot 2+1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \rightarrow \boxed{\alpha = 18,43^{\circ}}$$

Exercici: Calcula l'angle que formen les rectes següents:

a) $r: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{2}$ i $s: y = -x+3$

b) $r: x+7y+1=0$ i $s: 6x-5y+3=0$

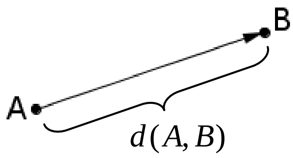
Sol.: a) $\alpha = 78,69^{\circ}$ **b)** $\alpha = 58,32^{\circ}$

Distàncies

Distància entre dos punts

La **distància entre dos punts A i B** del pla és la longitud del segment de recta que els uneix i coincideix amb el mòdul dels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$. Es r

$$\boxed{\boldsymbol{d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|}}$$



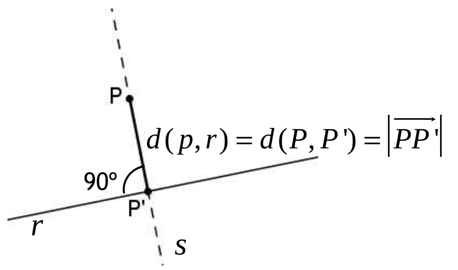
Exemple: **Calcula la distància entre els punts A(-2,5) i B(-3,4):** - Calculem els components del vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (-3-(-2), 4-5) = (-1,-1)$ - Calculem el mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$: $d(A,B) = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \boxed{\sqrt{2}}$
Exercici: Calcula la distància entre els punts A(1,-3) i B(-3,7).   **Sol.:** $\sqrt{116}$

Distància d'un punt a una recta

La **distància d'un punt P a una recta r** és la menor de les distàncies entre P i els punts de r.

Es representa amb $d(P,r)$:

- Si P és un punt que pertany a la recta r, aleshores $d(P,r) = 0$.
- Si P és un punt exterior a la recta r, la distància entre P i r és la longitud del segment que uneix el punt P i un punt de r i és perpendicular a r.



El punt P' és el punt d'intersecció de r i la recta s (representada en línia discontínua) perpendicular a r que passa per P. Aquest punt s'anomena projecció ortogonal de P sobre r.

Per calcular la distància d'un punt $P\left(p_1, p_2\right)$ a una recta r d'equació general $r: Ax + By + C = 0$, apliquem la fórmula següent:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\left|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Exemple:

1. Calcula la distància del punt $P(-2,5)$ a la recta $r: 2x - y + 11 = 0$.

$$d(P,r) = \frac{\left|2 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 + 11\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

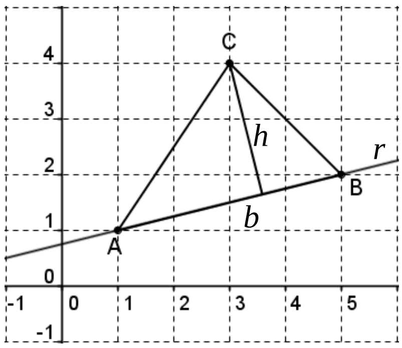
2. Calcula l'àrea del triangle de vèrtexs els punts $A(1,1)$, $B(5,2)$ i $C(3,4)$.

Recordem que la fórmula de l'àrea del triangle és:

$$A_{\text{triangle}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Aleshores, per calcular l'àrea del triangle, necessitem calcular la longitud de la base, b, i la de l'altura, h.

