9 Còniques

En context (pàg. 209)

a) Resposta suggerida:

— Es pensava que la Terra era el centre de l'Univers i que els astres, incloent-hi el Sol, giraven al voltant seu.

— Nicolau Copèrnic.

— Ho va demostrar Johannes Kepler.

b) Resposta suggerida:

Els coneixements astronòmics maies eren propis de la classe sacerdotal i el poble dirigia la seva vida d'acord amb les prediccions que duien a terme. Se'n pot consultar més informació a:

http://links.edebe.com/4sp

Problemes resolts (pàgs. 223 i 224)

1. Per a trobar l'equació de la circumferència, hem de calcular el radi, que, en aquest cas, és la distància del centre C a la recta r. Podem expressar la recta r com $3x + 2y + 3 = 0$:

$$r = d(C, r) = \frac{|-18 + 2 + 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Aleshores, l'equació de la circumferència queda així:

$$(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Rightarrow (x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 13$$

2. Per a trobar l'equació de la circumferència, hem de calcular el radi, que és la distància del centre C a l'eix d'abscisses, que és la recta r: $y = 0 \Rightarrow r = d(C, r) = \dfrac{|0 + 4 + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{1}} = 4$

Aleshores, l'equació de la circumferència és la següent

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$$

3. Per a trobar l'equació de l'òrbita terrestre, hem de determinar els paràmetres a i b. Siguin P i A els vèrtexs de l'el·lipse corresponents al periheli i a l'afeli, respectivament, i F el focus on es troba el Sol. Aleshores:

$$a = (d(P, F) + d(A, F))/2 = (1\,470\,000\,000 + 153\,000\,000)/2 = 1{,}5 \cdot 10^8 \Rightarrow a^2 = 2{,}25 \cdot 10^{16}$$

$$c = a - d(P, F) = 3 \cdot 10^6 \Rightarrow c^2 = 9 \cdot 10^{12}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 2{,}2491 \cdot 10^{16}$$

Per tant, l'equació de l'òrbita terrestre és aquesta:

$$\frac{x^2}{2{,}25 \cdot 10^{16}} + \frac{y^2}{2{,}2491 \cdot 10^{16}} = 1$$

4. Sigui F el centre de la Lluna, que alhora és un focus de l'òrbita lunar. I siguin P i A els vèrtexs de l'òrbita. Aleshores, $a = (d(P, F) + d(A, F) + 2 \cdot 1075)/2 = (68 + 195 + 2 \cdot 1075)/2 = 1\,206{,}5 \Rightarrow a^2 = 1\,455\,642$; $c = a - 68 - 1\,075 = 63{,}5 \Rightarrow c^2 = 4\,032{,}25 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 1\,451\,610$.

Per tant, l'equació de l'òrbita és $\dfrac{x^2}{1\,455\,642} + \dfrac{y^2}{1\,451\,610} = 1$.

5. Les estacions de ràdio estan separades 500 milles, que són els focus de la hipèrbola; per tant, $c = 500/2 = 250$. Utilitzant la velocitat de les ones de ràdio i la diferència de temps (2640 microsegons $= 2{,}64 \cdot 10^{-3}$ segons) resulta que $2a = 186\,000 \cdot 2{,}64 \cdot 10^{-3} = 491{,}04 \Rightarrow a = 491{,}04/2 = 245{,}52$. I de la relació $c^2 = a^2 + b^2$ tenim que $b = 47{,}11$.

6. $4x^2 - 4x - 8y + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1/4 = 2y - 9/4 + 1/4 \Rightarrow (x - 1/2)^2 = 2(y - 1)$, on $x_0 = 1/2$, $y_0 = 1$, $p = 1$.

El focus de $x^2 = 2y$ és $F = (0, 1/2)$ i la seva directriu és $y = -1/2$.

Per tant, el vèrtex és $V = (1/2, 1)$, el focus $F' = (1/2, 1/2 + 1) = (1/2, 3/2)$ i la recta directriu és $y = -1/2 + 1 = 1/2$.

7. $y^2 = 4(x + 2y) \Rightarrow y^2 - 8y = 4x \Rightarrow y^2 - 8y + 16 = 4x + 16 \Rightarrow (y - 4)^2 = 4(x + 4)$, on $x_0 = -4$, $y_0 = 4$, $p = 2$.

El focus de $y^2 = 4x$ és $F = (1, 0)$ i la seva directriu és $x = -1$.

Per tant, el vèrtex és $V = (-4, 4)$, el focus $F' = (1 + (-4), 4) = (-3, 4)$ i la recta directriu és $x = -1 + (-4) = -5$.

Exercicis i problemes (pàgs. 225 a 228)

1 CIRCUMFERÈNCIA — Pàg. 225

8. El lloc geomètric dels punts que disten 10 metres del punt P és la circumferència de radi 10 i centre P. És a dir, la circumferència que té com a equació:

$$(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 100$$

9. El lloc geomètric del pla format pels punts que disten 7 unitats del punt A és la circumferència de radi 7 i centre A. És a dir, la circumferència que té com a equació:

$$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

10. Equació de la circumferència: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2 = 9$

b) $(x - 3)^2 + y^2 = 4^2 = 16$

c) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 130$, on r és la distància entre el centre i P: $r = d(C, P) = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (-6 - 5)^2} = \sqrt{130}$

11. Com que A i B són diametralment oposats, pertanyen a una circumferència on el centre, C, és el punt mitjà dels punts A i B, i el radi és la distància entre el centre i el punt A o B. Per tant:

$$C = \frac{1}{2}(A + B) = \left(\frac{1 + 5}{2}, \frac{8 - 6}{2}\right) = (3, 1)$$

$$r = d(C, A) = d(C, B) = \sqrt{(1 - 3)^2 + (8 - 1)^2} = \sqrt{53}$$

Aleshores, l'equació és $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 53$.

12. L'equació de la circumferència concèntrica ha de tenir el mateix centre que la circumferència donada. Calculem el centre (a, b):

$m = -2a \Rightarrow -4 = -2a \Rightarrow a = 2$; $n = -2b \Rightarrow 2 = -2b \Rightarrow b = -1$

Per tant, l'equació de la circumferència queda així:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2 = 4$$

13. a) Representa una circumferència, ja que defineix l'equació d'una circumferència de centre $C = (a, b) = (3, -12)$ i radi $r = \sqrt{625} = 25$

b) Aquesta equació defineix una equació de circumferència. Calculem el centre i el radi:

$$m = -2a \Rightarrow -4 = -2a \Rightarrow a = 2;\ n = -2b \Rightarrow 10 = -2b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = -5 \Rightarrow C = (2, -5);\ p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 13 = 2^2 + (-5)^2 - r^2 \Rightarrow r = 4$$

c) Aquesta equació defineix una equació de circumferència. Calculem el centre i el radi:

$$m = -2a \Rightarrow 1/2 = -2a \Rightarrow a = -1/4;\ n = -2b \Rightarrow 2 = -2b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow C = (-1/4, -1)$$
$$p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow 1/16 = (-1/4)^2 + (-1)^2 - r^2 \Rightarrow r = 1$$

d) Aquesta equació no representa una circumferència, ja que el terme $-3xy$ no pertany al model d'equació general d'una circumferència.

