8 # ELEMENTS DEL PLA

En context (pàg. 185)

a) Resposta oberta a manera de reflexió individual que pot servir d'introducció als elements del pla.

b) Respostes suggerides:

— El camí més curt no és sempre el més ràpid, ja que no depèn només de la longitud del camí sinó també de la velocitat de la partícula.

— Significa que totes les trajectòries de la corba tenen la mateixa durada, independentment del punt de la corba on comencin.

— El temps que emprarà una partícula a lliscar fins a arribar a la posició d'equilibri estable és independent de la posició inicial de la partícula sobre la trajectòria cicloidal.

Problemes resolts (pàgs. 198 i 199)

1. La recta AC és la perpendicular a la recta r, per tant, passa per A i té vector director $\vec{n} = (3, 11) \Rightarrow -11x + 3y = 0$. El punt mitjà de A i C és la intersecció entre r i AC:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 11y = -65 \\ -11x + 3y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{11}{2} \Rightarrow M = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+11}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right) \Rightarrow C = (0, 0)$$

La recta s és l'altura respecte del costat AC des del vèrtex B, ja que és paral·lela a la recta r. Com que B pertany a aquesta recta, $B = (t, (-3t + 37)/11)$. Ara imposem la condició que l'àrea del triangle és de 40,5 u^2:

$$\frac{d(A,C)d(B,AC)}{2} = 40{,}5 \Rightarrow \sqrt{130}\,\frac{\left|-11t + 3\cdot\left(\frac{-3t+37}{11}\right)\right|}{\sqrt{130}} = 81$$

$$t = -6 \Rightarrow x = -6, y = 5 \Rightarrow B = (-6, 5)$$

La recta BC passa per B i té com a vector director $\overrightarrow{BC} = (6, -5) \Rightarrow 5x + 6y = 0$ i la recta AB passa per A i té com a vector director $\overrightarrow{AB} = (-9, -6) \Rightarrow -2x + 3y - 27 = 0$.

2. El costat BC està sobre l'eix d'abscisses; per tant, $B = (b, 0)$ i $C = (c, 0)$ i la recta BC és la recta $y = 0$. La recta $x = -1$ és l'altura sobre el costat BC ja que és perpendicular a la recta $y = 0$, per tant $A = (-1, a)$. Ara, busquem el punt mitjà del costat AC de dues maneres diferents i igualem els resultats. La recta perpendicular a r que passa per A i que té vector director $n = (2, -3)$ és la recta AC: $3x + 2y - 2a + 3 = 0$.

$$M = AC \cap r = \begin{cases} 3x + 2y - 2a + 3 = 0 \\ 2x - 3y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \left(\frac{6a - 23}{13}, \frac{4a + 15}{13}\right)$$

$$M = \frac{1}{2}(A + C) = \left(\frac{-1+c}{2}, \frac{a}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6a-23}{13} = \dfrac{-1+c}{2} \\ \dfrac{4a+15}{13} = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = 6 \end{cases}$$

$$A = (-1, 6), B = (3, 0), AC: 3x + 2y - 9 = 0$$

El valor de b per al vèrtex B pot ser qualsevol valor, ja que no li podem imposar cap condició; només que B pertany a la recta $y = 0$, per tant $B = (b, 0)$ i la recta AB és de la forma $6x + (b - 1)y - 6b = 0$.

3. Hem de trobar dues altures i que es tallin.

- L'altura sobre el costat AC passa per B i té com a vector director un vector normal de la recta AC; és a dir,

$$\vec{n} = (6, 10) \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y-6}{10} \Rightarrow 5x - 3y + 18 = 0$$

- L'altura sobre el costat BC passa per A i té com a vector director un vector normal de la recta BC; és a dir,

$$\vec{n} = (10, 6) \Rightarrow \frac{x+4}{10} = \frac{y-2}{6} \Rightarrow 3x - 5y + 22 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 3y + 18 = 0 \\ 3x - 5y + 22 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -3/2, y = 7/2 \Rightarrow O = \left(\frac{-3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

4. Sigui $P(x, y)$ un punt qualsevol del pla. La condició que resulta de l'enunciat és la següent: $d(P, A)^2 + d(P, B)^2 = 10$

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2 + (y-5)^2}\right)^2 = 10$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$$

5. Sabem que el tercer vèrtex és en l'eix OX; per tant, serà d'aquesta forma: $C = (c, 0)$. Ara, calculem la base i l'altura del triangle:

- Base $\rightarrow d(B,C) = \sqrt{(c - (-3))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{c^2 + 6c + 13}$
- Altura $\rightarrow$

$$d(A, BC) = \frac{|2 \cdot 1 + (-c - 3) \cdot 2 - 2c|}{\sqrt{2^2 + (-(c+3))^2}} = \frac{|-4 - 4c|}{\sqrt{c^2 + 6c + 13}}$$

$$A = \frac{ba}{2} \Rightarrow 10 = \frac{\sqrt{c^2 + 6c + 13}\,\dfrac{|-4 - 4c|}{\sqrt{c^2 + 6c + 13}}}{2}$$

$$20 = |-4 - 4c|$$

$$\begin{cases} 20 = -4 - 4c \\ 20 = 4 + 4c \end{cases} \Rightarrow c = -6 \text{ o } c = 4 \Rightarrow C = (-6, 0) \text{ o } C = (4, 0)$$

Exercicis i problemes (pàgs. 200 a 204)

1 EQUACIONS DE LA RECTA Pàgs. 200 i 201

6. a) $\frac{x-0}{2}=\frac{y-(-3)}{3} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}$

b) La recta passa pel punt B i té com a vector director:

$$\overrightarrow{BA}=(4,-2)=2\cdot(2,-1) \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=1+2k \\ y=1-k \end{matrix}\right\}, k\in\mathbb{R}$$

7.
- Vectorial: $(x, y) = (0, -1) + k(-1, 2), k \in \mathbb{R}$
- Paramètrica: $\left.\begin{matrix} x=-k \\ y=-1+2k \end{matrix}\right\}, k\in\mathbb{R}$
- Contínua: $\frac{x-0}{-1}=\frac{y-(-1)}{2} \Rightarrow \frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}$
- General: $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2} \Rightarrow 2x+y+1=0$
- Explícita: $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2} \Rightarrow 2x+y+1=0 \Rightarrow y=-2x-1$
- Punt-pendent:

$$m=\frac{2}{-1}=-2 \Rightarrow y+1=-2(x-0)=-2x$$

- Canònica: $\left.\begin{matrix} x=0 \Rightarrow y=-1 \\ y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x}{-1/2}+\frac{y}{-1}=1$

8. a) Equació paramètrica $\Rightarrow P=(-3,0),\ \vec{u}=(2,-1)$

b) Equació contínua $\Rightarrow P=(2,-1),\ \vec{u}=(3,4)$

c) $x=2 \Rightarrow P=(2,0),\ \vec{u}=(-B,A)=(0,1)$

d) $x=0 \Rightarrow y=1/7 \Rightarrow P=(0,1/7),\ \vec{u}=(-B,A)=(-7,-2)$

e) Equació punt-pendent $\Rightarrow P=(-10,2),\ \vec{u}=(-1,8)$ ja que el pendent és $m=-8=8/-1$.

9. a) P i Q pertanyen a una equació canònica $\Rightarrow \frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1.$

b) L'equació de la recta passa pel punt P i el seu vector director és

$$\overrightarrow{PQ}=(-4,-6) \Rightarrow \frac{x-5}{-4}=\frac{y-2}{-6} \Rightarrow 3x-2y-11=0$$

10. Calculem les diagonals:

- Diagonal AC: Passa pel punt A i té com a vector director $\overrightarrow{AC}=(7,1) \Rightarrow \frac{x+3}{7}=\frac{y-3}{1} \Rightarrow -x+7y=24$.
- Diagonal AD: Passa pel punt A i té com a vector director $\overrightarrow{AD}=(5,-3) \Rightarrow \frac{x+3}{5}=\frac{y-3}{-3} \Rightarrow 3x+5y=6$.
- Diagonal BD: Passa pel punt B i té com a vector director $\overrightarrow{BD}=(2,-6) \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y-6}{-6} \Rightarrow -3x-y=-6$.
- Diagonal BE: Passa pel punt B i té com a vector director $\overrightarrow{BE}=(-2,-6) \Rightarrow \frac{x}{-2}=\frac{y-6}{-6} \Rightarrow -3x+y=6$.
- Diagonal CE: Passa pel punt C i té com a vector director $\overrightarrow{CE}=(-6,-4) \Rightarrow \frac{x-4}{-6}=\frac{y-4}{-4} \Rightarrow -2x+3y=4$.

11. La recta passa per A i té com a vector director un vector normal de la recta s, és a dir,

$$\vec{n}=(2,3) \Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x-2y+3=0$$

Aleshores,

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{3}{2},\ y=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \frac{x}{-1}+\frac{y}{3/2}=1$$

12. a) La recta OX és la recta $y=0 \Rightarrow P=(2,0),\ \vec{u}_{OX}=(1,0)$.

La recta OY és la recta $x=0 \Rightarrow P=(0,2),\ \vec{v}_{OY}=(0,1)$.

b) La bisectriu $B13$ és $x=y \Rightarrow P=(1,1), \vec{w}_{B13}=(-B,A)=(1,1)$.

La bisectriu $B24$ és $x=-y \Rightarrow P(1,1), \vec{z}_{B24}=(-B,A)=(-1,1)$.

13.
- Costat AB: Passa pel punt A i té com a vector director

$$\overrightarrow{AB}=(6,2) \Rightarrow \frac{x+2}{6}=\frac{y-3}{2} \Rightarrow x-3y+11=0$$

- Costat AC: Passa pel punt A i té com a vector director

$$\overrightarrow{AC}=(6,-5) \Rightarrow \frac{x+2}{6}=\frac{y-3}{-5} \Rightarrow 5x+6y-8=0$$

- Costat BC: Passa pel punt B i té com a vector director $\overrightarrow{BC}=(0,-7)$. Per tant, la recta BC és $x=4$.
- La mediana AM_1, en què $M_1=\left(\frac{4+4}{2},\frac{5-2}{2}\right)=(4,3/2)$ és el punt mitjà del costat BC, passa per A i el seu vector director és $\overrightarrow{AM_1}=(6,-3/2) \Rightarrow \frac{x+2}{6}=\frac{y-3}{-3/2} \Rightarrow x+4y-10=0.$
- La mediana BM_2, en què $M_2=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{3-2}{2}\right)=(1,1/2)$ és el punt mitjà del costat AC, passa per B i el seu vector director és $\overrightarrow{BM_2}=(-3,-9/2) \Rightarrow \frac{x-4}{-3}=\frac{y-5}{-9/2} \Rightarrow 3x-2y-2=0$
- La mediana CM_3, en què $M_3=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{3+5}{2}\right)=(1,4)$ és el punt mitjà del costat AB, passa per C i el seu vector director és $\overrightarrow{CM_3}=(-3,6) \Rightarrow \frac{x-4}{-3}=\frac{y+2}{6} \Rightarrow -2x-y+6=0.$