Si prenem com a base el costat AB i anomenem r la recta que passa per A i B, tenim que:



$b = \left|\overrightarrow{AB}\right| \qquad h = d(C,r)$

- Calculem b :

$$\overrightarrow{AB} = (5-1, 2-1) = (4,1) \rightarrow b = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|(4,1)\right| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{17}}$$

- Calculem r :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4,1) \rightarrow \boxed{(A,B) = (1,-4)} \rightarrow r: x - 4y + C = 0 \\ A(1,1) \in r \rightarrow 1 - 4 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow -3 + C = 0 \rightarrow \boxed{C = 3} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{r: x - 4y + 3 = 0}$$

- Calculem h i l'àrea:

$$h = d(C,r) = \frac{\left|3 - 4 \cdot 4 + 3\right|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{\left|-10\right|}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{10}{\sqrt{17}}} \rightarrow A_{\text{triangle}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{17} \cdot \frac{10}{\sqrt{17}}}{2} = \boxed{5}$$

Exercici:

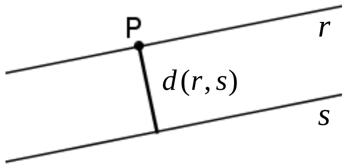
a) Calcula la distància del punt P(-2,3) a la recta $r: 8x - 3y - 5 = 0$.

b) Calcula l'àrea del triangle de vèrtexs A(-1,-2), B(4,1) i C(1,2).

Sol.: a) $\frac{30\sqrt{73}}{73}$ **b)** A = 7

Distància entre dues rectes

La **distància entre dues rectes *r* i *s*** és la menor de les distàncies entre els punts de r i els de s. Es representa amb $d(r,s)$.



- Si les rectes són secants o coincidents, aleshores $d(r,s) = 0$.
- Si les rectes són paral·leles, la distància entre r i s és igual a la distància entre un punt qualsevol d'una de les rectes i l'altra recta.

Així, **per calcular la distància entre dues rectes paral·leles r i s**, prenem un punt P de la recta r i calculem $d(P,s)$, o prenem un punt Q de la recta s i calculem $d(Q,r)$.

Exemple: **Calcula la distància entre les rectes següents:**

a) $\boldsymbol{r: x - 5y - 8 = 0}$ **i** $\boldsymbol{s: -x + 2y + 3 = 0}$

- Esbrinem si les rectes són paral·leles: $\frac{1}{-1} \neq \frac{-5}{2} \rightarrow$ No són paral·leles $\rightarrow d(r,s) = 0$

b) $\boldsymbol{r: 2x - 4y - 8 = 0}$ **i** $\boldsymbol{s: -x + 2y + 3 = 0}$

- Esbrinem si les rectes són paral·leles: $\frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} \neq \frac{-8}{3} \rightarrow$ són paral·leles
- Calculem les coordenades d'un punt P de la recta r:

$$x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 - 4y - 8 = 0 \rightarrow -4y = 8 \rightarrow y = -2 \rightarrow \boxed{P(0,-2)}$$

- Calculem la distància entre P i s:

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{|-0 + 2 \cdot (-2) + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

Exercici: Calcula la distància entre les rectes següents:

a) $r: \frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{1} \quad i \quad s: 2x - 6y + 3 = 0$

b) $r: 2x - 6y - 10 = 0 \quad i \quad s: -x + 3y + 3 = 0$

c) $r: x - y - 8 = 0 \quad i \quad s: 5x + 2y + 3 = 0$

Sol.: a) $\frac{17}{\sqrt{40}} = \frac{17\sqrt{10}}{20}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ **c)** 0

1. Dibuixa en uns eixos cartesians la recta determinada per:

a) Els punts A(-2,-1) i B(2,3).

b) El punt P(4,3) i el vector director $\vec{v}=(-3,-1)$.

c) El punt P(-1,2) i l'angle que forma l'eix 0X $\alpha=135^{\circ}$.

d) El punt P(1,1) i el pendent m = 2.

e) El punt P(-4,1) i el pendent m = $\frac{2}{3}$.

f) El punt P(-3,2) i el pendent m = -1.

2. Donada la recta r que passa pel punt P(-5,-3) i que té per vector director $\vec{v}=(6,4)$:

a) Determina <u>l'equació vectorial</u> i <u>les equacions paramètriques</u> de la recta r.

b) Troba tres punts que pertanyin a la recta r.

c) Esbrina si els punts A(-11,-7) i B(2,-1) pertanyen a la recta r.