14. Substituïm el punt P en l'equació: $1^2 + 1^2 - 2m + 4m - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = 1$, $m = -1/2$. Calculem el centre i el radi per a aquests dos valors:

- $m = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

  $m = -2a \Rightarrow -2 = -2a \Rightarrow a = 1$; $n = -2b \Rightarrow 4 = -2b \Rightarrow b = -2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow C = (1, -2)$; $p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow -4 = 1^2 + (-2)^2 - r^2 \Rightarrow r = 3$

- $m = -1/2 \Rightarrow x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$

  $1 = -2a \Rightarrow a = -1/2$; $n = -2b \Rightarrow -2 = -2b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow C = (-1/2, 1)$

  $p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow -1 = (-1/2)^2 + 1^2 - r^2 \Rightarrow r = 1{,}5$

15. De les expressions de m, n i p obtenim:

$-4 = -2a \Rightarrow a = 2$; $-2 = -2b \Rightarrow b = 1$; $-4 = 2^2 + 1^2 - r^2 \Rightarrow r = 3$

Calculem ara les distàncies entre els punts A, B i C amb el centre de la circumferència $P = (2, 1)$ i les comparem amb el radi r:

- $d(A, P) = \sqrt{(2-5)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{18} > 3 = r \Rightarrow$ El punt A és exterior a la circumferència.
- $d(B, P) = \sqrt{(2+1)^2 + (1-1)^2} = 3 = r \Rightarrow$ El punt B pertany a la circumferència.
- $d(C, P) = \sqrt{(2-2)^2 + (1+1)^2} = 2 < 3 = r \Rightarrow$ El punt C és interior a la circumferència.

16. Calculem les distàncies entre les rectes i el centre de la circumferència i les comparem amb el radi d'aquesta.

De les expressions de m, n i p obtenim:

$$-2 = -2a \Rightarrow a = 1;\ 3 = -2b \Rightarrow b = -3/2 \Rightarrow C = (1, -3/2)$$
$$2 = 1^2 + (-3/2)^2 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{5}/2$$

a) Podem escriure la recta com $2x - y + 3 = 0$.

$$d(C, r) = \frac{|2 + 3/2 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{13/2}{\sqrt{5}} = \frac{13\sqrt{5}}{10} > \frac{\sqrt{5}}{2} = r \Rightarrow$$

La recta r és exterior a la circumferència.

b) Podem escriure la recta com $x + 4y + 5 = 0$.

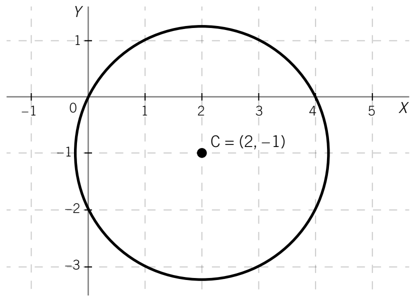
$d(C, s) = \dfrac{|1 - 6 + 5|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{17}} = 0 < \dfrac{\sqrt{5}}{2} = r \Rightarrow$ La recta s és secant a la circumferència; de fet, hi passa pel centre.

c) Podem escriure la recta com $2x + y - 3 = 0$.

$d(C, t) = \dfrac{|2 - 3/2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{5/2}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} = r \Rightarrow$ La recta t és tangent a la circumferència.

17. De les expressions de m, n i p obtenim:

$$-4 = -2a \Rightarrow a = 2;\ 2 = -2b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow C = (2, -1)$$
$$0 = 2^2 + 1^2 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{5}$$



18. El punt d'intersecció entre les rectes és:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y + 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0, y = -1 \Rightarrow C = (0, -1)$$

I l'equació de centre C i radi 5 és $x^2 + (y+1)^2 = 25$.

19. Siguin $P = (x, y)$ els punts que compleixen la condició de l'enunciat, que és:

$$d(A, P)^2 + d(B, P)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + (1-x)^2 + (1-y)^2 = 9$$
$$2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - x - y - 7/2 = 0$$
$$-1 = -2a \Rightarrow a = 1/2;\ -1 = -2b \Rightarrow b = 1/2 \Rightarrow C = (1/2, 1/2);$$
$$p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow -7/2 = (-1/2)^2 + (-1/2)^2 - r^2 \Rightarrow r = 2$$

20. De les expressions de m, n i p obtenim:

$$-6 = -2a \Rightarrow a = 3;\ -2 = -2b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow C = (3, 1)$$
$$-15 = 3^2 + 1^2 - r^2 \Rightarrow r = 5$$

a) La intersecció entre les dues circumferències té dues solucions; per tant, les circumferències es tallen en dos punts. En conseqüència, les dues circumferències són secants.

b) La intersecció entre les dues circumferències té dues solucions; per tant, les circumferències es tallen en dos punts. En conseqüència, són secants.

c) La intersecció entre les dues circumferències no té solució; per tant, les circumferències no es tallen. Calculem el centre i el radi de la circumferència:

$$-22 = -2a \Rightarrow a = 11;\ 6 = -2b \Rightarrow b = -3 \Rightarrow C' = (11, -3)$$
$$121 = 11^2 + (-3)^2 - r^2 \Rightarrow r' = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} d(C,C') = \sqrt{(11-3)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{80} \\ r+r' = 5+3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow d(C,C') > r+r'$$

Per tant, les circumferències són exteriors.

21. Sigui $P(x, y)$ el centre de la circumferència. Per tant, s'ha de complir que $d(P, A) = d(P, B) = d(P, C)$.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2} \\ \sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2} = \sqrt{(x+6)^2+(y-5)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -3, y = 1$$
$$P = (-3, 1) \Rightarrow r = d(P, A) = 5$$

Aleshores, l'equació de la circumferència de radi 5 i centre P és $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$.

22. La bisectriu del quart quadrant té com a equació $y = -x$, per tant, el centre és de la forma $C = (x, -x)$. La distància entre el centre i l'origen de coordenades és 2; és a dir:

$$d(C,O) = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+x^2} = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow C = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$$
$$m = -2a = -2\sqrt{2},\ n = -2b = 2\sqrt{2},\ p = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0$$

23. El centre està sobre la recta $x + 2y = 3$, per tant, és de la forma $C = (3 - 2y, y)$. S'ha de complir que la distància entre aquest punt i els punts A i B sigui la mateixa. Aleshores:

$$d(C, A) = d(C,B) \Rightarrow \sqrt{(3-2y-1)^2+(y-3)^2} =$$
$$= \sqrt{(3-2y-3)^2+(y-5)^2} \Rightarrow y = -3 \Rightarrow C = (9, -3)$$
$$r = d(C, A) = \sqrt{(9-1)^2+(-3-3)^2} = 10$$

24. Busquem el centre i el radi de la circumferència amb les expressions de m, n i p:

$0 = -2a \Rightarrow a = 0$; $0 = -2b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow C = (0, 0)$; $-1 = 0^2 + 0^2 - r^2 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow d(C, A) = \sqrt{(a+1)^2+(2a)^2} = \sqrt{5a^2+2a+1}$

- Si $d(C, A) < r$, el punt A és interior a la circumferència.

$$d(C, A) < r \Rightarrow \sqrt{5a^2+2a+1} < 1 \Rightarrow 5a^2 + 2a + 1 < 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5a^2 + 2a < 0 \Rightarrow a(5a + 2) < 0 \Rightarrow -2/5 < a < 0$$

- Si $d(C, A) = r$, el punt A pertany a la circumferència.

$$d(C, A) = r \Rightarrow \sqrt{5a^2+2a+1} = 1 \Rightarrow 5a^2 + 2a + 1 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(5a + 2) = 0 \Rightarrow a = -2/5,\ a = 0$$

- Si $d(C, A) > r$, el punt A és exterior a la circumferència.

$$d(C, A) > r \Rightarrow \sqrt{5a^2+2a+1} > 1 \Rightarrow 5a^2 + 2a + 1 > 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5a^2 + 2a > 0 \Rightarrow a(5a + 2) > 0 \Rightarrow a < -2/5,\ a > 0$$

25. Com que la circumferència és concèntrica a $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ han de tenir el mateix centre; el busquem:

$$-4 = -2a \Rightarrow a = 2;\ 2 = -2b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow C = (2, -1)$$

La recta s: $2x - y + 2 = 0$ és tangent a la circumferència; per això s'ha de complir que $d(C, s) = r$.

$$d(C,s) = r \Rightarrow \frac{|4+1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = r \Rightarrow r = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

Per tant, l'equació de la circumferència és:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 49/5$$

26. La circumferència circumscriu el triangle; és a dir, passa per tots els vèrtexs del triangle i, en conseqüència, es compleix $d(P, A) = d(P, B) = d(P, C)$, en què $P = (x, y)$ és el centre de la circumferència que busquem.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} \\ \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{11}{4},\ y = \frac{11}{4}$$
$$P = \left(\frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right) \Rightarrow r = d(P, A) = \frac{\sqrt{50}}{4}$$
$$\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{50}}{4}\right)^2 = \frac{50}{16}$$