14. a) La recta a passa pels punts $A = (-8, 0)$ i $B = (0, 4)$ i el seu vector director és

$$\overrightarrow{AB}=(8,4) \Rightarrow a:\frac{x+8}{8}=\frac{y}{4} \Rightarrow -x+2y=8$$

b) La recta b passa pels punts $A = (-3, 0)$ i $B = (0, -4)$ i el seu vector director és:

$$\overrightarrow{AB} = (3,-4) \Rightarrow b: \frac{x+3}{3} = \frac{y}{-4} \Rightarrow -4x - 3y = 12$$

c) La recta c és $y = 11$, que és paral·lela a l'eix X.

d) La recta d és $x = 7$, que és paral·lela a l'eix Y.

e) La recta e passa pels punts $A = (0, 0)$ i $B = (7; 7,5)$ i el seu vector director és:

$$\overrightarrow{AB} = (7, 7,5) \Rightarrow e: \frac{x}{7} = \frac{y}{7,5} \Rightarrow -7,5x + 7y = 0$$

f) La recta f passa per $A = (-18, 0)$ i $B = (0, 7)$ i el seu vector director és:

$$\overrightarrow{AB} = (18, 7) \Rightarrow f: \frac{x+18}{18} = \frac{y}{7} \Rightarrow 7x - 18y = -126$$

15. Sigui $y - 4 = m(x + 3)$ la recta que passa pel punt A. Com que la recta talla els eixos de coordenades, tenim que:

$$x = 0 \Rightarrow y = 3m + 4 \Rightarrow B = (0, 3m + 4)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-4-3m}{m} \Rightarrow C = \left(\frac{-4-3m}{m}, 0\right)$$

$$d(B,O) = d(C,O) \Rightarrow \sqrt{(3m+4)^2} = \sqrt{\left(\frac{-4-3m}{m}\right)^2}$$

$$\begin{cases} 3m + 4 = \dfrac{-4-3m}{m} \\ -3m - 4 = \dfrac{-4-3m}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m^2 + 7m + 4 = 0 \\ 3m^2 + m - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1, m = -4/3 \\ m = 1, m = -4/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 4 = -1(x+3) \\ y - 4 = 1(x+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Nota: No considerem el valor $m = -4/3$ ja que el resultat és una recta que talla en l'origen de coordenades i, aleshores, la distància a cada punt de tall seria zero.

16.
- La recta AB és $y = 11$, que és paral·lela a l'eix X.
- La recta BC passa pel punt B i té com a vector director $\overrightarrow{BC} = (-4,-4) \Rightarrow \dfrac{x-8}{-4} = \dfrac{y-11}{-4} \Rightarrow x - y + 3 = 0$.
- La recta CD és $y = 7$, que és paral·lela a l'eix X.
- La recta DE passa pel punt D i té com a vector director $\overrightarrow{DE} = (-2,-3) \Rightarrow \dfrac{x-7}{-2} = \dfrac{y-7}{-3} \Rightarrow 3x - 2y - 7 = 0$.
- La recta EJ passa pel punt E i té com a vector director $\overrightarrow{EJ} = (3,1) \Rightarrow \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-4}{1} \Rightarrow -x + 3y - 7 = 0$.
- La recta EF passa pel punt E i té com a vector director $\overrightarrow{EF} = (6,-3) \Rightarrow \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y-4}{-3} \Rightarrow x + 2y - 13 = 0$.
- La recta FG passa pel punt F i té com a vector director $\overrightarrow{FG} = (-2,-4) \Rightarrow \dfrac{x-11}{-2} = \dfrac{y-1}{-4} \Rightarrow 2x - y - 21 = 0$.
- La recta AH passa pel punt A i té com a vector director $\overrightarrow{AH} = (-2,-3) \Rightarrow \dfrac{x-14}{-2} = \dfrac{y-11}{-3} \Rightarrow 3x - 2y - 20 = 0$.
- La recta HI passa pel punt H i té com a vector director $\overrightarrow{HI} = (1,-11) \Rightarrow \dfrac{x-12}{1} = \dfrac{y-8}{-11} \Rightarrow 11x + y - 140 = 0$.
- La recta KL passa pel punt K i té com a vector director $\overrightarrow{KL} = (1,-1) \Rightarrow \dfrac{x-8}{1} = \dfrac{y-10}{-1} \Rightarrow x + y - 18 = 0$.
- La recta LM és $y = 9$, que és paral·lela a l'eix X.

17. Sigui $y - 2 = m(x - 2)$ la recta que passa pel punt P. Com que la recta talla amb els semieixos positius, tenim que:

$$x = 0 \Rightarrow y = -2m + 2 \Rightarrow A = (0, -2m + 2)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-2+2m}{m} \Rightarrow B = \left(\frac{-2+2m}{m}, 0\right)$$

Imposem la condició de l'enunciat:

$$\frac{d(O,A) \cdot d(O,B)}{2} = 9 \Rightarrow \sqrt{(-2m+2)^2}\sqrt{\left(\frac{-2+2m}{m}\right)^2} = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2m + 2 = \frac{-2+2m}{m} \Rightarrow 4m^2 + 10m + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = -2, m_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1: y - 2 = -2(x-2) \Rightarrow 2x + y = 6 \\ m_2: y - 2 = -1/2\,(x-2) \Rightarrow x + 2y = 6 \end{cases}$$

18. Calculem les rectes r i s:

- La recta r passa per A i el seu vector director és el de la recta BC $\overrightarrow{BC} = (-10,-10) \Rightarrow \dfrac{x+3}{-10} = \dfrac{y-6}{-10} \Rightarrow x - y + 9 = 0$.
- La recta s passa per B i té com a vector director un vector normal de r:

$$\vec{n} = (1,-1) \Rightarrow \frac{x-13}{1} = \frac{y-8}{-1} \Rightarrow x + y - 21 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x - y + 9 = 0 \\ x + y - 21 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 6, y = 15 \Rightarrow D = (6, 15)$$

19. Per a saber si és possible unir els punts de reg en una línia recta, s'ha de comprovar si els punts A, B i C estan alineats. És a dir, si es compleix que:

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - b_2} \Rightarrow \frac{5-2}{6,5-5} = \frac{-1-3}{-3-(-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{1,5} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow 2 = 2$$

Per tant, és possible unir els tres punts en una línia recta.

20. Siguin $C = (x, y)$ i $D = (m, n)$ els punts de divisió.

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{1}{3}(6,2) = (x-9, y-1) \Rightarrow \begin{cases} 2 = x - 9 \\ \dfrac{2}{3} = y - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 5/3 \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \frac{2}{3}(6,2) = (m-9, n-1) \Rightarrow \begin{cases} 4 = m - 9 \\ \dfrac{4}{3} = n - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 7/3 \end{cases}$$

$$C = \left(11, \frac{5}{3}\right),\ D = \left(13, \frac{7}{3}\right)$$

21. Calculem els vèrtexs del rombe:

- $A = \{-x + 2y - 16 = 0\} \cap \{3x + 4y - 52 = 0\} \Rightarrow A = (4,10)$
- La recta perpendicular a l'equació de la diagonal és una altra de les diagonals del rombe. Aquesta recta passa per Q i té vector director:

$$\vec{n} = (3,4) \Rightarrow \frac{x-8}{3} = \frac{y-7}{4} \Rightarrow 4x - 3y - 11 = 0$$

$$B = \{-x + 2y - 16 = 0\} \cap \{4x - 3y - 11 = 0\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B = (14,15)$$

- Q és el punt mitjà del segment AC; per tant:

$$Q = (8,7) = \left(\frac{4+c_1}{2}, \frac{10+c_2}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{4+c_1}{2} = 8 \\ \frac{10+c_2}{2} = 7 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = (12,4)$$

- Q és el punt mitjà del segment BD; aleshores:

$$Q = (8,7) = \left(\frac{14+d_1}{2}, \frac{15+d_2}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{14+d_1}{2} = 8 \\ \frac{15+d_2}{2} = 7 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D = (2,-1)$$

22. Calculem els vèrtexs del triangle:

- M_A és el punt mitjà entre B i C; aleshores:

$$M_A = 1/2(B + C) = (3,7) \Rightarrow b_1 + c_1 = 6, b_2 + c_2 = 14$$

- M_B és el punt mitjà entre A i C; per tant:

$$M_B = 1/2(A + C) = (12,10) \Rightarrow a_1 + c_1 = 24, a_2 + c_2 = 20$$

- M_C és el punt mitjà entre A i B; per tant:

$$M_C = 1/2(A + B) = (7,-3) \Rightarrow a_1 + b_1 = 14, a_2 + b_2 = -6$$

Resolent aquest sistema d'equacions resulta:

$$a_1 = 16, b_1 = -2, c_1 = 8, a_2 = 0, b_2 = -6, c_2 = 20$$
$$\Rightarrow A = (16,0), B = (-2,-6), C = (8,20)$$

Calculem les equacions dels costats del triangle:

- La recta r passa per M_A i té com a vector director

$$\overrightarrow{M_AC} = (5,13) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 7 + 13t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- La recta p passa per M_B i té com a vector director

$$\overrightarrow{M_BA} = (4,-10) = 2(2,-5) \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + 2t \\ y = 10 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- La recta s passa per M_C i té com a vector director

$$\overrightarrow{M_CB} = (-9,-3) = -3(3,1) \Rightarrow \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = -3 + 1t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

23. Sigui r: $y - 2 = mx$ la recta que passa pel punt A i siguin B i C els punts de tall de r amb les altres dues rectes. Aleshores:

$$B = r \cap \{5x - y + 16 = 0\} \Rightarrow B = \left(\frac{14}{m-5}, \frac{2(8m-5)}{m-5}\right)$$

$$C = r \cap \{-x + 3y = -8\} \Rightarrow C = \left(\frac{-14}{3m-1}, \frac{-2(4m+1)}{3m-1}\right)$$

Imposem que A sigui el punt mitjà del segment BC.

$$A = \left(\frac{\left(\frac{14}{m-5} + \frac{-14}{3m-1}\right)}{2}, \frac{\left(\frac{2(8m-5)}{m-5} + \frac{-2(4m+1)}{3m-1}\right)}{2}\right) = (0,2)$$

$$\Rightarrow m = -2 \Rightarrow y - 2 = -2x \Rightarrow 2x + y = 2$$

2 POSICIÓ RELATIVA DE DUES RECTES

Pàgs. 201 i 202

24. $\vec{u}_r = (3,2),\ \vec{u}_s = (n+1, n)$

$$\frac{3}{n+1} = \frac{2}{n} \quad \Rightarrow \quad n = 2$$

25. a) $\vec{u}_r = (-1,3),\ \vec{u}_s = (-2,1) \Rightarrow$ Les rectes són <u>secants</u> ja que els vectors directors no són proporcionals. Calculem el punt d'intersecció P entre les dues rectes:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 2 - x \\ t = \frac{y+1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - x = \frac{y+1}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x + y - 5 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y - 5 = 0 \\ \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{6}{5}, y = \frac{7}{5} \Rightarrow P = \left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

b) $\vec{u}_r = (2,3),\ \vec{u}_s = (-1,3) \Rightarrow$ Les rectes són <u>secants</u> perquè els vectors directors no són proporcionals.

$$P = \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ y = -3x + 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = 1 \Rightarrow P = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

c) $\vec{u}_r = (-1,7),\ \vec{u}_s = (-1,7) \Rightarrow$ Les rectes són <u>paral·leles</u> perquè els vectors directors són iguals.

d) $\vec{u}_r = (1,-1),\ \vec{u}_s = (-2,3) \Rightarrow$ Les rectes són <u>secants</u> perquè els vectors directors no són proporcionals. Calculem el punt d'intersecció P:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 - t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = x - 2 \\ t = -1 - y \end{array}\right\} \Rightarrow x - 2 = -1 - y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + y - 1 = 0$$

$$s: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \frac{x-1}{-2} \\ t = \frac{y-1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x + 2y - 5 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ 3x + 2y - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2, x = 3 \Rightarrow P = (3,-2)$$

26. Les rectes r i s són paral·leles si

$$\frac{2}{7}=\frac{-3}{k}\Rightarrow k=\frac{7\cdot(-3)}{2}=\frac{-21}{2}$$

27. Per a saber si els dos submarins xocaran en algun moment, s'ha de calcular si les trajectòries que segueixen aquests submarins es tallen o no. $\overrightarrow{u_1}=(-3,4),\overrightarrow{u_2}=(-3,4)\Rightarrow$ Els vectors directors són iguals, de manera que les trajectòries seguides són paral·leles i, per tant, no es tallen.