3. Donada la recta r que passa pel punt P(4,-3) i que té per vector director $\vec{v}=(-2,7)$:

a) Determina <u>l'equació contínua</u> de la recta r.

b) Troba tres punts que pertanyin a la recta r.

c) Esbrina si els punts A(8,-7) i B(0,11) pertanyen a la recta r.

4. Donada la recta r que passa pel punt P(-2,3) i que té per vector director $\vec{v}=(-1,4)$:

a) Determina <u>l'equació general</u> de la recta r.

b) Troba tres punts que pertanyin a la recta r.

c) Esbrina si els punts A(-5,15) i B(4,3) pertanyen a la recta r.

5. Troba <u>l'equació general</u> de la recta que passa pel punt P i que té per vector director $\vec{v}$, en els casos següents:

a) P(4,3) i $\vec{v}=(-3,-1)$ **b)** P(10,-2) i $\vec{v}=(-2,9)$ **c)** P(-5,1) i $\vec{v}=(1,-1)$

6. Troba l'equació punt-pendent de la recta de pendent m i que passa pel punt P, en els casos següents:

a) $P(3,-4)$ i $m = 1$ **b)** $P(-2,-8)$ i $m = -5$ **c)** $P(3,4)$ i $m = \frac{2}{3}$

7. Donada la recta r que passa pel punt $P(7,-9)$ i que té per vector director $\vec{v} = (-2,4)$:

a) Determina l'equació explícita de la recta r.

b) Troba tres punts que pertanyin a la recta r.

c) Esbrina si els punts $A(5,-15)$ i $B(4,-3)$ pertanyen a la recta r.

8. Troba l'equació explícita de la recta que passa pel punt P i que té per vector director $\vec{v}$, en els casos següents:

a) $P(1,-1)$ i $\vec{v} = (4,3)$ **b)** $P(3,-2)$ i $\vec{v} = (-2,-8)$ **c)** $P(5,12)$ i $\vec{v} = (-1,0)$

9. Escriu les diferents equacions de la recta que passa pel punt P (-5,3) i que té com a vector director el vector $\vec{v}$ = (-2,2).

10. Escriu les diferents equacions de la recta que passa pel punt $P(3,-8)$ i que té com a vector director el vector $\vec{v}$ = (5,2).

11. Troba un punt i un vector director de cadascuna de les rectes següents:

a) $(x,y) = (-10,-4) + k(-9,7)$

b) $\dfrac{x-15}{-1} = \dfrac{y+2}{6}$

c) $2x - 5y + 3 = 0$

d) $y = -5x + 10$

e) $\begin{cases} x = 2 - 8k \\ y = 3 + 6k \end{cases}$

f) $x - 5 = \dfrac{y+4}{12}$

g) $x + 3y + 1 = 0$

h) $y = -\dfrac{3}{2}x - 2$

i) $\begin{cases} x = -7 - k \\ y = 11 + k \end{cases}$

j) $\dfrac{-x-5}{-1} = \dfrac{4y+4}{8}$

k) $-2x - y - 12 = 0$

l) $y = x + 4$

12. Troba el pendent de les rectes anteriors.

13. Troba l'equació contínua de la recta que passa pels punts $A(-1,4)$ i $B(-3,5)$.

14. Troba l'equació general de la recta que passa pels punts $A(1,-3)$ i $B(1,2)$.

15. Troba l'equació explícita de la recta que passa pels punts A(-4,-3) i B(-7,0).

16. Indica si els punts següents estan alineats:

a) A(-1,-1), B(2,1) i C(8,5). **b)** D(-1,2), E(0,0) i F(2,-2).