27. Busquem el centre i el radi de la circumferència:

$$0 = -2a \Rightarrow a = 0;\ 0 = -2b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow C = (0, 0)$$
$$-9 = 0^2 + 0^2 - r^2 \Rightarrow r = 3$$

- La recta és tangent a la circumferència si $d(C, s) = r$.

$$d(C,s) = r \Rightarrow \frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 3 \Rightarrow |k| = 3\sqrt{5} \Rightarrow k = \pm 6{,}71$$

- La recta és exterior a la circumferència si $d(C, s) > r$.

$$d(C,s) > r \Rightarrow \frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+2^2}} > 3 \Rightarrow k > 6{,}71 \text{ i } k < -6{,}71$$

2 EL·LIPSE

Pàg. 226

28. • L'el·lipse està centrada en l'origen i $a = 5$ i $b = 4$. Per tant, l'equació de l'el·lipse queda així:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$$

- L'el·lipse està centrada en l'origen i $a = 1$ i $b = 3$. Per tant, l'equació de l'el·lipse queda així:

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

29. a) L'equació reduïda compleix que $d(P, F) + d(P, F') = 2a \Rightarrow$ $\Rightarrow 2 + 8 = 2a \Rightarrow a = 5$. De la relació $a^2 = b^2 + c^2$ i que $c = d(F, F')/2 = 6/2 = 3$ tenim que $5^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b = 4$. Per tant, l'equació reduïda de l'el·lipse és:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

b) L'excentricitat és $e = c/a \Rightarrow e = 3/5$.

$$a^2 = 25 \text{ i } b^2 = 16 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 \Rightarrow c = \pm 3$$

Després, com que els focus estan situats sobre l'eix d'abscisses, tenim que $F = (3, 0)$ i $F' = (-3, 0)$.

30. a) L'el·lipse és determinada per la seva equació reduïda amb els focus en l'eix *OX:*

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

A partir de l'equació, tenim que $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ i $b^2 = 9 \Rightarrow \Rightarrow b = 3$, per tant, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Per tant, els focus $F = (0, +4)$ i $F' = (0, -4,)$.

Els vèrtexs són $V = (0, 5)$ i $V' = (0, -5)$ i l'excentricitat és $e = c/a = 4/5$.

b) $9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow$ Com que el denominador de x^2 és més petit que el de y^2, els focus estan situats sobre l'eix $OY \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ i $b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = = 3 \Rightarrow c = \sqrt{5}$.

Per tant, els focus són $F = (0, \sqrt{5})$ i $F' = (0, -\sqrt{5})$; els vèrtexs són $V = (0, 3)$ i $V' = (0, -3)$ i l'excentricitat és $e = c/a = \sqrt{5}/3$.

c) $5x^2 + 6y^2 = 30 \Rightarrow \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{5}=1 \Rightarrow$ Com que el denominador de x^2 és més gran que el de y^2, els focus estan situats sobre l'eix $OX \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$ i $b^2 = 5 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = = 1 \Rightarrow c = \pm 1$.

Per tant, els focus són $F = (1, 0)$ i $F' = (-1, 0)$; els vèrtexs són $V = (\sqrt{6}, 0)$ i $V' = (-\sqrt{6}, 0)$ i l'excentricitat és $e = c/a = = 1/\sqrt{6} = \sqrt{6}/6$.

d) $x^2 = 4 - 2y^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \Rightarrow$ Com que el denominador de x^2 és més gran que el de y^2, els focus estan situats sobre l'eix $OX \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ i $b^2 = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 2 \Rightarrow \Rightarrow c = \sqrt{2}$.

Per tant, els focus són $F = (\sqrt{2}, 0)$ i $F' = (-\sqrt{2}, 0)$; els vèrtexs són $V = (2, 0)$ i $V' = (-2, 0)$ i l'excentricitat és $e = c/a = \sqrt{2}/2$.

31. La suma de les distàncies d'un punt qualsevol als focus és 10; per tant, es compleix que $10 = 2a \Rightarrow a = 5$. Sabem que $c = 3$. De la relació $a^2 = b^2 + c^2$ tenim que $5^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow \Rightarrow b = 4$. Aleshores, l'equació de l'el·lipse queda així:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

32. a) Sabem que $a = 5$ i $c = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Aleshores, l'equació de l'el·lipse és $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

b) La longitud de l'eix major és 6; per tant, $a = 6/2 = 3$. La longitud de l'eix menor és 4; per tant, $b = 4/2 = 2$. Aleshores, l'equació de l'el·lipse és $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

c) La longitud de l'eix major és 12; per tant, $a = 12/2 = 6$ i $c = d(F, F')/2 = 10/2 = 5$. I el valor de *b* resulta de la relació $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 6^2 = b^2 + 5^2 \Rightarrow b^2 = 11$. Per tant, l'equació de l'el·lipse és $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{11}=1$.

d) La distància focal és 8; per tant $c = 8/2 = 4$ i $b = 3$. Aleshores, de la relació $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow \Rightarrow a = 5$.

I l'equació de l'el·lipse resulta $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

e) A partir del focus, sabem que $c = 1{,}5 = 3/2$ i a partir de l'excentricitat $e = c/a \Rightarrow 0{,}8 = 4/5 = (3/2)/a \Rightarrow a = (3/2)/ /(4/5) = 15/8 \Rightarrow a^2 = 225/64$. I de la relació $a^2 = b^2 + c^2$ tenim que $b^2 = (15/8)^2 - (3/2)^2 = 81/64$. Per tant, l'equació de l'el·lipse és:

$$\frac{x^2}{225/64}+\frac{y^2}{81/64}=1 \Rightarrow \frac{64x^2}{225}+\frac{64y^2}{81}=1$$

f) El valor de *b* és 6 i, com que $e = 1/3 = c/a$ aleshores $a = 3c$. De la relació $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (3c)^2 = 6^2 + c^2 \Rightarrow c = 3\sqrt{2}/2 \Rightarrow \Rightarrow a = 9\sqrt{2}/2 \Rightarrow a^2 = 32$. Per tant, l'equació de l'el·lipse és $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

33. a) $a = d(C, V) \Rightarrow a = \sqrt{(9-4)^2 + (2-2)^2} \Rightarrow a = 5$

$c = d(C, F) \Rightarrow c = \sqrt{(7-4)^2 + (2-2)^2} \Rightarrow c = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b = 4$

$$\Rightarrow \frac{(x-c_1)^2}{a^2}+\frac{(y-c_2)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

b) La distància focal mesura 16; per tant, $c = 16/2 = 8$. L'eix major mesura 20; aleshores $a = 20/2 = 10$. De la relació fonamental $a^2 = b^2 + c^2$ tenim que $10^2 = b^2 + 8^2 \Rightarrow \Rightarrow b = 6$.

$$\Rightarrow \frac{(x-c_1)^2}{a^2}+\frac{(y-c_2)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{100}+\frac{(y-4)^2}{36}=1$$

34. a) El centre de l'el·lipse és $C = (3, -4)$. D'altra banda, i tenint en compte que el denominador de x^2 és més gran que el denominador de y^2, sabem que els focus estan en l'eix *OX*, $64 = a^2$ i $16 = b^2$, per tant, utilitzant la relació $a^2 = b^2 + c^2$ tenim que $64 = 16 + c^2 \Rightarrow c \approx 7$.

Aleshores, els focus són $F = (3 - c, -4) = (-4, -4)$ i $F' = = (3 + c, -4) = (10, -4)$.

b) El centre de l'el·lipse és $C = (2, -1)$. D'altra banda, i tenint en compte que el denominador de x^2 és més petit que el denominador de y^2, sabem que els focus estan en l'eix *OY*, $4 = a^2$ i $1 = b^2$, per tant, utilitzant la relació $a^2 = b^2 + c^2$ tenim que $4 = 1 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

Aleshores, els focus són $F = (2, -1 + c) = (2, -1 + \sqrt{3})$ i $F' = (2, -1 - c) = (2, -1 - \sqrt{3})$.