28. Resposta suggerida:

- Exemple 1: Siguin r: $2x+3y-5=0$ i s: $2x-3y+3=0$, com que 2/2 és diferent de 3/–3, les rectes són secants.
- Exemple 2: Siguin r: $5x-2y+1=0$ i s: $10x-4x+3=0$, com que 5/10 = –2/–4 i diferent d'1/3, les rectes són paral·leles.

29. Com que l'equació és canònica, aquesta recta passa pels punts $A(2,0)$ i $B(0,-3)$. Per tant, el feix de rectes paral·leles a aquesta recta tindrà el mateix vector director, que és el següent: $\overrightarrow{AB}=(-2,-3)\Rightarrow -3x+2y+C=0, C\in\mathbb{R}$

30. $\vec{u}_r=(5,3),\vec{u}_s=(k,10)\Rightarrow \vec{n}_r=(-3,5)$ i $\vec{u}_s,\vec{n}_r$ han de ser proporcionals $\Rightarrow 2\cdot\vec{n}_r=2\cdot(-3,5)=(-6,10)\Rightarrow k=-6$

31. Equació punt-pendent: $y+3=m(x-2)$, $m\in\mathbb{R}$ i $x=2$.

32. $\vec{u}_r=(2,1),\vec{u}_s=(-1,3)\Rightarrow \vec{u}_r\cdot\vec{u}_s=1,|\vec{u}_r|=\sqrt{5},|\vec{u}_s|=\sqrt{10}$

$$\cos\alpha=\left|\frac{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s}{|\vec{u}_r||\vec{u}_s|}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\alpha=\text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)=81^\circ\,52'$$

33. $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-2,2),\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(2,-1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-6,|\vec{u}|=\sqrt{8},|\vec{v}|=\sqrt{5}$

$$\cos\alpha=\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right|=\left|\frac{-6}{\sqrt{8}\sqrt{5}}\right|=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\alpha=\text{arc cos}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=18^\circ\,26'$$

34. $\vec{u}=(3,-1),\vec{v}=(1,2)\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=1,|\vec{u}|=\sqrt{10},|\vec{v}|=\sqrt{5}$

$$\cos\alpha=\left|\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{5}}\right|=\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\alpha=\text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)=81^\circ\,52'12''$$

35. $A=r\cap s=\begin{cases}2x+3y-5=0\\ x-y=0\end{cases}\Rightarrow x=1,y=1\Rightarrow A=(1,1)$

La recta passa pels punts $A=(1,1)$ i $B=(2,-1)$ i el seu vector director és $\overrightarrow{AB}=(1,-2)\Rightarrow\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}\Rightarrow 2x+y-3=0$

36. L'angle és delimitat per les rectes BC i AC; per tant, necessitem saber els vectors directors d'aquestes rectes.

$$\overrightarrow{BC}=(-2,-6),\overrightarrow{AC}=(-12,-6)\Rightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=60,|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{40},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{180}\Rightarrow\cos\hat{C}=\frac{60}{\sqrt{40}\sqrt{180}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\hat{C}=\text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=45^\circ$$

37. Sigui $\overrightarrow{u_r}=(-1,1)\Rightarrow m_r=-1$ i $m_s>m_r$ el pendent de l'altra recta. Aleshores:

$$\text{tg}\,45^\circ=\left|\frac{m_s-m_r}{1+m_sm_r}\right|\Rightarrow 1=\left|\frac{m_s+1}{1-m_s}\right|\Rightarrow m_s=0$$

L'única recta amb pendent 0 i que talla amb l'eix OX és la recta $y=0$.

38. a) $\dfrac{a}{3a}=\dfrac{a-1}{-(3a+1)}\Rightarrow\dfrac{1}{3}=\dfrac{a-1}{-(3a+1)}\Rightarrow$

$\Rightarrow -3a-1=3a-3\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}$

b) $\vec{n}_r=(a,a-1),\vec{u}_s=(3a+1,3a)$

Aquests dos vectors han de ser proporcionals; per tant, s'ha de complir que $a=3a+1\rightarrow a=-1/2$. Calculem el punt de tall per a $a=-1/2$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{-1}{2}x-\frac{3}{2}y-3=0\\ \frac{-3}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=-1{,}5, y=-1{,}5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=(-1{,}5,-1{,}5)$$

3 DISTÀNCIES

Pàgs. 202 i 203

39. a) $d(P,Q)=\sqrt{(-7-5)^2+(5-0)^2}=\sqrt{81+25}=\sqrt{106}$

b) $d(R,S)=\sqrt{(-2-(-1))^2+(-3-7)^2}=\sqrt{1+100}=\sqrt{101}$

40. En la demostració de la unitat, s'utilitza que pel fet que PHA és un triangle rectangle, en què $P(p,q)$ és el punt, $A(a,b)$ és un punt de la recta r i H és el punt de tall entre r i la seva perpendicular passant per P, es compleix que $d(P,r)=|\overrightarrow{PH}|=|\overrightarrow{PA}|\cdot\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PA}||\vec{n}|}$ i en la demostració d'aquesta pàgina només s'utilitza la projecció d'$AP(p-a,q-b)$.

41. Calculem el punt de tall entre r i s:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x+2}{3}=\frac{y+2}{4}\\ &\left.\begin{aligned}x&=4+k\\ y&=k\end{aligned}\right\}\Rightarrow x-4=y\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=-14, y=-18\Rightarrow P=(-14,-18)$$

Sigui t: $-4x-y=4$, aleshores:

$$d(P,t)=\frac{|A\cdot p_1+B\cdot p_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|(-4)(-14)+(-1)(-18)-4|}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{70}{\sqrt{17}}u$$

42. Sigui $P' = (x, y)$ el punt simètric de P respecte de Q. Com que Q és el punt mitjà de P i P' tenim que:

$$Q = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{9+y}{2}\right) = (2,3) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3+x}{2} = 2 \\ \dfrac{9+y}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow P' = (7,-3)$$

43. La recta paral·lela a $y = -2x + 6$ és de la forma $y = -2x + k$, i passa per Q, per tant, $k = 2$ i t: $y = -2x + 2$.

$$d(P,t) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) - 2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

44. Calculem la distància que hi ha entre els punts M i A, i entre M i B.

$$d(M,A) = \sqrt{(103-32)^2 + (22-12)^2} = \sqrt{5141}$$
$$d(M,B) = \sqrt{(30-32)^2 + (100-12)^2} = \sqrt{7748}$$

Com que $d(M, A) < d(M, B)$, aleshores el participant que arribarà primer serà el participant A.

45. La recta r està expressada en forma vectorial; un punt que passa per aquesta recta és $P = (0, 1)$. D'altra banda, l'equació general de la recta s és $4x + 6y + 2 = 0$.

$$d(P,s) = \frac{|4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{8}{\sqrt{52}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

46. Per a demostrar que els punts A, B, C i D formen un quadrat, s'ha de comprovar que tots els costats mesuren el mateix i que els costats són perpendiculars entre ells, és a dir, que es compleix el següent: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

- $d(A,B) = \sqrt{(6-0)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{61}$
- $d(B,C) = \sqrt{(11-6)^2 + (10-4)^2} = \sqrt{61}$
- $d(C,D) = \sqrt{(5-11)^2 + (15-10)^2} = \sqrt{61}$
- $d(D,A) = \sqrt{(0-5)^2 + (9-15)^2} = \sqrt{61}$
- $\overrightarrow{AB} = (6,-5), \overrightarrow{BC} = (5,6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
- $\overrightarrow{BC} = (5,6), \overrightarrow{CD} = (-6,5) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
- $\overrightarrow{CD} = (-6,5), \overrightarrow{AD} = (5,6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

47. $$d(P,r) = \frac{|(-2) \cdot 3 + 4 \cdot k - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|-7+4k|}{2\sqrt{5}} = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k = \frac{7 \pm 8\sqrt{5}}{4}$$

48. Les condicions per a cadascun dels quadrilàters són:

— Paral·lelograms: tenen els costats paral·lels dos a dos.

- Quadrat: té els quatre costats iguals i els angles rectes.
- Rectangle: té els costats iguals dos a dos i els quatre angles rectes.
- Rombe: té els quatre costats iguals.
- Romboide: té els costats iguals dos a dos.

— Trapezis: tenen dos costats paral·lels.

- Trapezi rectangle: té un angle recte.
- Trapezi isòsceles: té dos costats no paral·lels iguals.
- Trapezi escalè: no té cap costat igual ni té angle recte.

— Trapezoides: no tenen cap costat igual ni paral·lel.

Els vectors directors dels costats del quadrilàter són $\overrightarrow{AB} = (4,-1), \overrightarrow{BC} = (-1,4), \overrightarrow{CD} = (-4,1), \overrightarrow{AD} = (-1,4)$; observem que els costats són paral·lels dos a dos, ja que són proporcionals. La longitud dels costats és $d(A,B) = d(B,C) = d(C,D) = d(A,D) = \sqrt{17}$, per tant, tots els costats són iguals. Com que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0$, hi ha un angle com a mínim que no és recte; aleshores no pot ser un quadrat, així que es tracta d'un rombe. En calculem l'àrea:

$$A = \frac{d(A,C) \cdot d(B,D)}{2} = \frac{\sqrt{3^2+3^2}\sqrt{5^2+(-5)^2}}{2} = 15\,u^2$$

49. La recta perpendicular a s passa per P i té vector director $\vec{n} = (-1,2) \Rightarrow \dfrac{x-7}{-1} = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow 2x + y - 15 = 0$. Ara, calculem el punt de tall entre aquesta recta i la recta s:

$$s: \begin{rcases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + t \end{rcases} \Rightarrow \begin{rcases} t = \dfrac{x+3}{2} \\ t = y - 1 \end{rcases} \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$$

$$H = \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 2x + y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = 5 \Rightarrow H = (5,5)$$

Sigui $P' = (x, y)$ el punt simètric de P respecte de la recta s. Com que H és el punt mitjà de P i P' tenim que:

$$H = \left(\frac{7+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) = (5,5) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7+x}{2} = 5 \\ \dfrac{1+y}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow P' = (3,9)$$

50. Els vèrtexs són les interseccions entre les rectes r, s i t.

- $A = r \cap s = \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 6x - y = -21 \end{cases} \Rightarrow x = -3, y = 3 \Rightarrow A = (-3,3)$
- $B = r \cap t = \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ -2x + 7y = -13 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = -1 \Rightarrow B = (3,-1)$
- $C = s \cap t = \begin{cases} 6x - y = -21 \\ -2x + 7y = -13 \end{cases} \Rightarrow C = (-4,-3)$

Per a calcular l'àrea, necessitem saber l'altura i la base:

- Base $\rightarrow d(B,C) = \sqrt{(-4-3)^2 + (-3-(-1))^2} = \sqrt{53}$
- Altura $\rightarrow$

$$d(A,BC) = d(A,t) = \frac{|(-2) \cdot (-3) + 7 \cdot 3 + 13|}{\sqrt{(-2)^2 + 7^2}} = \frac{40}{\sqrt{53}}$$

$$A = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{53}\,\frac{40}{\sqrt{53}}}{2} = 20\,u^2$$

51. Els vèrtexs són les interseccions de les quatre rectes. Observem que les rectes r i s i les rectes t i u són paral·leles; per tant, no les podem tallar.