17. Esbrina la posició relativa dels parells de rectes següents:

a) $r: 6x\text{-}15y+1=0 \quad i \quad s: -10x+25y+1=0$

b) $r: 2x-10y+8=0 \quad i \quad s: x+5y+4=0$

c) $r: y=2x+3 \quad i \quad s: y=2x+1$

d) $r: \dfrac{x\text{-}1}{1}=\dfrac{y\text{-}5}{4} \quad i \quad s: \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+4}{-12}$

e) $r: 2x+6y+4=0 \quad i \quad s: -3x-9y-6=0$

f) $r: y=x+1 \quad i \quad s: y=-x+1$

g) $r: y=3x+\dfrac{1}{2} \quad i \quad s: 6x-2y+1=0$

h) $r: \dfrac{x\text{-}1}{1}=\dfrac{y\text{-}5}{4} \quad i \quad s: 2x-y+5=0$

18. Calcula el punt d'intersecció de les rectes secants de l'exercici anterior.

19. Calcula els punts de tall amb els eixos de les rectes:

a) $r: 2x\text{-}y+8=0$ **b)** $s: -3x+2y+6=0$ **c)** $t: y=5x+3$

20. Troba l'equació de la recta paral·lela a la recta r i que passa pel punt P, en els casos següents:

a) $\begin{cases} r: 4x-5y+3=0 \\ P(-3,5) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r: \dfrac{x+5}{-2}=\dfrac{y+1}{-3} \\ P(4,-10) \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} r: y=-5x+3 \\ P(-1,1) \end{cases}$

21. Indica si els parells de rectes següents són perpendiculars:

a) $r: x - 5y + 1 = 0 \quad i \quad s: 10x + 2y - 3 = 0$

b) $r: y = 2x + 4$ i $s: y = -\frac{1}{2}x + 8$

c) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4} \quad i \quad s: \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{-1}$

d) $r: x + y + 4 = 0 \quad i \quad s: -x - y - 1 = 0$

e) $r: y = x + 1 \quad i \quad s: y = -x - 2$

f) $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{7} \quad i \quad s: 7x + 3y + 5 = 0$

22. Troba l'equació de la recta perpendicular a la recta r i que passa pel punt P, en els casos següents:

a) $\begin{cases} r: 4x - 5y + 3 = 0 \\ P(-3,5) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r: \frac{x+5}{-2} = \frac{y+1}{-3} \\ P(4,-10) \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} r: y = -5x + 3 \\ P(-1,1) \end{cases}$

23. Donats els punts A(-3,-3), B(-1,0) i C(2,-2), troba:

a) L'equació de la recta r que passa per A i B.

b) L'equació de la recta paral·lela a r i que passa per C.

c) L'equació de la recta perpendicular a r i que passa per C.

24. Calcula el valor de a perquè les rectes $r: 3x + ay + 4 = 0 \quad i \quad s: 4x - 2y - 1 = 0$ siguin:

a) paral·leles

b) perpendiculars

25. Calcula l'angle que formen les rectes següents:

a) $r: x - y + 1 = 0 \quad i \quad s: 7x + 2y - 3 = 0$

b) $r: y = -3x + 4$ i $s: y = -x + 1$

c) $r: 2x + y + 4 = 0 \quad i \quad s: -3x + 2y - 1 = 0$

d) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} \quad i \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2}$

26. Calcula la <u>distància entre els parells de punts</u> següents:

a) A(-1,-1) i B(2,3) **b)** C(-2,2) i D(0,5)

27. Calcula la <u>distància entre el punt P i la recta r</u>, en els casos següents:

a) $\begin{cases} r: 4x-5y+3=0 \\ P(-3,5) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r: \dfrac{x+5}{-4}=\dfrac{y+1}{-3} \\ P(4,5) \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} r: y=-5x+3 \\ P(-1,1) \end{cases}$