35. La distància focal és de 369 200; per tant, $c = 369\,200/2 = = 184\,600$. De la fórmula de l'excentricitat, tenim que $e = c/a \Rightarrow \Rightarrow 0{,}84 = 184\,600/a \Rightarrow a = 184\,600/0{,}84 = 219\,761{,}9048$. Per tant, la distància màxima a la qual es troba la Terra de la Lluna és $a + c = 404\,361{,}9048$ km.

36. Calculem els punts d'intersecció, *A* i *B,* entre la recta i l'el·lipse i després calculem el punt mitjà d'aquests dos punts.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-1=0 \\ x^2+2y^2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1,\, y=1 \\ x=5/3,\, y=-1/3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=(-1,1), B=\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$$P=\frac{1}{2}(A+B)=\left(\frac{-1+5/3}{2},\frac{1-1/3}{2}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

37. El punt P compleix que $d(P, F) + d(P, F') = 2a$

$$\sqrt{(-4-3)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(4-3)^2+(0-1)^2}=2a$$

$$\sqrt{50}+\sqrt{2}=2a \Rightarrow 5\sqrt{2}+\sqrt{2}=2a \Rightarrow a=3\sqrt{2}$$

$$c=d(F,F')/2=\sqrt{(4+4)^2}/2=8/2=4$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{2}\right)^2=b^2+4^2 \Rightarrow b=\sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{2}=1$$

38. Busquem la diagonal del quadrat, d, que és la distància focal de l'el·lipse. Hi apliquem el teorema de Pitàgores:

$$d^2=a^2+a^2=2a^2 \Rightarrow d=a\sqrt{2} \Rightarrow c=d/2 \Rightarrow c=a\sqrt{2}/2$$

$$\Rightarrow e=c/a \Rightarrow e=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Big/a=\sqrt{2}/2$$

39. Sigui $e = c/a$ l'excentricitat d'una el·lipse i $e' = c'/a'$ l'excentricitat de l'altra el·lipse. Com que han de ser iguals, $e = e' \Rightarrow$ $\Rightarrow c/a = c'/a'$. Com que a, b, c i a', b', c' formen dos triangles i $c/a = c'/a'$ és una relació de proporcionalitat, implica que els semieixos menors b i b' són proporcionals.

3 HIPÈRBOLA

Pàgs. 226 i 227

40. a) $a = 1$ i $b = 3$ i els focus estan col·locats en l'eix OY; per tant, la gràfica és la quarta.

b) $9x^2 - 25y^2 = 225 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a=5$ i $b = 3$. Per tant, la gràfica corresponent és la primera.

c) $a = 2$ i $b = 1$, per tant, la gràfica corresponent és la tercera.

d) $16y^2 - x^2 = 144 \Rightarrow \dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{144}=1 \Rightarrow a=3,\ b=12$ i els focus estan col·locats en l'eix OY, per tant, la gràfica és la segona.

41. a) El punt P compleix que $|d(P, F') - d(P, F)| = 2a$

$$\left|\sqrt{(8-3)^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{(8+3)^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}\right|=2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=2$$

El valor de c és 3 i de la relació $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 5$, aleshores l'equació de l'el·lipse és $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

b) Els focus estan situats en la recta $x = 3$ paral·lela a l'eix OY i, aleshores, $a = 4/2 = 2$, $c = 8/2 = 4 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 12$ i l'equació de la hipèrbola és $\dfrac{(x-3)^2}{12}-\dfrac{(y+3)^2}{4}=-1$.

c) La longitud de l'eix real és 12; per tant, $a = 12/2 = 6$. El punt P compleix que $|d(P, F') - d(P, F)| = 2a$ en què $F = (c, 0)$ i $F' = (-c, 0)$.

$$\left|\sqrt{(8+c)^2+14^2}-\sqrt{(8-c)^2+14^2}\right|=12 \Rightarrow c=12\sqrt{2}$$

$$b^2=c^2-a^2=\left(12\sqrt{2}\right)^2-6^2 \Rightarrow b^2=252$$

Per tant, l'equació de la hipèrbola és $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{252}=1$.

d) Sabem que el valor de a és 1 i que l'equació de les asímptotes és $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm 2x \Rightarrow \dfrac{b}{a}=2 \Rightarrow b=2$, per tant, l'equació de la hipèrbola és $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$.

42. a) Sabem que $a = 3$ i $c = 5 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 16$, per tant, l'equació de la hipèrbola és $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

b) Sabem que $a = 8$ i $c = 10 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 36$, per tant, l'equació de la hipèrbola és $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$.

c) Sabem que $a = 1$ i que l'equació de les asímptotes és $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm 5x \Rightarrow \dfrac{b}{a}=5 \Rightarrow b=5$; per tant, l'equació de la hipèrbola és $x^2-\dfrac{y^2}{25}=1$.

d) Sabem que $a = 6$ i que el punt P compleix que $|d(P, F') - d(P, F)| = 2a$ en què $F = (0, c)$ i $F' = (0, -c)$.

$$\left|\sqrt{(-5)^2+(9-c)^2}-\sqrt{(-5)^2+(9+c)^2}\right|=12 \Rightarrow c=2\sqrt{14}$$

$$b^2=c^2-a^2=\left(2\sqrt{14}\right)^2-6^2 \Rightarrow b^2=20$$

Per tant, l'equació de la hipèrbola és $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{20}=1$.

e) Sabem que $c = 1$ i $a = 1/2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 3/4$, per tant, l'equació de la hipèrbola és la següent:

$$\frac{y^2}{1/4}-\frac{x^2}{3/4}=1 \Rightarrow 4y^2-\frac{4x^2}{3}=1$$

f) A partir de l'equació de les asímptotes, tenim que $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{1}{2}x \Rightarrow \dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow a=2b$. El punt (5, 2) passa per la hipèrbola; per tant,

$$\frac{5^2}{a^2}-\frac{2^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1.$$

Si resolem el sistema entre les dues condicions anteriors, resulta que $a^2 = 9$ i $b^2 = 9/4$. Aleshores, l'equació de la hipèrbola és $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9/4}=1 \Rightarrow x^2-4y^2=9$.

43. a) Sabem que $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$; $c^2 = a^2 + b^2 = 20 \Rightarrow c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Per tant, els focus són $F = (2\sqrt{5}, 0)$ i $F' = (-2\sqrt{5}, 0)$; els vèrtexs són $V = (2, 0)$ i $V' = (-2, 0)$ i les asímptotes són $y=\pm\dfrac{b}{a}x \Rightarrow y=\pm\dfrac{4}{2}x \Rightarrow y=\pm 2x$.

b) $9x^2 - 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$; $c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$.

Per tant, els focus són $F = (\sqrt{13}, 0)$ i $F' = (-\sqrt{13}, 0)$; els vèrtexs són $V = (2, 0)$ i $V' = (-2, 0)$ i les asímptotes són $y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm\frac{3}{2}x$.

c) $x^2 - y^2 + 4 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = -1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 8 \Rightarrow c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ i observem que els focus estan situats sobre l'eix OY.

Per tant, els focus són $F = (0, 2\sqrt{2})$ i $F' = (0, -2\sqrt{2})$; els vèrtexs són $V = (0, 2)$ i $V' = (0, -2)$ i les asímptotes són $y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm x$.

d) $x^2 - y^2 - 8 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $b^2 = 8 \Rightarrow b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $c^2 = a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Per tant, els focus són $F = (4, 0)$ i $F' = (-4, 0)$; els vèrtexs són $V = (2\sqrt{2}, 0)$ i $V' = (-2\sqrt{2}, 0)$ i les asímptotes són $y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm x$.