- $A = s \cap u = \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ y = -2x/3 + 3 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 3 \Rightarrow A = (0,3)$
- $B = s \cap t = \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 2x + 3y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (-1,5;0)$
- $C = r \cap t = \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x + 3y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = -1 \Rightarrow C = (0,-1)$
- $D = r \cap u = \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -2x/3 + 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1,5, y = 2 \Rightarrow D = (1,5;2)$

És un paral·lelogram, ja que té els costats paral·lels dos a dos. Per a calcular l'àrea, necessitem saber-ne la base i l'altura:

- Base $\rightarrow d(A,D) = \sqrt{(1,5 - 0)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{3,25}$
- La recta AD passa pel punt A i té com a vector $\overrightarrow{AD} = (1,5,-1) \Rightarrow \frac{x}{1,5} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow x + 1,5y - 4,5 = 0$

  Altura $\rightarrow d(C, AD) = \frac{|1 \cdot 0 + 1,5 \cdot (-1) - 4,5|}{\sqrt{1,5^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3,25}}$

  $A = b \cdot a = \sqrt{3,25} \cdot \frac{6}{\sqrt{3,25}} = 6\,u^2$

52. Calculem la recta AB i la longitud d'aquest costat:

- La recta AB passa per A i té com a vector director $\overrightarrow{AB} = (6,-3) \Rightarrow AB: x + 2y - 13 = 0$.
- $d(A,B) = \sqrt{(9-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{45}$

Ara, busquem els vèrtexs C i D:

- El vèrtex C és la intersecció entre la recta perpendicular a AB (amb vector director $n = (1, 2)$) que passa per B i la circumferència de radi $d(A, B)$ i centre B.

  $$C = \begin{cases} 2x - y - 16 = 0 \\ (x-9)^2 + (y-2)^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow C = (6,-4) \text{ o } C = (12,8)$$

- El vèrtex D és la intersecció entre la recta perpendicular a AB (amb vector director $n = (1, 2)$) que passa per A i la circumferència de radi $d(A, B)$ i centre A.

  $$D = \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-5)^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow D = (0,-1) \text{ o } D = (6,11)$$

53. Sigui $C = (x, y)$ un punt qualsevol de la recta $-3x + 5y = 1$. Un punt qualsevol de la recta és com $C = ((5y - 1)/3, y)$. Ara, imposem la condició de l'enunciat:

$$d(P,C) = d(Q,C)$$

$$\sqrt{\left(\frac{5y-1}{3} - (-1)\right)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{\left(\frac{5y-1}{3} - 5\right)^2 + (y-1)^2}$$

$$\left(\frac{5y+2}{3}\right)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{5y-16}{3}\right)^2 + (y-1)^2$$

$$\frac{34y^2 - 34y + 85}{9} = \frac{34y^2 - 178y + 265}{9} \Rightarrow y = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$C = \left(\frac{5 \cdot 1,25 - 1}{3}, 1,25\right) = (1,75;1,25)$$

54. Una equació d'un altre costat del quadrat és la recta perpendicular a $-x + 2y = 1$ que passa per Q. Aquesta recta té vector director $\vec{n} = (-1,2) \Rightarrow \frac{x+1}{-1} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow -2x - y = 7$.

- $A = \{-x + 2y = 1\} \cap \{-2x - y = 7\} \Rightarrow A = (-3,-1)$
- $B = \{-x + 2y = -14\} \cap \{-2x - y = 7\} \Rightarrow B = (0,-7)$
- El vèrtex C és la intersecció entre la recta $-x + 2y = -14$ i la circumferència de radi $d(A,B) = \sqrt{45}$ i centre B.

  $$C = \begin{cases} -x + 2y = -14 \\ x^2 + (y+7)^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow C = (-6,-10) \text{ o } C = (6,-4)$$

- El vèrtex D és la intersecció entre la recta $-x + 2y = 1$ i la circumferència de radi $d(A, B)$ i centre A.

  $$D = \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow D = (-9,-4) \text{ o } D = (3,2)$$

Finalment, calculem la recta CD que pot ser de dues formes, ja que tenim dos valors de C i D:

- La recta CD passa per $C(-6, -10)$ i té vector director $\overline{CD} = (-9,-4) - (-6,-10) = (-3,6) \Rightarrow 2x + y + 32 = 0$.
- La recta CD passa per $C(6, -4)$ i té vector director $\overline{CD} = (3,2) - (6,-4) = (-3,6) \Rightarrow 2x + y - 8 = 0$.

55. Sigui r: $y = mx + n$. Les condicions de l'enunciat són:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2 = m \cdot 0 + n \Rightarrow n = 2 \\ y = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow 0 = -3m + n \Rightarrow m = 2/3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: y = \frac{2}{3}x + 2$$

- $d(C,r) = \frac{|5 \cdot 2/3 - 1 + 2|}{\sqrt{(2/3)^2 + (-1)^2}} = \frac{13/3}{\sqrt{13}/3} = \sqrt{13}\,u$
- La recta paral·lela a r és de la forma s: $2x - 3y + k = 0$ i com que té ordenada en l'origen 6, $x = 0$ i $y = 6$, per tant, substituïm en la recta s i resulta $k = 18$. Aleshores, la recta s queda $2x - 3y + 18 = 0$.

56. a) La recta perpendicular a r passa per A i té vector director $\vec{n} = (-1,2) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$. Ara, calculem el punt de tall entre aquesta recta i la recta r:

$$H = \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 3 \Rightarrow H = (1,3)$$

Sigui $A'(x, y)$ el punt simètric de A respecte de la recta r. Com que H és el punt mitjà de A i A' tenim que:

$$H = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+7}{2}\right) = (1,3) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = 1 \\ \frac{y+7}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow A' = (3,-1)$$

La recta $A'P$ passa per A' i té com a vector director $\overrightarrow{A'P} = (4,16) \Rightarrow 4x - y - 13 = 0$. El punt M de xoc serà:

$$M = \begin{cases} 4x - y - 13 = 0 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{31}{7}, y = \frac{33}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = \left(\frac{31}{7}, \frac{33}{7}\right)$$

b) La recta perpendicular a $y = 0$ (eix OX) que passa per A és la recta $x = 3$. El punt de tall entre aquestes dues rectes és $H = (3, 0)$. Sigui $A'(x, y)$ el punt simètric de A respecte d'OX i com que H és el punt mitjà de A i A' tenim que:

$$H = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+7}{2}\right) = (3,0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{2} = 3 \\ \frac{y+7}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow A' = (3,-7)$$

La recta $A'B$ passa per A' i té com a vector director $\overrightarrow{A'B} = (15,12) \Rightarrow 4x - 5y - 47 = 0$. El punt M de xoc és

$$M = \begin{cases} 4x - 5y - 47 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 11{,}75, y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = (11{,}75;0)$$

57. Calculem els punts E, P i F.

- El triangle ABE és equilàter; per tant:

$$d(A,B) = d(B,E) = d(A,E) = \sqrt{32}, E = (x,y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} d(B,E) = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{32} \\ d(A,E) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{32} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} E = (-0{,}5;-2{,}5) \\ \text{o} \\ E = (6{,}5;4{,}5) \end{cases}$$

- La recta AC passa per A i té com a vector director $\overrightarrow{AC} = (8,0) \Rightarrow y = 3$ i la recta BE passa per B i té com a vector director $\overrightarrow{BE} = (-5{,}5;-1{,}5) \Rightarrow -1{,}5x + 5{,}5y + 13 = 0$ en què $E = (-0{,}5; -2{,}5)$.

$$P = \begin{cases} -1{,}5x + 5{,}5y + 13 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow P = (19{,}7;3)$$

- La recta perpendicular a DC: $x + y - 12 = 0$ té com a vector director $\vec{n} = (1,1) \Rightarrow x - y - 16{,}7 = 0$ i el punt de tall entre aquestes dues rectes és:

$$H = \begin{cases} x - y - 16{,}7 = 0 \\ x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = (14{,}4;-2{,}4)$$

Sigui $F(x, y)$ el punt simètric de P respecte de la recta DC. Com que H és el punt mitjà de F i P tenim que:

$$H = \left(\frac{x+19{,}7}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (14{,}4;-2{,}4) \Rightarrow F = (9{,}1;-7{,}8)$$

a) CEF és equilàter si tots els seus costats són iguals:

$$d(E,F) = \sqrt{(9{,}1+0{,}5)^2 + (-7{,}8+2{,}5)^2} \approx 11$$
$$d(F,C) = \sqrt{(9-9{,}1)^2 + (3+7{,}8)^2} \approx 11$$
$$d(C,E) = \sqrt{(-0{,}5-9)^2 + (-2{,}5-3)^2} \approx 11$$

b) DEF és isòsceles si té dos costats iguals, i és rectangle si té un angle recte:

$$d(D,E) = \sqrt{(-0{,}5-5)^2 + (-2{,}5-7)^2} \approx 11$$
$$d(E,F) = \sqrt{(9{,}1+0{,}5)^2 + (-7{,}8+2{,}5)^2} \approx 11$$
$$d(F,D) = \sqrt{(5-9{,}1)^2 + (7+7{,}8)^2} \approx 15$$
$$\overrightarrow{DE} = (-5{,}5;-9{,}5), \overrightarrow{EF} = (9{,}6;-5{,}3) \Rightarrow \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EF} \approx 0$$

c) BDF és isòsceles si té dos costats iguals:

$$d(B,D) = \sqrt{(5-5)^2 + (7+1)^2} = 8$$
$$d(D,F) = \sqrt{(9{,}1-5)^2 + (-7{,}8-7)^2} \approx 15$$
$$d(F,B) = \sqrt{(5-9{,}1)^2 + (-1+7{,}8)^2} \approx 8$$

d) PDF és equilàter si tots els seus costats són iguals:

$$d(P,D) = \sqrt{(5-19{,}7)^2 + (7-3)^2} \approx 15$$
$$d(D,F) = \sqrt{(9{,}1-5)^2 + (-7{,}8-7)^2} \approx 15$$
$$d(F,P) = \sqrt{(19{,}7-9{,}1)^2 + (3+7{,}8)^2} \approx 15$$

4 LLOCS GEOMÈTRICS Pàg. 203

58. El lloc geomètric és la circumferència de centre P i radi 3, és a dir, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2 = 9$.