28. Calcula la <u>distància entre els parells de rectes</u> següents:

a) $r: 2x\text{-}3y+1=0 \quad i \quad s: 4x-6y\text{-}3=0$

b) $r: y=-2x+5$ i $s: 2x+y+10=0$

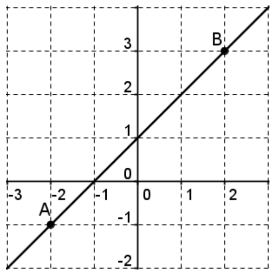
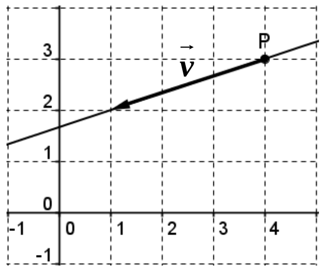
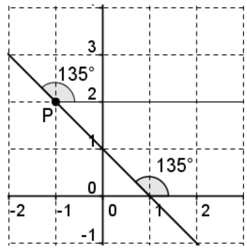
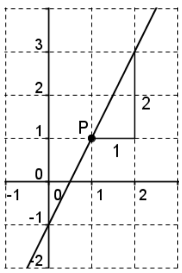
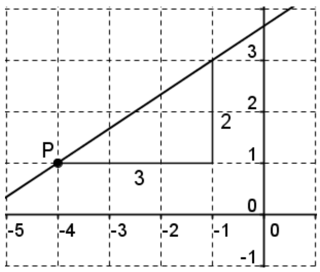
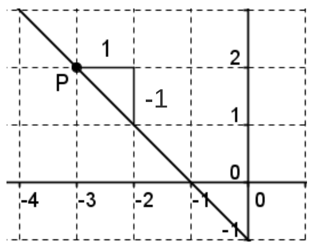
c) $r: \dfrac{x\text{-}1}{1}=\dfrac{y\text{-}5}{4} \quad i \quad s: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+4}{-1}$

d) $r: y=x+1 \quad i \quad s: y=x-2$

29. Calcula <u>l'àrea d'un triangle</u> de vèrtexs A(-3,-1), B(3,0) i C(1,-2).

Solucions

1.

a) 	**b)** 	**c)** 
d) 	**e)** 	**f)** 

2. **a)** Equació vectorial: $r:(x,y)=(-5,-3)+k(6,4)$.

Equacions paramètriques: $r:\begin{cases} x=-5+6k \\ y=-3+4k \end{cases}$

b) Té infinites solucions. Per exemple:

$$k=0\rightarrow(-5,-3);\quad k=1\rightarrow(1,1);\quad k=2\rightarrow(7,5).$$

c) El punt $\boldsymbol{A}$ **sí** que pertany a la recta i el punt $\boldsymbol{B}$ **no** pertany a la recta.

3. **a)** $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+3}{7}$

b) Té infinites solucions. Per exemple: $(6,-10);\ (2,4);\ (-2,18)$.

c) El punt $\boldsymbol{A}$ **no** pertany a la recta i el punt $\boldsymbol{B}$ **sí** que pertany a la recta.

4. **a)** $4x+y+5=0$

b) Té infinites solucions. Per exemple: $(0,-5);\ (1,-9);\ (-1,-1)$.

c) El punt $\boldsymbol{A}$ **sí** que pertany a la recta i el punt $\boldsymbol{B}$ **no** pertany a la recta.

5. **a)** $x-3y+5=0$ **b)** $9x+2y-86=0$ **c)** $x+y+4=0$

6. **a)** $y+4=x-3$ **b)** $y+8=-5(x+2)$ **c)** $y-4=\frac{2}{3}(x-3)$

7. **a)** $y=-2x+5$

b) Té infinites solucions. Per exemple: $(0,5)$; $(1,3)$; $(2,1)$.

c) El punt $\boldsymbol{A}$ **no** pertany a la recta i el punt $\boldsymbol{B}$ **sí** que pertany a la recta.

8. **a)** $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$ **b)** $y=4x-14$ **c)** $y=12$

9. Equació vectorial: $(x,y)=(-5,3)+k(-2,2)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x=-5-2k \\ y=3+2k \end{cases}$

Equació contínua: $\frac{x+5}{-2}=\frac{y-3}{2}$

Equació general: $2x+2y+4=0$
$\rightarrow x+y+2=0$

Equació explícita: $y=-x-2$

Equació punt-pendent: $y-3=-(x+5)$

10. Equació vectorial: $(x,y)=(3,-8)+k(5,2)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x=3+5k \\ y=-8+2k \end{cases}$