44. a) Si observem la gràfica, veiem que $a = 2$ i $c = 4 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 12$ i l'equació de la hipèrbola és $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

b) Si observem la gràfica, veiem que $a = 4$, els focus estan situats sobre l'eix OY i el punt $P = (3, -5)$ compleix que $|d(P, F') - d(P, F)| = 2a$, en què $F = (0, c)$ i $F' = (0, -c)$.

$$\left|\sqrt{3^2 + (-5 - c)^2} - \sqrt{3^2 + (-5 + c)^2}\right| = 2 \cdot a = 8 \Rightarrow c = 4\sqrt{2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 4^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

Per tant, l'equació de la hipèrbola és $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$.

45. Com que és una hipèrbola equilàtera, significa que els seus semieixos són iguals, és a dir, $a = b$ i $c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2}$.

Per tant, l'equació de la hipèrbola és $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$, les asímptotes són $y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm\frac{a}{a}x = \pm x$ i l'excentricitat és $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

46. A partir dels focus, sabem que $c = 5$. La diferència de distàncies d'un punt qualsevol als focus és 8; per tant, $8 = 2a \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 9$ i l'equació de la hipèrbola resulta la següent: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

47. a) El centre de la hipèrbola és $C = (4, -1)$. Sabem que $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$; $c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$.

Aleshores, els focus són $F = (4 - c, -1) = (-1, -1)$ i $F' = (4 + c, -1) = (9, -1)$ i els vèrtexs són $V = (4 - a, -1) = (0, -1)$ i $V' = (4 + a, -1) = (8, -1)$.

b) El centre de la hipèrbola és $C = (1, 2)$. Sabem que $a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$; $b^2 = 5/4 \Rightarrow b = \sqrt{5}/2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 25/4 \Rightarrow c = 5/2$.

Aleshores, els focus són $F = (1 - c, 2) = (-3/2, 2)$ i $F' = (1 + c, 2) = (7/2, 2)$ i els vèrtexs són $V = (1 - a, 2) = (1 - \sqrt{5}, 2)$ i $V' = (1 + a, 2) = (1 + \sqrt{5}, 2)$.

4 PARÀBOLA

Pàgs. 227 i 228

48. Com que el punt P està contingut en la paràbola, substituïm aquest punt en la seva equació: $(-6)^2 = -2p(-1) \Rightarrow 36 = 2p \Rightarrow p = 18$.

49. a) En aquest cas, l'eix de simetria és l'eix OX. Per tant, $-8 = -2p \Rightarrow p = 4$ i concloem que $F = (-p/2, 0) = (-2, 0)$ i la directriu d és $x = p/2 = 4/2 \Rightarrow x = 2$.

b) En aquest cas, l'eix de simetria és l'eix OY. Per tant, $12 = 2p \Rightarrow p = 6$ i concloem que $F = (0, p/2) = (0, 3)$ i la directriu d és $y = -p/2 = -6/2 \Rightarrow y = -3$.

c) L'equació reduïda de $y = 5x^2$ és $x^2 = y/5$ i l'eix de simetria és l'eix OY. Per tant, $1/5 = 2p \Rightarrow p = 1/10$ i concloem que $F = (0, p/2) = (0, 1/20)$ i la directriu d és $y = -p/2 \Rightarrow y = -1/20$.

d) L'equació reduïda de $8x^2 + 12y = 0$ és $x^2 = -3y/2$ i l'eix de simetria és l'eix d'ordenades. Per tant, $-3/2 = -2p \Rightarrow p = 3/4$ i concloem que $F = (0, -p/2) = (0, -3/8)$ i la directriu d és $y = p/2 \Rightarrow y = 3/8$.

50. a) L'equació reduïda de $6y^2 - 12x = 0$ és $y^2 = 2x$ i l'eix de simetria és l'eix OX. Per tant, $2 = 2p \Rightarrow p = 1$ i concloem que $F = (p/2, 0) = (1/2, 0)$ i la directriu d és $x = -p/2 \Rightarrow x = -1/2$.

b) L'equació reduïda de $15x^2 = -42y$ és $x^2 = -14y/5$ i l'eix de simetria és l'eix d'ordenades. Per tant, $-14/5 = -2p \Rightarrow p = 7/5$ i concloem que $F = (0, -p/2) = (0, -7/10)$ i la directriu d és $y = p/2 \Rightarrow y = 7/10$.

51. a) El focus està situat en la meitat negativa de l'eix d'abscisses i el vèrtex en el punt (0, 0). Com que $F = (-2, 0)$ i la directriu és $x = 2$, podem deduir que $-2 = -p/2 \Rightarrow p = 4$. L'equació reduïda de la paràbola és: $y^2 = -2 \cdot 4x = -8x$.

b) El vèrtex és (0, 0) i la directriu, $y = 6$; per tant, la directriu està situada per sobre del vèrtex. Aleshores, a partir de la directriu, tenim que $p/2 = 6 \Rightarrow p = 12$. L'equació reduïda de la paràbola és: $x^2 = -2 \cdot 12y = -24y$.

c) El focus està situat en el semieix negatiu de l'eix d'ordenades. La directriu és $y = 5$; per tant, el vèrtex està situat per sobre del focus i $p/2 = 5 \Rightarrow p = 10$. L'equació reduïda de la paràbola és: $x^2 = -2 \cdot 10y = -20y$.

d) Com que l'eix de simetria és l'eix OY, la directriu és perpendicular a aquest eix; és a dir, paral·lela a l'eix OX. També passa pel punt $P = (-3, 3)$ que està en el segon quadrant; per tant, la paràbola estarà situada en els quadrants primer i segon, i la directriu estarà per sota del vèrtex. D'aquesta manera, l'equació de la paràbola és del tipus $x^2 = 2py$, en què substituïm el punt P en aquesta equació, ja que pertany a la paràbola:

$$(-3)^2 = 2p \cdot 3 \Rightarrow p = 3/2 \Rightarrow x^2 = 2 \cdot 3/2y \Rightarrow x^2 = 3y$$

52. a) Tenint en compte que el focus és a l'esquerra del vèrtex i, en conseqüència, la directriu és paral·lela a l'eix OY, $V = (5, 2) = (a, b)$ i $F = (3, 2) = (a + p/2, b)$. Per tant:

$$3 = a + p/2 \Rightarrow 3 = 5 + p/2 \Rightarrow p = -4$$

I l'equació de la paràbola és:

$$(y - 2)^2 = 2 \cdot (-4) \cdot (x - 5) \Rightarrow (y - 2)^2 = -8(x - 5)$$

b) Tenint en compte que el focus està per sobre del vèrtex i, en conseqüència, la directriu és paral·lela a l'eix OX, $V = (-2, 2) = (a, b)$ i $F = (-2, 5) = (a, b + p/2)$. Per tant:

$$5 = b + p/2 \Rightarrow 5 = 2 + p/2 \Rightarrow p = 6$$

I l'equació de la paràbola és:

$$(x + 2)^2 = 2 \cdot 6 \cdot (y - 2) \Rightarrow (x + 2)^2 = 12(y - 2)$$

c) Tenint en compte que el focus és a la dreta del vèrtex i, en conseqüència, la directriu és paral·lela a l'eix OY, $V = (1, 4) = (a, b)$ i $F = (3, 4) = (a + p/2, b)$. Per tant:

$$3 = a + p/2 \Rightarrow 3 = 1 + p/2 \Rightarrow p = 4$$

I l'equació de la paràbola és:

$$(y - 4)^2 = 2 \cdot 4 \cdot (x - 1) \Rightarrow (y - 4)^2 = 8(x - 1)$$

53. Com que la directriu és $y = 0$ i sabem que $y = b - p/2$, aleshores $0 = b - p/2$.

D'altra banda, $F = (2, 4) = (a, b + p/2)$ i, per tant, $a = 2$ i $4 = b + p/2$.