59. Tot punt $P(x, y)$ que pertanyi a la mediatriu compleix:

$$d(P,A) = d(P,B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2 \Rightarrow -3x + 4y = 6{,}5$$

60. Un punt $P(x, y)$ pertany a les bisectrius si:

$$d(P,r) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|x+y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|x-y+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

Com que dues rectes determinen quatre angles, per a trobar les dues bisectrius hem de tenir en compte els dos signes de les arrels del denominador. Així, si designem t_1 i t_2 les bisectrius, obtenim dues equacionss:

$$\begin{cases} t_1 : \sqrt{2}(x+y+1) = \sqrt{2}(x-y+2) \\ t_2 : \sqrt{2}(x+y+1) = -\sqrt{2}(x-y+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 : y = \frac{1}{2} = 0{,}5 \\ t_2 : x = -\frac{3}{2} = -1{,}5 \end{cases}$$

61. Sigui r: $x = 0$ (eix Y) i s: $y = 0$ (eix X). Si imposem la condició de l'enunciat, en què $P(x, y)$ és el punt, resulta:

$$d(P,r) - 2 = 3d(P,s) \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{1}} - 2 = 3\frac{|y|}{\sqrt{1}} \Rightarrow x - 3y - 2 = 0$$

62. El lloc geomètric dels punts $P(x, y)$ del pla que formen un triangle isòsceles és la mediatriu, ja que la distància dels punts a cada punt de la base és la mateixa. Per tant:

$$d(P,A) = d(P,B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-6)^2 + (y+2)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow -7x + 5y = -15$$

63. Sigui $Q(x, y)$ el punt que compleix la condició de l'enunciat:

$$d(Q,P) = d(Q,r) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{(x+y+1)^2}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 6y + 3 = 0$$

64. Trobem les equacions dels costats del triangle:

- Costat AB: passa pel punt A i té com a vector director $\overrightarrow{AB} = (7,7) \Rightarrow \frac{x+7}{7} = \frac{y+3}{7} \Rightarrow x - y + 4 = 0.$
- Costat AC: passa pel punt A i té com a vector director $\overrightarrow{AC} = (12,2) \Rightarrow \frac{x+7}{12} = \frac{y+3}{2} \Rightarrow x - 6y - 11 = 0.$
- Costat BC: passa pel punt B i té com a vector director $\overrightarrow{BC} = (5,-5) \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y-4}{-5} \Rightarrow x + y - 4 = 0.$

Ara, n'hi ha prou de trobar dues bisectrius i intersecar-les.

- Un punt $P(x, y)$ pertany a la bisectriu de A si:

$$d(P,AB) = d(P,AC) \Rightarrow \frac{|x-y+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x-6y-11|}{\sqrt{1^2+(-6)^2}}$$

$$\begin{cases} t_1: \sqrt{37}(x-y+4) = \sqrt{2}(x-6y-11) \\ t_2: \sqrt{37}(x-y+4) = -\sqrt{2}(x-6y-11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1: 3{,}3x + 1{,}7y + 28{,}2 = 0 \\ t_2: -5{,}3x + 10{,}3y - 6{,}2 = 0 \end{cases}$$

- Un punt $P(x, y)$ pertany a la bisectriu de B si:

$$d(P,AB) = d(P,BC) \Rightarrow \frac{|x-y+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x+y-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\begin{cases} t_1: \sqrt{2}(x-y+4) = \sqrt{2}(x+y-4) \\ t_2: \sqrt{2}(x-y+4) = -\sqrt{2}(x+y-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1: y = 4 \\ t_2: x = 0 \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} -5{,}3x + 10{,}3y - 6{,}2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0{,}6 \Rightarrow I = (0;0{,}6)$$

65. Primerament, trobem els vèrtexs del triangle:

- $A = r \cap \{x = 0\} \Rightarrow A = \begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$

  $\Rightarrow y = -3 \Rightarrow A = (0,-3)$
- $B = r \cap \{y = 0\} \Rightarrow B = \begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow B = (4,0)$
- Com que la recta s'interseca amb els eixos de coordenades, el vèrtex C serà l'origen de coordenades, és a dir, $C = (0, 0)$.

Ara, n'hi ha prou de trobar dues mediatrius i intersecar-les:

- Mediatriu de AB: $P(x, y)$ pertany a aquesta mediatriu si:

$$d(P,A) = d(P,B)$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

$$x^2 + (y+3)^2 = (x-4)^2 + y^2 \Rightarrow 8x + 6y = 7$$

- Mediatriu de AC: $P(x, y)$ pertany a aquesta mediatriu si:

$$d(P,A) = d(P,C) \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$x^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = -\frac{9}{6} = -1{,}5$$

$$Q = \begin{cases} 8x + 6y = 7 \\ y = -1{,}5 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow Q = (2,-1{,}5)$$

66. Siguin $P(x, y)$ els punts que compleixen la condició següent:

$$d(P,A)d(P,B) = 1$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2}\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 1$$

$$\left((x-2)^2 + (y-6)^2\right)\left((x-1)^2 + (y+2)^2\right) = 1$$

$$x^4 - 6x^3 + 2x^2y^2 - 8x^2y + 53x^2 - 6xy^2 + 8xy -$$
$$-100x + y^4 - 8y^3 - 3y^2 + 100y + 199 = 0$$

67. Calculem la bisectriu de l'angle C i el costat AB:

- Bisectriu de l'angle C:
  - — Costat AC: passa pel punt A i té vector director $\overrightarrow{AC} = (6,-6) \Rightarrow \frac{x-5}{6} = \frac{y-10}{-6} \Rightarrow x + y - 15 = 0$
  - — Costat BC: passa pel punt B i té vector director $\overrightarrow{BC} = (14,2) \Rightarrow \frac{x+3}{14} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow x - 7y + 17 = 0$
- Un punt $P(x, y)$ pertany a les bisectrius si:

$$d(P,AC) = d(P,BC) \Rightarrow \frac{|x+y-15|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|x-7y+17|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}$$

$$\begin{cases} t_1: \sqrt{50}(x+y-15) = \sqrt{2}(x-7y+17) \\ t_2: \sqrt{50}(x+y-15) = -\sqrt{2}(x-7y+17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1: x + 3y - 8 = 0 \\ t_2: 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

- La recta del costat AB passa pel punt A i té com a vector director $\overrightarrow{AB} = (-8,-8) \Rightarrow \frac{x-5}{-8} = \frac{y-10}{-8} \Rightarrow x - y + 5 = 0$

$$D = \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 7 \Rightarrow D = (2,7)$$

68. Siguin $P(x, y)$ els punts del pla que equidisten de r i s:

$$d(P,r) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|2x-y+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|2x-y+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$5(2x-y+5)^2 = 5(2x-y+1)^2 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$$

Les tres rectes són paral·leles.

69. Siguin $P(x, y)$ el punt que equidista de les rectes a, b i c:

$$d(P,a) = d(P,b) = d(P,c)$$

$$\frac{|6x+y-26|}{\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-x+y-5|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}$$

$$\begin{cases} 2(6x+y-26)^2 = 37(-x+y-5)^2 \\ 2(x+y-1)^2 = 2(-x+y-5)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow P = (1{,}4;3)$$

70. Calculem els pendents, en què $Q = (x, y)$:

- $\overrightarrow{AQ} = (x, y-4) \Rightarrow m_{AQ} = \dfrac{y-4}{x}, x \neq 0$
- $\overrightarrow{BQ} = (x-2, y-1) \Rightarrow m_{BQ} = \dfrac{y-1}{x-2}$

$m_{AQ} = \dfrac{1}{4} m_{BQ} \Rightarrow \dfrac{y-4}{x} = \dfrac{1}{4}\dfrac{y-1}{x-2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3xy - 15x - 8y + 32 = 0$

71. Calculem els pendents, en què $Q = (x, y)$:

- $\overrightarrow{AQ} = (x+1, y-2) \Rightarrow m_{AQ} = \dfrac{y-2}{x+1}, x \neq -1$
- $\overrightarrow{BQ} = (x-5, y-3) \Rightarrow m_{BQ} = \dfrac{y-3}{x-5};\ x \neq 5$

$m_{AQ} = 3m_{BQ} \Rightarrow \dfrac{y-2}{x+1} = 3\dfrac{y-3}{x-5} \Rightarrow$
$\Rightarrow -2xy + 7x - 8y + 19 = 0$

72. Siguin $A = (x', 0)$, $B = (0, y')$ i $E = (x, y')$. Aleshores, la recta AC és $8x + x'y - 8x' = 0$. Com que E pertany a la recta AC, E ha de ser de la forma següent: $E = ((-x'y' + 8x')/8), y')$. Ara, imposem la condició que l'àrea del trapezi és 14 u^2:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = 14 \Rightarrow \frac{\left(x' + \dfrac{-x'y' + 8x'}{8}\right)}{2} \cdot y' = 28 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x'y'^2 - 16x'y' - 224 = 0$$

SÍNTESI

Pàg. 204

73. a) $P(x, y)$ pertany a la mediatriu si $d(P, A) = d(P, B)$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$
$$(x+2)^2 + (y+4)^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2$$
$$-4x - 3y = 7{,}5$$

b) AB és la recta que passa per A i té com a vector director

$\overrightarrow{AB} = (4, 3) \Rightarrow \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+4}{3} \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0.$

Altura $\rightarrow d(C, AB) = \dfrac{|3\cdot(-1) + (-4)\cdot 5 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{33}{5} = 6{,}6\,u$

c) La mediana BM, en què $M = \left(\dfrac{-2-1}{2}, \dfrac{-4+5}{2}\right) = $
$= (-1{,}5; 0{,}5)$ és el punt mitjà de AC, passa per B i el seu vector director és

$\overrightarrow{BM} = (-3{,}5; 1{,}5) \Rightarrow \dfrac{x-2}{-3{,}5} = \dfrac{y+1}{1{,}5} \Rightarrow -1{,}5x - 3{,}5y = 0{,}5$

d) La recta perpendicular a AB passa per C i té vector director

$\vec{n} = (3, -4) \Rightarrow \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-5}{-4} \Rightarrow 4x + 3y - 11 = 0.$

Ara, calculem el punt de tall entre aquesta recta i la recta AB:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y - 11 = 0 \\ 3x - 4y - 10 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{74}{25}, y = -\frac{7}{25} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H = \left(\frac{74}{25}, -\frac{7}{25}\right)$$

Sigui $C' = (x, y)$ el punt simètric de C respecte de la recta AB. Com que H és el punt mitjà de C i P tenim que:

$$H = \left(\frac{-1+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) = \left(\frac{74}{25}, -\frac{7}{25}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C' = \left(\frac{173}{25}, -\frac{139}{25}\right)$$

e) Base $\rightarrow d(A, B) = \sqrt{(-2-2)^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{25} = 5$

$$A = \frac{b\cdot a}{2} \Rightarrow A = \frac{5\cdot 6{,}6}{2} = 16{,}5\,u^2$$

74. • Angle centrat en F:

$$\overrightarrow{EF} = (3, -7), \overrightarrow{DF} = (6, -4), \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DF} = 46, \left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{58},$$
$$\left|\overrightarrow{DF}\right| = \sqrt{52} \Rightarrow \cos\hat{F} = \left|\frac{46}{\sqrt{58}\sqrt{52}}\right| = \frac{23}{\sqrt{754}}$$
$$\hat{F} = \arccos\left(\frac{23}{\sqrt{754}}\right) = 33°\,6'$$