Equació contínua: $\frac{x-3}{5}=\frac{y+8}{2}$

Equació general: $-2x+5y+46=0$

Equació explícita: $y=\frac{2}{5}x-\frac{46}{5}$

Equació punt-pendent: $y+8=\frac{2}{5}(x-3)$

11. **a)** $P(-10,-4);\ \vec{v}=(-9,7)$ **g)** $P(-1,0);\ \vec{v}=(-3,1)$

b) $P(15,-2);\ \vec{v}=(-1,6)$ **h)** $P(0,-2);\ \vec{v}=(2,-3)$

c) $P(1,1);\ \vec{v}=(5,2)$ **i)** $P(-7,11);\ \vec{v}=(-1,1)$

d) $P(0,10);\ \vec{v}=(1,-5)$ **j)** $P(-5,-1);\ \vec{v}=(1,2)$

e) $P(2,3);\ \vec{v}=(-8,6)$ **k)** $P(0,-12);\ \vec{v}=(1,-2)$

f) $P(5,-4);\ \vec{v}=(1,12)$ **l)** $P(0,4);\ \vec{v}=(1,1)$

12. **a)** $-\frac{7}{9}$ **b)** -6 **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** -5 **e)** $-\frac{3}{4}$ **f)** 12

g) $-\frac{1}{3}$ **h)** $-\frac{3}{2}$ **i)** -1 **j)** 2 **k)** -2 **l)** 1

13. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{1}$

14. $x-1=0$

15. $y=-x-7$

16. **a) Sí** que estan alineats **b) No** estan alineats

17. **a)** Paral·leles **c)** Paral·leles **e)** Coincidents **g)** Coincidents

b) Secants **d)** Paral·leles **f)** Secants **h)** Secants

18. **b)** (-4,0) **f)** (0,1) **h)** (2,9)

19. **a)** (-4,0) i (0,8) **b)** (2,0) i (0,-3) **c)** $\left(-\frac{3}{5},0\right)$ i (0,3)

20. **a)** $4x-5y+37=0$ **b)** $\frac{x-4}{-2}=\frac{y+10}{-3}$ **c)** $y=-5x-4$

21. **a)** sí **b)** sí **c)** sí **d)** no **e)** sí **f)** no

22. **a)** $5x+4y-5=0$ **b)** $\frac{x-4}{3}=\frac{y+10}{-2}$ **c)** $y=\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$

23. **a)** $-3x+2y-3=0$ **b)** $-3x+2y+10=0$ **c)** $2x+3y+2=0$

24. **a)** $a=-\frac{3}{2}$ **b)** $a=6$

25. **a)** $\alpha=60,95^{o}$ **b)** $\alpha=26,57^{o}$ **c)** $\alpha=60,26^{o}$ **d)** $\alpha=90^{o}$

26. **a)** $d(A,B)=5$ **b)** $d(C,D)=\sqrt{13}$

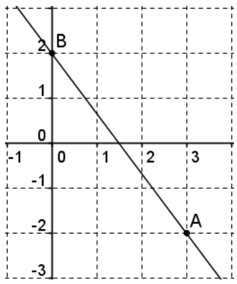
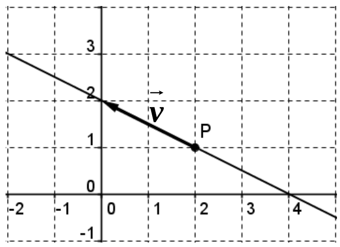
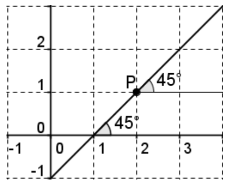
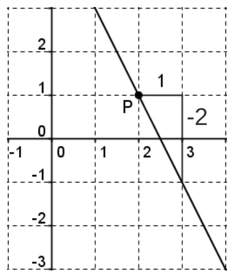
27. **a)** $d(P,r)=\frac{34\sqrt{41}}{41}$ **b)** $d(P,r)=\frac{3}{5}$ **c)** $d(P,r)=\frac{7\sqrt{26}}{26}$