Si resolem les dues equacions anteriors amb les incògnites b i p, resulta que $b = 2$ i $p = 4$. Aleshores, l'equació de la paràbola és:

$$(x - 2)^2 = 2 \cdot 4 \cdot (y - 2) \Rightarrow (x - 2)^2 = 8(y - 2)$$

54. Tenint en compte que el focus és a l'esquerra del vèrtex i, en conseqüència, la directriu és paral·lela a l'eix OY, $V = (5, 2) = (a, b)$ i $F = (3, 2) = (a + p/2, b)$. Aleshores, l'equació de la paràbola és:

$$3 = a + p/2 \Rightarrow 3 = 5 + p/2 \Rightarrow p = -4$$

I l'equació de la paràbola és:

$$(y - 2)^2 = 2 \cdot (-4) \cdot (x - 5) \Rightarrow (y - 2)^2 = -8(x - 5)$$

55. a) $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y = 8x - 17$

Sumem 9 a cada membre de l'equació:

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 17 + 9 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 8x - 8$$

El primer membre és el quadrat d'una resta, i del segon membre traiem factor comú 8:

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 8 \Rightarrow (y - 3)^2 = 8(x - 1)$$

en què $y_0 = 3$, $x_0 = 1$ i $p = 8/2 = 4$.

Per tant, el vèrtex és $V' = (x_0, y_0) = (1, 3)$ i el focus $F' = (x_0 + p/2, y_0) = (1 + 4/2, 3) = (3, 3)$.

b) $x^2 - 8x - 6y - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x = 6y + 5$

Sumem 16 a cada membre de l'equació:

$$x^2 - 8x + 16 = 6y + 5 + 16 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 6y + 21$$

El primer membre és el quadrat d'una resta, i del segon membre traiem factor comú 6:

$$x^2 - 8x + 16 = 6y + 21 \Rightarrow (x - 4)^2 = 6(y + 7/2)$$

en què $y_0 = -7/2$, $x_0 = 4$ i $p = 6/2 = 3$.

Per tant, el vèrtex és $V' = (x_0, y_0) = (4, -7/2)$ i el focus $F' = (x_0, y_0 + p/2) = (4, -7/2 + 3/2) = (4, -2)$.

56. $y = x^2/8 - 2 \Rightarrow x^2 = 8y + 16 \Rightarrow x^2 = 8(y + 2)$

a) Els punts de tall amb l'eix OX corresponen a la solució de l'equació quan $y = 0$, per tant:

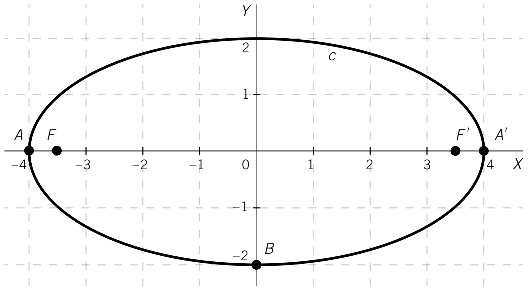
$$0 = x^2/8 - 2 \Rightarrow x = 4 \text{ i } x = -4 \Rightarrow A = (4, 0) \text{ i } B = (-4, 0)$$

Els punts de tall amb l'eix OY corresponen a la solució de l'equació quan $x = 0$, per tant:

$$y = 0/8 - 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow C = (0, -2)$$

b) Els vèrtexs que limiten l'eix major són $(-4, 0)$ i $(4, 0)$; per tant, $a = 4$. El vèrtex que limita una part de l'eix menor és $(0, -2)$; per tant, $b = 2$. D'aquesta manera, l'equació de l'el·lipse és:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 16$$



Calculem el valor de c per poder calcular l'excentricitat. De la relació $a^2 = b^2 + c^2$ resulta que:

$$c^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Finalment, calculem el valor de l'excentricitat:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

SÍNTESI

Pàg. 228

57. a) $4x^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow x^2 + \dfrac{9y^2}{4} = 9 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Observem que l'equació correspon a una el·lipse de centre $C = (0, 0)$, en què $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ i $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.

b) $16x^2 - 9y^2 = 144 \Rightarrow x^2 - \dfrac{9y^2}{16} = 9 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Observem que l'equació correspon a una *hipèrbola* de centre $C = (0, 0)$, en què $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ i $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$.

c) $9x^2 + 9y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25/9$

Observem que l'equació correspon a una *circumferència* de centre $C = (0, 0)$, en què $r^2 = 25/9 \Rightarrow r = 5/3$.

d) $y^2 = 14x$

Observem que l'equació correspon a una *paràbola* de centre $C = (0, 0)$, en què $14 = 2p \Rightarrow p = 7$. Aleshores, la directriu és d: $x = -p/2 = -7/2$.

58. a) Si $A \neq B$ i un dels dos és zero, l'equació de la cònica correspon a una *paràbola*, ja que només tindríem un terme elevat al quadrat.

b) Si $A = B$ i són diferents de zero, l'equació de la cònica correspon a una *circumferència* ja que si fossin diferents seria una el·lipse o una hipèrbola.

c) Si $A \neq B$ i tenen el mateix signe, l'equació de la cònica correspon a una *el·lipse*.

d) Si $A \neq B$ i tenen el signe diferent, l'equació de la cònica correspon a una *hipèrbola*.

59. $4x^2 + 3y^2 - 48 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 3y^2 = 48 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{3y^2}{4} = 12 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Aquesta equació correspon a una el·lipse i, com que el denominador de x^2 és més petit que el denominador de y^2, els focus estan situats en l'eix OY i $a^2 = 16$ i $b^2 = 12$. De la relació $a^2 = b^2 + c^2$ resulta que $c^2 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow c = 2$. Per tant, els focus són: $F = (0, c) = (0, 2)$ i $F' = (0, -c) = (0, -2)$.

D'altra banda, com que el centre pertany a la recta $2x - 3y + 7 = 0$, serà de la forma $C = ((3y - 7)/2, y)$.

Com que busquem l'equació d'una circumferència, la condició que s'ha de complir és que $d(C, F) = d(C, F')$.

$$\sqrt{\left(\frac{3y-7}{2}\right)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{\left(\frac{3y-7}{2}\right)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow y = 0$$

$$x = \frac{3y-7}{2} = \frac{-7}{2} \Rightarrow C = \left(\frac{-7}{2}, 0\right)$$

El radi de la circumferència és la distància entre el centre C i el punt F o $F' \Rightarrow r = d(C,F) = \sqrt{\left(\frac{-7}{2} - 0\right)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{\frac{65}{4}}$.

Per tant, l'equació de la circumferència de radi r i centre C és

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{65}{4}}\right)^2 = \frac{65}{4}.$$

60. Es tracta de resoldre els exercicis que es proposen a la pàgina web indicada en l'enunciat.

61. Busquem en primer lloc els punts d'intersecció entre les dues circumferències:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x + 10y + 17 = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x - 2y + 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1,\ y = -2;\ x = 4,\ y = -5$$

$$A = (1, -2),\ B = (4, -5)$$

Com que busquem l'equació d'una circumferència, la condició que s'ha de complir és que, si $C = (x, y)$ és el centre de la circumferència, $d(C, A) = d(C, B) = d(C, P)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} \\ \sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1, y = -7$$

$$\Rightarrow C = (-1, -7)$$

El radi de la circumferència és la distància entre el centre C i el punt $P \Rightarrow r = d(C,P) = \sqrt{(-1+3)^2 + (-7+2)^2} = \sqrt{29}$.