• Angle centrat en G:

$$\overrightarrow{EG} = (6, -3), \overrightarrow{DG} = (9, 0), \overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{DG} = 54, \left|\overrightarrow{EG}\right| = \sqrt{45}, \left|\overrightarrow{DG}\right| = 9$$
$$\cos\hat{G} = \left|\frac{54}{9\sqrt{45}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \hat{G} = \text{arc cos}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26°\,34'$$

• Angle centrat en H:

$$\overrightarrow{EH} = (4, -1), \overrightarrow{DH} = (7, 2), \overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{DH} = 26, \left|\overrightarrow{EH}\right| = \sqrt{17},$$
$$\left|\overrightarrow{DH}\right| = \sqrt{53} \Rightarrow \cos\hat{H} = \left|\frac{26}{\sqrt{17}\sqrt{53}}\right| = \frac{26}{\sqrt{901}}$$
$$\hat{H} = \text{arc cos}\left(\frac{26}{\sqrt{901}}\right) = 29°\,58'$$

75. a) Sigui $A' = (x, y)$ el punt simètric de A respecte de B. Com que B és el punt mitjà de A' i A, tenim que:

$$B = \left(\frac{2+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) = (0, -3) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2+x}{2} = 0 \\ \dfrac{1+y}{2} = -3 \end{array}\right. \Rightarrow A' = (-2, -7)$$

b) La recta AB passa pel punt A i té vector director

$\overrightarrow{AB} = (-2, -4) \Rightarrow \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-1}{-4} \Rightarrow 2x - y - 3 = 0.$

La seva recta perpendicular passa per C i té com a vector director $\vec{n} = (2, -1) \Rightarrow \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-1} \Rightarrow x + 2y + 1 = 0.$

La intersecció de la recta que uneix A i B amb la seva perpendicular és:

$$H = \left\{\begin{array}{l} 2x - y - 3 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow x = 1, y = -1 \Rightarrow H = (1, -1)$$

Sigui $C' = (x, y)$ el punt simètric de C respecte de la recta AB. Com que H és el punt mitjà de C i C' resulta que:

$$H = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right) = (1,-1) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3+x}{2} = 1 \\ \dfrac{-2+y}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C' = (-1, 0)$$

c) Vegem si els costats del quadrilàter són tots iguals o no, i si els costats són perpendiculars entre ells:

- $d(A,C) = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$
- $d(A,C') = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$
- $d(B,C') = \sqrt{(-1-0)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{10}$
- $\overrightarrow{AC'} = (-3,-1), \overrightarrow{C'B} = (1,-3) \Rightarrow \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{C'B} = 0$
- $\overrightarrow{C'B} = (1,-3), \overrightarrow{BC} = (3,1) \Rightarrow \overrightarrow{C'B} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
- $\overrightarrow{BC} = (3,1), \overrightarrow{CA} = (-1,3) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

És un quadrat i $A = d(B,C') \cdot d(B,C) = \sqrt{10}\sqrt{10} = 10\,u^2$

76. a) Calculem el punt comú a aquesta família de rectes:

$$mx + (m-1)y + (m+2) = 0 \Rightarrow mx + my - y + m + 2 = 0$$

$$m(x+y+1) - y + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ -y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P = (-3, 2)$$

b) Substituïm el punt P en la família de rectes:

$$m + 2(m-1) + (m+2) = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y = 2$$

c) La recta de la família que és paral·lela a r ha de complir que: $\dfrac{m}{1} = \dfrac{m-1}{-3} \Rightarrow m = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x - 3y + 9 = 0$.

77. Hem de calcular el punt simètric de A respecte de la recta r: $-x + y = -3$. La recta perpendicular a r passa per A i el seu vector director és $\vec{n} = (-1,1) \Rightarrow \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-4}{1} \Rightarrow x + y - 7 = 0$

$$H = \begin{cases} -x + y = -3 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = 2 \Rightarrow H = (5, 2).$$

Sigui $A'(x, y)$ el punt simètric de A respecte de la recta r. Com que H és el punt mitjà de A i A' tenim que:

$$H = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) = (5, 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A' = (7, 0)$$

L'equació del raig reflectit és la recta $A'C$ que passa per A' i el seu vector director és $\overrightarrow{A'C} = (4, 8) \Rightarrow -2x + y = -14$.

78. a) $\overrightarrow{u_r} = (-4, 5), \overrightarrow{u_s} = (-5, -4) \Rightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = 20 - 20 = 0 \Rightarrow$ les rectes són perpendiculars. Calculem el punt de tall:

$$M = \begin{cases} 5x + 4y = 30 \\ -4x + 5y = 17 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 5 \Rightarrow M = (2, 5)$$

b) Primera solució: Els vèrtexs A i C estaran en la mediatriu del segment BD, que és la recta r, i a una distància de M de $\sqrt{164}\ u$. A i C seran de la forma $x = t$, i $y = (30 - 5t)/4$. Aleshores, s'ha de complir que:

$$d(M,A) = d(M,C) = \sqrt{164} \Rightarrow \sqrt{(2-t)^2 + \left(5 - \frac{30-5t}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{164} \Rightarrow t = -6, t = 10 \Rightarrow A = (-6, 15), C = (10, -5)$$

Els vèrtexs B i D estaran en la mediatriu del segment AC, que és la recta s, i a una distància de M de $\sqrt{41}\ u$. B i D seran de la forma $x = t$, i $y = (17 + 4t)/5$. Per tant:

$$d(M,B) = d(M,D) = \sqrt{41} \Rightarrow \sqrt{(2-t)^2 + \left(5 - \frac{17+4t}{5}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{41} \Rightarrow t = 7, t = -3 \Rightarrow B = (7, 9), D = (-3, 1)$$

Segona solució: S'efectua el mateix procediment, però canviant la recta r per la s, i viceversa. El resultat és el següent: $E = (-2, 10)$, $F = (12, 13)$, $G = (6, 0)$ i $H = (-8, -3)$.

c) Calculem les equacions dels costats del rombe a partir de la primera solució de l'apartat b).

- La recta AB passa per A i té com a vector director $\overrightarrow{AB} = (13, -6) \Rightarrow \dfrac{x+6}{13} = \dfrac{y-15}{-6} \Rightarrow 6x + 13y - 159 = 0$.
- La recta BC passa per B i té com a vector director $\overrightarrow{BC} = (3, -14) \Rightarrow \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-9}{-14} \Rightarrow 14x + 3y - 125 = 0$.
- La recta CD passa per C i té com a vector director $\overrightarrow{CD} = (-13, 6) \Rightarrow \dfrac{x-10}{-13} = \dfrac{y+5}{6} \Rightarrow 6x + 13y + 5 = 0$
- La recta DA passa per D i té com a vector director $\overrightarrow{DA} = (-3, 14) \Rightarrow \dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y-1}{14} \Rightarrow 14x + 3y + 39 = 0$.

79. La bisectriu del primer quadrant té com a equació $y = x$; així, el punt C serà de la forma (x, x).

Com que és un triangle isòsceles, el punt ha de complir que:

$$d(C,A) = d(C,B) \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (x+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (x-3)^2}$$

$$(x-2)^2 + (x+2)^2 = (x-7)^2 + (x-3)^2 \Rightarrow x = 2{,}5$$

$$C = (2{,}5; 2{,}5)$$

Calculem els costats del triangle:

- El costat AB passa pel punt A i té com a vector director $\overrightarrow{AB} = (5, 5) \Rightarrow \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+2}{5} \Rightarrow -x + y = -4$.
- El costat BC passa pel punt B i té com a vector director $\overrightarrow{BC} = (-4{,}5; -0{,}5) \Rightarrow \dfrac{x-7}{-4{,}5} = \dfrac{y-3}{-0{,}5} \Rightarrow 0{,}5x - 4{,}5y + 10 = 0$.
- El costat AC passa pel punt A i té com a vector director $\overrightarrow{AC} = (0{,}5; 4{,}5) \Rightarrow \dfrac{x-2}{0{,}5} = \dfrac{y+2}{4{,}5} \Rightarrow -4{,}5x + 0{,}5y + 10 = 0$.

80. $m = -1$ és el pendent de la recta $x + y = 0$, i m' el pendent de la recta que busquem:

$$\Rightarrow \text{tg}\, 30^\circ = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right| \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \left|\frac{-1 - m'}{1 - m'}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m' = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{-3 + \sqrt{3}} \\ m' = \dfrac{-3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s : y - 2 = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{-3 + \sqrt{3}}(x + 1) \\ t : y - 2 = \dfrac{-3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}(x + 1) \end{cases}$$

81. • Ortocentre: n'hi ha prou de trobar dues altures i intersecar-les.

— L'altura sobre el costat AB passa per C i té com a vector director un vector normal de la recta AB, és a dir, $\vec{n} = (-2, 8) \Rightarrow \dfrac{x + 2}{-2} = \dfrac{y - 3}{8} \Rightarrow 4x + y + 5 = 0.$

— L'altura sobre el costat AC passa per B i té com a vector director un vector normal de la recta AC, és a dir, $\vec{n} = (2, 9) \Rightarrow \dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y + 1}{9} \Rightarrow 9x - 2y + 7 = 0.$

$$O = \begin{cases} 4x + y + 5 = 0 \\ 9x - 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = (-1, -1)$$

• Circumcentre: hem de trobar dues mediatrius i intersecar-les.

— Un punt $P(x, y)$ pertany a la mediatriu AB si:

$$d(P, A) = d(P, B)$$

$$\sqrt{(x - 7)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}$$

$$(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \Rightarrow 4x + y = 12$$

— Un punt $P(x, y)$ pertany a la mediatriu AC si:

$$d(P, A) = d(P, C)$$

$$\sqrt{(x - 7)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$$

$$(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2$$

$$-18x + 4y = -37$$

$$I = \begin{cases} 4x + y = 12 \\ -18x + 4y = -37 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{2}, y = 2$$

$$I = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

• Baricentre: n'hi ha prou de trobar dues medianes i intersecar-les.

— La mediana CM, en què $M = (3, 0)$ és el punt mitjà del costat AB, passa per C i té com a vector director $\overline{CM} = (5, -3) \Rightarrow \dfrac{x + 2}{5} = \dfrac{y - 3}{-3} \Rightarrow 3x + 5y - 9 = 0.$

— La mediana BM, en què $M = (5/2, 2)$ és el punt mitjà del costat AC, passa per B i té com a vector director $\overline{BM} = \left(\dfrac{7}{2}, 3\right) \Rightarrow \dfrac{x + 1}{7/2} = \dfrac{y + 1}{3} \Rightarrow 6x - 7y - 1 = 0.$

$$\Rightarrow G = \begin{cases} 3x + 5y - 9 = 0 \\ -6x + 7y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{3}, y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G = \left(\frac{4}{3}, 1\right)$$

Aquests tres punts estan alineats, ja que es compleix que:

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - b_2} \Rightarrow \frac{5/2 - (-1)}{4/3 - 5/2} = \frac{2 - (-1)}{1 - 2} \Rightarrow -3 = -3$$

La recta d'Euler passarà pel punt O i tindrà com a vector director $\overline{OI} = \left(\dfrac{7}{2}, 3\right) \Rightarrow \dfrac{x + 1}{7/2} = \dfrac{y + 1}{3} \Rightarrow 6x - 7y = 1.$

82. Calculem els vèrtexs oposats A i $D(x, y)$, en què $M = (0, m)$ és el punt de tall de les diagonals:

$$A = \begin{cases} -5x + 14y - 179 = 0 \\ 7x - 4y + 79 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -5, y = 11 \Rightarrow A = (-5, 11)$$

$$M \in t \Rightarrow 5y = 50 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow M = (0, 10)$$

$$M = \frac{1}{2}(A + D) = \left(\frac{x - 5}{2}, \frac{y + 11}{2}\right) = (0, 10) \Rightarrow D = (5, 9)$$

La recta $r' = BD$ és paral·lela a la recta r i passa per $D \Rightarrow r' : -5x + 14y - 101 = 0$ i la recta $s' = CD$ és paral·lela a la recta s i passa per $D \Rightarrow s' : 7x - 4y + 1 = 0$

$$\begin{cases} B = \begin{cases} -5x + 14y - 179 = 0 \\ 7x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 9, y = 16 \Rightarrow B = (9, 16) \\ C = \begin{cases} 7x - 4y + 79 = 0 \\ -5x + 14y - 101 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -9, y = 4 \Rightarrow C = (-9, 4) \end{cases}$$

83. Teorema de Napoleó: Si es construeixen tres triangles equilàters a partir dels costats d'un triangle qualsevol, a l'interior o a l'exterior, aleshores els centres dels triangles equilàters formen també un triangle equilàter.