28. **a)** $d(r,s)=\frac{5}{\sqrt{52}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$ **b)** $d(r,s)=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$ **c)** $d(r,s)=0$ **d)** $d(r,s)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

29. 5

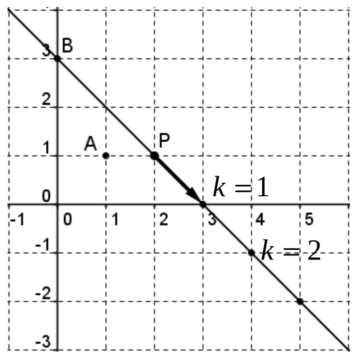
Solucions dels exercicis de la teoria

Determinació de rectes

Recta determinada per dos punts	Recta determinada per un punt i una direcció		
	**a)** 	**b)** 	**c)** 

Equacions de la recta

Equació vectorial



1.

a) $r:(x,y)=(2,1)+k(1,-1)$

b) Té infinites solucions. Per exemple:

$k=0\rightarrow(2,1);\quad k=1\rightarrow(3,0);\quad k=2\rightarrow(4,-1)$.

c) El punt **A no** pertany a la recta

El punt **B sí** que pertany a la recta.

2. $P(1,-6);\ \vec{v}=(-5,3)$

Equacions paramètriques

1.

a) $r:\begin{cases} x=-1-5k \\ y=3-k \end{cases}$

b) Té infinites solucions. Per exemple:

$k=0\rightarrow(-1,3);\quad k=1\rightarrow(-6,2);\quad k=2\rightarrow(-11,1)$.

c) El punt **A no** pertany a la recta i el punt **B sí** que pertany a la recta.

2. **a)** $P(-3,7);\ \vec{v}=(-2,6)$ **b)** $P(1,5);\ \vec{v}=(-1,0)$

Equació contínua

1.

a) $\frac{x-8}{-3}=\frac{y+7}{-5}$

b) Té infinites solucions. Per exemple: $(8,-7)$; $(-1,-22)$; $(2,-17)$.

c) El punt **A no** pertany a la recta i el punt **B sí** que pertany a la recta.

2. **a)** $P(-5,1)$; $\vec{v}=(9,-11)$

b) $P(4,0)$; $\vec{v}=(1,1)$

c) $P\left(-13,\frac{2}{3}\right)$; $\vec{v}=(-2,-3)$

Equació general

1.

a) $2x+y+7=0$

b) Té infinites solucions. Per exemple: $(1,-7)$; $(2,-11)$; $(-1,-5)$.

c) El punt **A sí** que pertany a la recta i el punt **B no** pertany a la recta.

2. $P(1,0)$; $\vec{v}=(-2,1)$

Equació punt-pendent

1. $y-2=-3(x+5)$

2. **a)** $P(1,-6)$; $m=-1$; $\vec{v}=(1,-1)$ **b)** $P(2,1)$; $m=\frac{4}{3}$; $\vec{v}=(3,4)$

Equació explícita

1.

a) m = 2

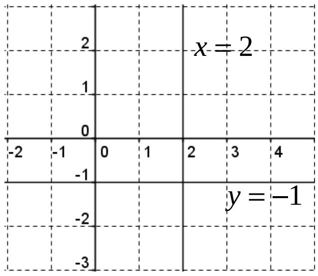
b) $y=2x+6$

c) Té infinites solucions. Per exemple: $(0,6)$; $(1,8)$; $(2,10)$.

d) El punt **A no** pertany a la recta i el punt **B sí** que pertany a la recta.

2. Punt de tall eix OY: $(0,-2)$; $m=5$; $\vec{v}=(1,5)$.

Rectes horitzontals i verticals



Resum de les equacions de la recta

Equació vectorial: $(x, y) = (-1,1) + k(-2,6)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = -1 - 2k \\ y = 1 + 6k \end{cases}$

Equació contínua: $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{6}$

Equació general: $6x + 2y + 4 = 0 \rightarrow 3x + y + 2 = 0$

Equació explícita: $y = -3x - 2$

Equació punt-pendent: $y - 1 = -3(x+1)$