Per tant, l'equació de la circumferència de radi r i centre C és

$$(x+1)^2 + (y+7)^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2 = 29.$$

62. a) Suposem que el Sol és un dels focus de l'òrbita; i observem l'equació reduïda $a = 5800$ i $b = 1500$. De la relació $a^2 = b^2 + c^2$ resulta que $c^2 = 5800^2 - 1500^2 = 31390000 \Rightarrow c = 5603$. Aleshores, la distància màxima de Plutó al Sol és $a + c = 5800 + 5603 = 11403$ milions de quilòmetres i la distància mínima és $a - c = 5800 - 5603 = 197$ milions de quilòmetres.

b) Com hem calculat en l'apartat anterior, $a = 5800$ i $c = 5602{,}68$. Per tant, l'excentricitat és:

$$e = c/a = 5603 / 5800 = 0{,}97$$

63. a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

Observem que l'equació de la cònica correspon a una *circumferència*. Busquem el centre i el radi:

$$m = -2a \Rightarrow 2 = -2a \Rightarrow a = -1;\ n = -2b \Rightarrow 6 = -2b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = -3 \Rightarrow C = (-1, -3)$$

$$p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow 1 = (-1)^2 + (-3)^2 - r^2 \Rightarrow r = 3$$

b) $8x^2 - 3y^2 = 120 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{8} = 5 \Rightarrow \frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{40} = 1$

Observem que l'equació de la cònica correspon a una hipèrbola de centre $C = (0, 0)$, en què $a^2 = 15 \Rightarrow a = \sqrt{15}$ i $b^2 = 40 \Rightarrow b = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

c) $x^2 + 4y^2 = 100 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 25 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

Observem que l'equació correspon a una *el·lipse* de centre $C = (0, 0)$, en què $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ i $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$.

d) $y^2 = 36x$

Veiem que l'equació correspon a una *paràbola* de centre $C = (0, 0)$, en què $36 = 2p \Rightarrow p = 18$. Aleshores, la directriu és d: $x = -p/2 = -18/2 = -9$.

64. La condició que estableix l'enunciat es tradueix en el següent (si $P = (x, y)$ són els punts del pla que compleixen aquesta condició):

$$d(P, A) - d(P, B) = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-3)^2} - \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 1$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x^2 + (y+1)^2}\right)^2$$

$$4x^2 - 60y^2 + 120y - 45 = 0$$

Hi apliquem l'exercici 58: com que $A = 4 \neq -60 = B$ i els seus signes són diferents, tenim que l'equació correspon a una *hipèrbola*.

65. Comencem buscant els focus de l'el·lipse. A partir de l'equació, veiem que $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ i $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. De la relació $a^2 = b^2 + c^2$ resulta que $c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$. Aleshores, tenint en compte que els focus estan situats sobre l'eix OX, els focus de l'el·lipse són: $F = (c, 0) = (4, 0)$ i $F' = (-c, 0) = (-4, 0)$.

D'altra banda, la circumferència passa per aquests focus i té centre en l'origen de coordenades; aleshores, el radi és la distància entre el centre i un dels focus:

$$r = d(C,F) = \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2} = 4$$

Per tant, l'equació de la circumferència amb centre en l'origen de coordenades i radi r és $x^2 + y^2 = 4^2 = 16$.

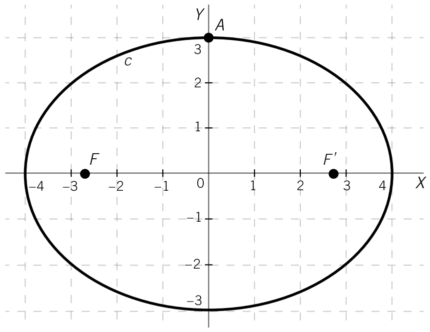
Finalment, calculem els punts d'intersecció entre la circumferència i l'el·lipse:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \pm\frac{5\sqrt{7}}{4},\ y = \pm\frac{9}{4}$$

$$P = \left(\pm\frac{5\sqrt{7}}{4}, \pm\frac{9}{4}\right)$$

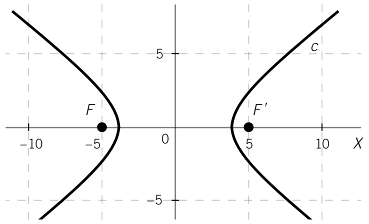
66. a) $C_1: 9x^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow x^2 + \dfrac{16y^2}{9} = 16 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Observem que l'equació correspon a una *el·lipse* de centre $C = (0, 0)$, en què $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ i $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. De la relació $a^2 = b^2 + c^2$ resulta que $c^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow$ $\Rightarrow c = \sqrt{7}$.



C_2: $9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow x^2 - \dfrac{16y^2}{9} = 16 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Observem que l'equació correspon a una *hipèrbola* de centre $C = (0, 0)$, en què $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ i $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. De la relació $c^2 = a^2 + b^2$ resulta que $c^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$.



b) Els vèrtexs de l'el·lipse C_1 són $V_1 = (a, 0) = (4, 0)$, $V_2 = (-a, 0) = (-4, 0)$, $V_3 = (0, b) = (0, 3)$ i $V_4 = (0, -b) = (0, -3)$. Com que la paràbola passa per tres d'aquests vèrtexs i és oberta cap a la dreta, els vèrtexs pels quals passarà són V_2, V_3 i V_4 i el vèrtex de la paràbola serà V_2. Aleshores, l'equació de la paràbola serà de la forma:

$$y^2 = 2p(x + 4)$$

Com que els punts V_3 i V_4 formen part d'aquesta paràbola, podem substituir un dels dos en l'equació i així obtenir el valor de $p \Rightarrow 3^2 = 2p(0 + 4) \Rightarrow p = 9/8$. Per tant, l'equació de la paràbola és:

$$y^2 = 2p(x + 4) \Rightarrow y^2 = 2 \cdot 9/8 \cdot (x + 4) \Rightarrow y^2 = 9/4(x + 4)$$

Avaluació (pàg. 230)

1. a) Trobem el radi de la circumferència, en què $r = d(C, P)$.

$$\Rightarrow r = d(C, P) = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{50}$$

Aleshores, l'equació de centre C i radi r és:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 50$$

b) El radi de la circumferència és la distància entre els punts M i N dividida entre dos. És a dir:

$$r = \frac{d(M, N)}{2} = \frac{\sqrt{(-3-3)^2 + (-3-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2} = 3\sqrt{2}$$

El centre de la circumferència és el punt mitjà entre els punts M i N:

$$C = \frac{1}{2}(M + N) = \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = (0, 0)$$

I resulta que l'equació de centre C i radi r és:

$$x^2 + y^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 18$$

c) El radi de la circumferència és la distància entre els punts P i Q dividida entre dos. És a dir:

$$r = \frac{d(P, Q)}{2} = \frac{\sqrt{(-6-2)^2 + (6-0)^2}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

El centre de la circumferència és el punt mitjà entre els punts P i Q:

$$C = \frac{1}{2}(P + Q) = \left(\frac{-6+2}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (-2, 3)$$

I resulta que l'equació de centre C i radi r és:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

d) Calculem el punt d'intersecció entre les rectes:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 10 \\ x - 8y &= 26 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 10, y = -2 \Rightarrow C = (10, -2)$$

Per tant, l'equació de centre C i radi 2 és:

$$(x-10)^2 + (y+2)^2 = 2^2 \Rightarrow (x-10)^2 + (y+2)^2 = 4$$

2. El centre és a la recta $x + 2y = 0$; aleshores, serà de la forma $C = (-2y, y)$. Com que la circumferència passa pels punts P i Q, s'ha de complir que $d(C, P) = d(C, Q)$.

$$\sqrt{(-2y-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(-2y-0)^2 + (y-1)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow C = (4, -2)$$

El radi és la distància entre el centre C i els punts P o Q.

$$r = d(C, P) = \sqrt{(4-4)^2 + (-2-3)^2} = 5$$

I l'equació de la circumferència de radi 5 i centre C és:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 5^2 \Rightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$$

3. Com que la circumferència que busquem és concèntrica a la circumferència $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 17 = 0$, tindrà el mateix centre que aquesta. El busquem:

$$2 = -2a \Rightarrow a = -1;\ 10 = -2b \Rightarrow b = -5 \Rightarrow C = (-1, -5)$$

I l'equació de la circumferència de centre C i radi 4 és:

$$(x+1)^2 + (y+5)^2 = 4^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+5)^2 = 16$$

4. Calculem les distàncies entre les rectes i el centre de les circumferències, i les comparem amb el radi d'aquestes.

a) De les expressions de m, n i p obtenim:

$$-4 = -2a \Rightarrow a = 2;\ 0 = -2b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow C = (2, 0)$$
$$-1 = 2^2 + 0^2 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{5}$$
$$d(C, r) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0 < \sqrt{5} = r \Rightarrow$$

La recta r és secant a la circumferència.

b) De les expressions de m, n i p obtenim:

$$-2 = -2a \Rightarrow a = 1;\ 3 = -2b \Rightarrow b = -3/2 \Rightarrow C = (1, -3/2)$$
$$2 = 1^2 + (-3/2)^2 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{5}/2$$

$d(C, r) = \dfrac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3/2) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{5/2}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} = r \Rightarrow$ La recta r és tangent a la circumferència.