• Calculem les longituds de cada costat del triangle i els nous vèrtexs dels nous triangles equilàters:

— Triangle ABD:

$$d(A, B) = \sqrt{(0 - 8)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$D = \begin{cases} d(B, D) = 10 \\ d(A, D) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + (y - 6)^2} = 10 \\ \sqrt{(x - 8)^2 + y^2} = 10 \end{cases}$$

$$D = (-1{,}2; -3{,}9) \text{ o } D = (9{,}2; 9{,}9)$$

Per calcular el centre d'aquest triangle, trobem dues altures i les intersequem (per a $D = (-1{,}2; -3{,}9)$).

La recta perpendicular a AB passant per D és $8x - 6y - 13{,}8 = 0$ i la recta perpendicular a BD passant per A és $1{,}2x + 9{,}9y - 9{,}6 = 0$.

$$C_1 = \begin{cases} 8x - 6y - 13{,}8 = 0 \\ 1{,}2x + 9{,}9y - 9{,}6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = (2{,}2; 0{,}7)$$

— Triangle ACE:

$$d(A, C) = \sqrt{(3 - 8)^2 + (11 - 0)^2} = \sqrt{146}$$

$$E = \begin{cases} d(A, E) = \sqrt{146} \\ d(C, E) = \sqrt{146} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 8)^2 + y^2 = 146 \\ (x - 3)^2 + (y - 11)^2 = 146 \end{cases}$$

$$E = (-4; 1{,}2) \text{ o } E = (15; 9{,}8)$$

Per calcular el centre d'aquest triangle, trobem dues altures i les intersequem (per a $E = (15; 9,8)$).

La recta perpendicular a AC passant per E és $5x - 11y + 32,8 = 0$ i la recta perpendicular a CE passant per A és $12x - 1,2y - 96 = 0$.

$$C_2 = \begin{cases} 5x - 11y + 32,8 = 0 \\ 12x - 1,2y - 96 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = (8,7; 7)$$

— Triangle BCF:

$$d(B,C) = \sqrt{(3-0)^2 + (11-6)^2} = \sqrt{34}$$

$$F = \begin{cases} d(B,F) = \sqrt{34} \\ d(C,F) = \sqrt{34} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-6)^2 = 34 \\ (x-3)^2 + (y-11)^2 = 34 \end{cases}$$

$$F = (-2,8; 11,1) \text{ o } F = (5,8; 5,9)$$

Per calcular el centre d'aquest triangle, trobem dues altures i les intersequem (per a $F = (-2,8;\ 11,1)$).

La recta perpendicular a BC passant per F és $3x + 5y - 47,1 = 0$ i la recta perpendicular a BF passant per C és $2,8x - 5,1y + 47,7 = 0$.

$$C_3 = \begin{cases} 3x + 5y - 47,1 = 0 \\ 2,8x - 5,1y + 47,7 \end{cases} \Rightarrow C_3 = (0,1; 9,4)$$

Finalment, comprovem que el triangle $C_1C_2C_3$ és equilàter; per a això, calculem les longituds dels costats:

$$d(C_1, C_2) = d(C_2, C_3) = d(C_3, C_1) \approx 9$$

Nota: Agafem aquests valors de D, E i F perquè són els que formen els triangles exteriors al triangle ABC; si agaféssim els altres valors formaríem els triangles interiors i es faria seguint el mateix procediment.

84. Veiem que $O = (0, 0)$ i $B = (8, 0)$ L'angle exterior d'un pentàgon regular és $(3 \cdot 180°)/5 = 108°$. Per mitjà del teorema del cosinus:

$$OC = OD = BE = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cos 108°} = \sqrt{128 + 128 \cos 72°}$$

$$\begin{cases} C = (OC \cdot \cos 36°, OC \cdot \sin 36°) = (10,5; 7,6) \\ D = \left(4; \sqrt{OD^2 - 4^2}\right) = \left(4; \sqrt{112 + 128 \cos 72°}\right) = (4; 12,3) \\ E = (-BE \cdot \cos 36° + 8, BE \cdot \sin 36°) = (-2,5; 7,6) \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}(E + D) = \left(\frac{-2,5 + 4}{2}, \frac{7,6 + 12,3}{2}\right) = (0,8; 10)$$

$$G = \frac{1}{2}(D + C) = \left(\frac{4 + 10,5}{2}, \frac{12,3 + 7,3}{2}\right) = (7,3; 10)$$

La recta BH passa per B i té com a vector director $\overrightarrow{BH} = (-7,2; 10) \Rightarrow 10x + 7,2y - 80 = 0$ i la recta OG passa per O té com a vector director $\overrightarrow{OG} = (7,3; 10) \Rightarrow 10x - 7,3y = 0$.

$$F = \text{Centre} = \begin{cases} 10x + 7,2y - 80 = 0 \\ 10x - 7,3y = 0 \end{cases} \Rightarrow F = (4; 5,5)$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(5 \cdot d(O,B)) \cdot d(F, OB)}{2} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 5,5}{2} = 110\, u^2$$

Avaluació (pàg. 206)

1.
- Vectorial: $(x, y) = (2, -3) + k(2, -5),\ k \in \mathbb{R}$
- Paramètrica: $\left.\begin{matrix} x = 2 + 2k \\ y = -3 - 5k \end{matrix}\right\},\ k \in \mathbb{R}$
- Contínua: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-5}$
- General: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-5} \Rightarrow 5x + 2y - 4 = 0$
- Explícita: $5x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{5}{2}x + 2$
- Punt-pendent: $m = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow y + 3 = -\dfrac{5}{2}(x - 2)$
- Canònica: $\left.\begin{matrix} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4}{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{x}{4/5} + \dfrac{y}{2} = 1$

2. a) La recta BC passa pel punt B i té vector director

$$\overrightarrow{BC} = (4, -8) \Rightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{y-6}{-8} \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ y = 0 \Rightarrow x = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$$

b) Altura $\rightarrow d(A, BC) = \dfrac{|2 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

c) La mediana BM, en què $M = \left(\dfrac{-4+3}{2}, \dfrac{2-2}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ és el punt mitjà de AC, passa per B i té com a vector director $\overrightarrow{BM} = \left(\dfrac{1}{2}, -6\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -1 + \dfrac{1}{2}k \\ y = 6 - 6k \end{matrix}\right\},\ k \in \mathbb{R}$.

d) Base triangle: $d(B,C) = \sqrt{(3+1)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \Rightarrow A = \dfrac{b \cdot a}{2} = \dfrac{\left(4\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{5}\right)}{2} = 20\, u^2$

e) $\overrightarrow{u_{AC}} = (7, -4), \overrightarrow{v_{BC}} = (4, -8) \Rightarrow \overrightarrow{u_{AC}} \cdot \overrightarrow{v_{BC}} = 60, \left|\overrightarrow{u_{AC}}\right| = \sqrt{65}$,

$$\left|\overrightarrow{v_{BC}}\right| = \sqrt{80} \Rightarrow \cos\alpha = \left|\frac{60}{\sqrt{65}\sqrt{80}}\right| = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right) = 33°\, 41'\, 24''$$

3. a) $\overrightarrow{u_r} = (-1, -2), \overrightarrow{u_s} = (-4, 5) \Rightarrow$ Les rectes són secants, ja que els vectors directors no són proporcionals.

$$P = \begin{cases} -2x + y + 5 = 0 \\ \dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-4}{5} \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -1 \Rightarrow P = (2, -1)$$

b) $\overrightarrow{u_r} = (1, 2), \overrightarrow{u_s} = (2, 4) \Rightarrow$ Les rectes són paral·leles, ja que els vectors directors són proporcionals. Calculem la distància entre elles:

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P = (0, 1) \in s$$

$$d(r, s) = d(r, P) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

4. a) $\overrightarrow{AB}=(5,2), \overrightarrow{DC}=(10,4), \overrightarrow{AD}=(-11,2), \overrightarrow{BC}=(-6,4) \Rightarrow$ Els costats AB i DC són paral·lels, ja que els seus vectors directors són proporcionals, mentre que els costats AD i BC no són paral·lels.

- $d(A,B)=\sqrt{(6-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{29}$
- $d(A,D)=\sqrt{(-10-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{125}$
- $d(C,D)=\sqrt{(-10-0)^2+(2-6)^2}=\sqrt{116}$
- $d(B,C)=\sqrt{(0-6)^2+(6-2)^2}=\sqrt{52}$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(5,2)\cdot(-11,2)=-51\neq 0$
- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=(-11,2)\cdot(10,4)=-102\neq 0$
- $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}=(10,4)\cdot(-6,4)=-44\neq 0$

Per tant, com que dos dels seus costats són paral·lels i cap no té la mateixa longitud ni són perpendiculars dos a dos, resulta que $ABCD$ és un trapezi escalè.

b) Altura $\rightarrow a=d(B,DC)=\dfrac{|2\cdot 6-5\cdot 2+30|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\dfrac{32}{\sqrt{29}}$ en què DC és $\dfrac{x+10}{10}=\dfrac{y-2}{4}\Rightarrow 2x-5y+30=0$, $B=d(A,B)$ i $b=d(C,D)$.