5. a) Aquesta el·lipse està centrada en el punt $C = (1, 3)$ i, com que el denominador de x^2 és més petit que el de y^2, els focus estan situats sobre la recta $x = 1 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ i $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$.

Per tant, els focus són $F = (1, \sqrt{5})$ i $F' = (1, -\sqrt{5})$; els vèrtexs són $A = (1, 3)$, $A' = (1, -3)$, $B = (2, 3)$ i $B' = (-2, 3)$ i l'excentricitat és $e = c/a = \sqrt{5}/3$.

b) $2x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow$ Com que el denominador de x^2 és més petit que el de y^2, els focus estan situats sobre l'eix $OY \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ i $b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$.

Per tant, els focus són $F = (0, \sqrt{2})$ i $F' = (0, -\sqrt{2})$; els vèrtexs són $A = (0, 2)$, $A' = (0, -2)$, $B = (\sqrt{2}, 0)$ i $B' = (-\sqrt{2}, 0)$ i l'excentricitat és $e = c/a = \sqrt{2}/2$.

6. a) El valor de c és la distància entre el centre i el focus.

$$c = d(C, F) = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (0 - 0)^2} = 5$$

A partir de l'excentricitat, tenim que:

$$e = c/a \Rightarrow 5/4 = 5/a \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16.$$

De la relació $c^2 = a^2 + b^2$ tenim que $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$. I l'equació de la hipèrbola és $\dfrac{(x+3)^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

b) La hipèrbola està centrada en el punt mitjà dels dos vèrtexs:

$$C = \frac{1}{2}(A + A') = \left(\frac{6-2}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (2, 2)$$

La distància focal és 10; aleshores, $10 = 2c \Rightarrow c = 5$.

D'altra banda, el valor de a correspon a la condició següent: $2a = d(A, A')$.

$$2a = \sqrt{(6+2)^2 + (2-2)^2} \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

I de la relació $c^2 = a^2 + b^2$ tenim que $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$. Per tant, l'equació de la hipèrbola resulta la següent: $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

7. Si observem l'equació de la hipèrbola, veiem que el centre és $C = (1, 3)$; $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ i $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$. De la relació $c^2 = a^2 + b^2$ tenim que $c^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$.

Per tant, els focus són $F = (1 + c, 3) = (1 + \sqrt{13}, 3)$ i $F' = (1 - \sqrt{13}, 3)$. Els vèrtexs són $A = (1 + a, 3) = (1 + 3, 3) = (4, 3)$ i $A' = (1 - a, 3) = (-2, 3)$.

Finalment, calculem l'excentricitat: $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{13}/3$

8. a) El vèrtex és $(2, -2) = (a, b)$ i la directriu $y = -5$, per tant, la directriu està situada per sota del vèrtex. Aleshores, a partir de la directriu, tenim que $y = b - p/2 \Rightarrow -5 = -2 - p/2 \Rightarrow p = 6$. L'equació reduïda de la paràbola és:

$$(x - 2)^2 = 2 \cdot 6 \cdot (y + 2) \Rightarrow (x - 2)^2 = 12(y + 2)$$

b) Tenint en compte que el focus és a la dreta del vèrtex i, en conseqüència, la directriu és paral·lela a l'eix OY, $V = (2, 1) = (a, b)$ i $F = (6, 1) = (a + p/2, b)$. Per tant:

$$6 = a + p/2 \Rightarrow 6 = 2 + p/2 \Rightarrow p = 8$$

I l'equació de la paràbola és:

$$(y - 1)^2 = 2 \cdot 8 \cdot (x - 2) \Rightarrow (y - 1)^2 = 16(x - 2)$$

9. Calculem els punts d'intersecció entre la paràbola i la hipèrbola resolent el sistema que formen les seves equacions:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 16{,}94;\ y = -12{,}35 \\ x = 16{,}94;\ y = 12{,}35 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = (16{,}94; -12{,}35) \\ B = (16{,}94; 12{,}35) \end{array}\right\}$$

10. a) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0 \Rightarrow$ Com que $A = 9 \neq 4 = B$ i tenen el mateix signe, aleshores la cònica correspon a una el·lipse.

$$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Si observem l'equació, veiem que el centre és $C = (0, 0)$ i, com que el denominador de x^2 és més petit que el de y^2, tenim que $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$. Finalment, de la relació $a^2 = b^2 + c^2$ resulta que $c^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$.

b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0 \Rightarrow$ Aquesta equació correspon a una *circumferència*, ja que, si desenvolupem l'equació, $A = 1 = B$ i tenen el mateix signe.

En calculem els elements característics, que són el radi i el centre. Si observem l'equació, veiem que el centre és $C = (2, 3)$ i el radi és $r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$.

c) $y = 3x^2 \Rightarrow$ Com que $A = 3$ i $B = 0$, aleshores l'equació correspon a una *paràbola*.

$y = 3x^2 \Rightarrow x^2 = y/3 \Rightarrow$ Si observem l'equació, veiem que el centre és $C = (0, 0)$, en què $1/3 = 2p \Rightarrow p = 1/6$. Aleshores, la directriu és d: $y = -p/2 = -1/18$.

11. a) Com que el vèrtex és $V = (11, 121/24)$, l'altura és de 121/24 metres.

b) La pilota tocarà el terra quan y sigui 0.

$$(x-11)^2 = -24\left(y-\frac{121}{24}\right) = 121 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 22 \end{cases}$$

c) Com que la porteria és a 20 metres del jugador, substituïm aquest valor per x en l'equació de la paràbola per trobar el valor de l'altura a la qual es troba la pilota.

$(20-11)^2 = -24(y - 121/24) \Rightarrow y = 5/3 = 1{,}67$ metres

Aleshores, la pilota entrarà a la porteria, ja que $1{,}67 < 2{,}40$.

Zona + (pàg. 231)

— **La papiroflèxia i les còniques**

- Resposta suggerida:

Hipèrbola:

http://links.edebe.com/u29nas

El·lipse (mètode del jardiner):

— **Mark Twain i el cometa Halley**

- Calculem en primer lloc la semidistància focal, c, a partir de l'excentricitat, e, i el semieix major, a:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = e \cdot a = 0{,}967\,990 \cdot 17{,}857\,619 = $$
$$= 17{,}285\,997 \text{ UA}$$

Ara, apliquem el teorema de Pitàgores per obtenir el semieix menor $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4{,}482\,060 \text{ UA} \Rightarrow b = 6{,}71 \cdot 10^8$ km en què 1 UA = 149 597 870,7 km.

— **Antenes parabòliques**

- Resposta suggerida:

Els cables dels ponts penjants tenen forma parabòlica; els telescopis, els detectors de radar i els reflectors lluminosos són parabòlics; alguns marcs fotogràfics tenen forma el·líptica.

— **Ovals, ovoides i el·lipses**

- Resposta suggerida:

Oval: corba tancada i plana formada per quatre arcs de circumferència tangents entre si i iguals dos a dos.

Ovoide: corba tancada i plana formada per quatre arcs de circumferència tangents entre si, dos d'iguals i dos de desiguals.

Es poden relacionar amb una el·lipse.

- Resposta suggerida:

Coincideixen que són corbes tancades i planes formades per arcs de circumferència tangents entre si. Es diferencien en el fet que l'oval està compost per un nombre parell d'arcs de circumferència enllaçats entre si i simètrics respecte als seus eixos major i menor normals entre si; i l'ovoide està compost per dos arcs del mateix radi, i dos més de radi diferent, i té un eix de simetria que conté els centres dels arcs desiguals.