$$A=\frac{a(B+b)}{2}=\frac{\frac{32}{\sqrt{29}}\left(\sqrt{116}+\sqrt{29}\right)}{2}=48\,u^2$$

c) La recta AB és $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y}{2}\Rightarrow 2x-5y-2=0$. Busquem una recta perpendicular a AB, per tant, tindrà com a vector director $n=(2,-5)$; a més a més, sabem que passarà per D, de manera que $\dfrac{x+10}{2}=\dfrac{y-2}{-5}\Rightarrow 5x+2y+46=0$. El punt de tall entre les dues rectes és el següent:

$$\left.\begin{matrix}2x-5y-2=0\\5x+2y+46=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=-226/29\\y=-102/29\end{matrix}\right\}$$

$$H=\left(-\frac{226}{29},-\frac{102}{29}\right)$$

Sigui $D'=(x,y)$ el punt simètric de D respecte de la recta AB. Com que H és el punt mitjà de D i D' resulta que:

$$H=\left(\frac{-10+x}{2},\frac{2+y}{2}\right)=\left(-\frac{226}{29},-\frac{102}{29}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-10+x}{2}=-\dfrac{226}{29}\\[2mm]\dfrac{2+y}{2}=-\dfrac{102}{29}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-162/29\\y=-262/29\end{cases}$$

$$D'=(-162/29,-262/29)$$

5.
- La recta AB és la recta $x+4=0$, que és paral·lela a l'eix Y.
- La recta BG passa per B i té com a vector director $\overrightarrow{BG}=(2,2)\Rightarrow(x,y)=(-4,2)+(2,2)k, k\in\mathbb{R}$.
- La recta GF és la recta $y=4$, que és paral·lela a l'eix X.
- La recta FE passa per F i té com a vector director $\overrightarrow{FE}=(-1,-6)\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=1-k\\y=4-6k\end{matrix}\right\}, k\in\mathbb{R}$.
- La recta AC passa per A i té com a vector director $\overrightarrow{AC}=(5,2)\Rightarrow\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y-5}{2}$.
- La recta CD és perpendicular a la recta AC, per tant, tindrà com a vector director $\vec{n}=(2,-5)\Rightarrow m=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow y-7=-\dfrac{5}{2}(x-1)$.
- La recta DE passa pel punt D, que és la intersecció entre la recta CD i la recta $y=0$, per tant, $D=(19/5,0)$ i el seu vector director és $\overrightarrow{DE}=(-19/5,-2)\Rightarrow -10x+19y+38=0$.

$$\left.\begin{matrix}x=0\Rightarrow y=-2\\y=0\Rightarrow x=19/5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{x}{19/5}+\frac{y}{-2}=1$$

6. Triangle ABC:

- Base $\Rightarrow d(A,B)=\sqrt{(-1-2)^2+(2-5)^2}=\sqrt{18}$
- Altura $\Rightarrow d(C,AB)=\dfrac{|1\cdot(-1)+(-1)\cdot 5+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ en què la recta AB és $x-y+3=0$.

Triangle ABM, $M=(x,y)$:

- Base $\Rightarrow d(A,B)=\sqrt{18}$
- Altura $\Rightarrow d(M,AB)=\dfrac{|x-y+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|x-y+3|}{\sqrt{2}}$

$$A_{ABC}=A_{ABM}\Rightarrow\frac{\sqrt{18}\,\frac{3}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{18}\,\frac{|x-y+3|}{\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|x-y+3|=3$$

7. Calculem les equacions dels costats del triangle:

- La recta AB passa per A i té com a vector director $\overrightarrow{AB}=(2,3)\Rightarrow\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{3}\Rightarrow 3x-2y+10=0$.
- La recta BC passa per B i té com a vector director $\overrightarrow{BC}=(4,-6)\Rightarrow\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-5}{-6}\Rightarrow 3x+2y-10=0$.
- La recta AC passa per A i té com a vector director $\overrightarrow{AC}=(6,-3)\Rightarrow\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-2}{-3}\Rightarrow x+2y-2=0$.
- Un punt $P(x,y)$ pertany a les bisectrius si:

$$d(P,AB)=d(P,BC)\Rightarrow\frac{|3x-2y+10|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{|3x+2y-10|}{\sqrt{3^2+2^2}}$$

$$\begin{cases}t_1:\sqrt{13}(3x-2y+10)=\sqrt{13}(3x+2y-10)\\t_2:\sqrt{13}(3x-2y+10)=-\sqrt{13}(3x+2y-10)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_1:y=5\\t_2:x=0\end{cases}$$

$$D=\begin{cases}x=0\\x+2y-2=0\end{cases}\Rightarrow y=1\Rightarrow D=(0,1)$$

Comprovem el teorema de la bisectriu:

$$\left.\begin{array}{l} d(D,A) = \sqrt{(-2-0)^2+(2-1)^2} = \sqrt{5} \\ d(D,C) = \sqrt{(4-0)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{proporcionals}$$

$$\left.\begin{array}{l} d(B,A) = \sqrt{(-2-0)^2+(2-5)^2} = \sqrt{13} \\ d(B,C) = \sqrt{(4-0)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{52} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{proporcionals}$$

8. Les dues condicions de l'enunciat es tradueixen en:

$$\left.\begin{array}{r} r \parallel s \Rightarrow \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{-3} \\ d(O,r) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a = \dfrac{2b}{-3} \\ \dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \end{array}\right\}$$

$$a = \frac{-4}{3\sqrt{13}}, b = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

9. Calculem els peus de la perpendicular des de Q:

- La recta AC passa per A i té com a vector director $\overrightarrow{AC} = (4,-4) \Rightarrow \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-3}{-4} \Rightarrow x+y-1=0$ i una recta perpendicular a aquesta passa per Q i té vector director $\vec{n} = (-1,-1) \Rightarrow x-y-1=0$. Si intersequem aquestes dues rectes, tenim: $\left.\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1, y=0 \Rightarrow D=(1,0).$

- La recta AB passa per A i té com a vector director $\overrightarrow{AB} = (4,2) \Rightarrow \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-3}{2} \Rightarrow x-2y+8=0$ i una recta perpendicular a aquesta passa per Q i té vector director $\vec{n} = (1,-2) \Rightarrow 2x+y-11=0$. Si intersequem aquestes dues rectes, tenim:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+8=0 \\ 2x+y-11=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{14}{5}, y = \frac{27}{5} \Rightarrow E = \left(\frac{14}{5}, \frac{27}{5}\right)$$

- La recta BC passa per B i té com a vector director $\overrightarrow{BC} = (0,-6) \Rightarrow x = 2$ i una recta perpendicular a aquesta passa per Q i té vector director $\vec{n} = (1,0) \Rightarrow y = 3$. Si intersequem aquestes dues rectes, resulta que $F = (2, 3)$.

Aquests punts estan alineats si es compleix que:

$$\frac{e_1-d_1}{f_1-e_1} = \frac{e_2-d_2}{f_2-e_2} \Rightarrow \frac{14/5-1}{2-14/5} = \frac{27/5-0}{3-27/5} \Rightarrow \frac{-9}{4} = \frac{-9}{4}$$

10. Calculem les dues rectes perpendiculars a r que passen per A i per B i intersequem cadascuna amb la recta r.

- La recta perpendicular a r que passa per A té vector director $\vec{n} = (-3,7) \Rightarrow \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-5}{7} \Rightarrow 7x+3y-22=0$

- $\left.\begin{array}{l} 7x+3y-22=0 \\ -3x+7y+5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{169}{58}, y = \dfrac{31}{58}$

  $A' = \left(\dfrac{169}{58}, \dfrac{31}{58}\right)$

- La recta perpendicular a r que passa per B té vector director $\vec{n} = (-3,7) \Rightarrow \dfrac{x-8}{-3} = \dfrac{y-8}{7} \Rightarrow 7x+3y-80=0$

- $\left.\begin{array}{l} 7x+3y-80=0 \\ -3x+7y+5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{575}{58}, y = \dfrac{205}{58}$

  $B' = \left(\dfrac{575}{58}, \dfrac{205}{58}\right)$

El punt C on es reflecteix el raig és el punt mitjà del segment $A'B'$, aleshores:

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{169}{58} + \frac{575}{58}, \frac{31}{58} + \frac{205}{58}\right) = \left(\frac{186}{29}, \frac{59}{29}\right)$$

11. Busquem els costats i els vèrtexs del triangle DEF:

- La recta DE és la recta $y = 6$, paral·lela a l'eix X i $E = (9, 6)$.
- La recta EF és la recta $x = 9$, paral·lela a l'eix Y.
- La recta DF és la recta perpendicular a la recta BC. Un vector director de BC és $(2, -5)$, per tant, un vector normal serà $(5, 2)$ i la recta DF serà, aleshores: $2x - 5y + 25 = 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} D = DF \cap DE \Rightarrow \begin{cases} 2x-5y+25=0 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow D = \left(\dfrac{5}{2}, 6\right) \\ F = DF \cap EF \Rightarrow \begin{cases} 2x-5y+25=0 \\ x=9 \end{cases} \Rightarrow F = \left(9, \dfrac{43}{5}\right) \end{array}\right.$$

$$A = \frac{d(D,E)\cdot d(F,E)}{2} = \frac{\sqrt{(9-5/2)^2}\sqrt{(6-43/5)^2}}{2} = $$

$$= \frac{169}{20}u^2$$

Zona + (pàg. 207)

— **Impossible?**

- Resposta suggerida: La geometria projectiva parteix dels principis següents:
  — Dos punts defineixen una recta.
  — Tot parell de rectes es talla en un punt.
- Resposta suggerida: La geometria euclidiana és la geometria que estudia les propietats del pla i l'espai tridimensional; la geometria projectiva estudia les incidències de punts i rectes sense tenir en compte la mesura. En la projectiva, es permet demostrar tot el demostrable en euclidiana, sense haver de recórrer a una mètrica.
- Quan dues rectes són paral·leles es diu que es tallen en un punt en l'infinit conegut com a *punt impropi.*

— **Mesuradors làser de distàncies**

- Fórmula: $D = ct/2$, en què c és la velocitat de la llum i t és la quantitat de temps per al viatge d'anada i tornada entre el mesurador i la destinació.
- Substituïm 300 m en la fórmula anterior, i obtenim el temps de vol:
- $300 = ct/2 \to t = 600/c$ s, en què c és la velocitat de la llum, que equival a 299 792 458 m/s. Per tant, el temps de vol és de 2×10^{-6} segons.
- En el cas de distàncies curtes, es cometen imprecisions a l'hora de determinar el moment de la sortida i de l'arribada del feix lluminós. En el cas de distàncies llargues, hi pot haver petites variacions en la velocitat de la llum, reflexions no volgudes, etc.

- Resposta suggerida: Perquè viatgen en forma justa a relacions constants per l'atmosfera i viatgen distàncies molt més llargues sense perdre intensitat, és menys probable que es dispersi i conserva una gran part de la intensitat original que té quan es reflecteix en l'objectiu.

— **El 5è postulat d'Euclides a debat**

- Quatre primers postulats d'Euclides:
  1. Dos punts qualssevol determinen un segment de recta.
  2. Un segment de recta es pot estendre indefinidament en una línia recta.
  3. Es pot traçar una circumferència donats un centre i un radi qualssevol.
  4. Tots els angles rectes són iguals entre si.
- Reformulacions del cinquè postulat:
  — John Playfair: Per un punt exterior a una recta es pot traçar una i només una paral·lela a aquesta recta.

  — Negacions del postulat:
    - Per un punt exterior a una recta no es pot traçar cap recta paral·lela a la donada.
    - Per un punt exterior a una recta es pot traçar més d'una recta paral·lela a la donada.

  Els matemàtics més crítics sobre aquest tema van ser Giovanni G. Saccheri, Carl F. Gauss, John Playfair, Nikolai Lobatxevski, János Bolyai, Eugenio Beltrami, Karl Weierstrass, Felix Klein, Henri Poincaré i Bernhard Riemann.
- Resposta suggerida: La geometria hiperbòlica és la geometria que pren com a postulat la segona negació esmentada en el punt anterior. És la geometria intrínseca de la pseudoesfera, en què la suma dels angles d'un triangle és inferior a 180º. D'altra banda, la geometria el·líptica és la que pren com a postulat la primera negació. Per un punt exterior a una geodèsica no passa cap paral·lela a ella i la suma dels angles d'un triangle és superior a 180º.