ELS NOMBRES COMPLEXOS EN FORMA BINÒMICA

Definim $i = \sqrt{-1}$ de tal manera que tenim $i^2 = -1$

Forma binòmica d'un nombre complex : $a + bi$ amb $a \; i \; b \cdots \in \mathbb{R}$

"a" s'anomena la part real del nombre complex a+bi

"b" s'anomena la part imaginària del nombre complex a+bi

Nota : si a=0 llavors el nombre complex a+bi = bi diem que és un imaginari pur

si b=0 llavors el nombre complex a+bi = a és un nombre real

EXEMPLES :

- ***Expressa en forma binòmica els nombres complexos resultants de les operacions i digues en cas que ho sigui , si és un nombre imaginari pur o real***

$2 - \sqrt{25} = \mathbf{2 - 5 = -3} = -3 + 0i \rightarrow$ és un nombre real

$-3 + \sqrt{-25} = -3 + \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = -3 + 5i$

$\frac{1}{2} - \sqrt{-9} = \frac{1}{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \frac{1}{2} - 3i$

$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i = 0 + 4i \rightarrow$ és un nombre imaginari pur

$-0.5 + \sqrt{0.09} = \mathbf{-0.5 + 0.3} = -0.2 \rightarrow$ és un nombre real

$-0.5 + \sqrt{-0.09} = -0.5 + \sqrt{0.09} \cdot \sqrt{-1} = -0.5 + 0.3i$

$\sqrt{-10} + \sqrt{2} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{-1} + \sqrt{2} = \sqrt{10}\, i + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{10}\, i$

$-\sqrt{-24} = -\sqrt{24} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{24}\, i \rightarrow$ és un nombre imaginari pur

- ***Indica la part real i la part imaginària dels nombres complexos següents:***

$5-3i$ $\rightarrow$ part real =5 i part imaginària = -3

$\sqrt{6}i = 0+\sqrt{6}i$ $\rightarrow$ part real =0 i part imaginària = $\sqrt{6}$

$-2+\sqrt{5}i =$ $\rightarrow$ part real = -2 i part imaginària = $\sqrt{5}$

$-0.3 = -0.3+0i$ $\rightarrow$ part real = -0.3 i part imaginària = 0

- ***Resoldre les següents equacions:***

$$x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\pm i \rightarrow \begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = -i \end{cases}$$

$$x^2+5=0 \rightarrow x^2=-5 \rightarrow x=\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}i \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{5}i \\ x_2 = -\sqrt{5}i \end{cases}$$

$x^2-2x+37=0$

$$\rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-148}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-144}}{2}=\frac{2\pm 12i}{2}=\frac{\cancel{2}\cdot(1\pm 6i)}{\cancel{2}}=1\pm 6i \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1+6i \\ x_2 = 1-6i \end{cases}$$

$9x^2-36x+45=0$

$$\rightarrow x=\frac{36\pm\sqrt{1296-1620}}{18}=\frac{36\pm\sqrt{-324}}{18}=\frac{36\pm 18i}{18}=\frac{\cancel{18}(2\pm 1i)}{\cancel{18}}=2\pm i$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2+i \\ x_2 = 2-i \end{cases}$$

$2x^2-3x+5=0$

$$\rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-40}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{-31}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{31}i}{4}=\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{31}}{4}i \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{31}}{4}i \\ x_2 = \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{31}}{4}i \end{cases}$$

$x^2+x+1=0$

$$\rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$x^4+5x^2-36=0$

Fem el canvi de variable $x^2=t$ i ens queda l'equació $t^2+5t-36=0$

$$\rightarrow \quad t=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{-5\pm 13}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} t_1=4 \\ t_2=-9 \end{cases}$$

Ara desfem el canvi de variable

$$\rightarrow \quad per\ t_1=4 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad per\ t_2=-9 \rightarrow x^2=-9 \rightarrow x=\pm 3i \rightarrow \begin{cases} x_3=3i \\ x_4=-3i \end{cases}$$

$x^4+21x^2+80=0$

Fem el canvi de variable $x^2=t$ i ens queda l'equació $t^2+21t+80=0$

$$\rightarrow \quad t=\frac{-21\pm\sqrt{441-320}}{2}=\frac{-21\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{-21\pm 11}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} t_1=-5 \\ t_2=-16 \end{cases}$$

Ara desfem el canvi de variable

$$\rightarrow \quad per\ t_1=-5 \rightarrow x^2=-5 \rightarrow x=\pm\sqrt{5}i \rightarrow \begin{cases} x_1=\sqrt{5}i \\ x_2=-\sqrt{5}i \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad per\ t_2=-16 \rightarrow x^2=-16 \rightarrow x=\pm 4i \rightarrow \begin{cases} x_3=4i \\ x_4=-4i \end{cases}$$

OPERACIONS DELS COMPLEXOS EN FORMA BINÒMICA

- $(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$
- $(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i$
- $c\cdot(a+bi)=ca+cbi \quad \forall c\in\mathbb{R}$
- $(a+bi)\cdot(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$

  Raonament

  $(a+bi)\cdot(a'+b'i)=aa'+ab'i+ba'i+bb'i^2=aa'+ab'i+ba'i+bb'\cdot(-1)=$
  $aa'+ab'i+ba'i-bb'=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$

- $(a+bi):(a'+b'i)=\dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}i \quad amb\ a'+b'i\neq 0$

  Raonament

  $(a+bi):(a'+b'i)=\dfrac{a+bi}{a'+b'i}=\dfrac{(a+bi)\cdot(a'-b'i)}{(a'+b'i)\cdot(a'-b'i)}=\dfrac{(aa'+bb')+(a'b-ab')i}{a'^2+b'^2}=$
  $\dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}i$

CONJUGAT, OPOSAT I INVERS D'UN NOMBRE COMPLEX

Si $z=a+bi$ és un nombre complex, llavors :

- El seu conjugat és $\overline{z}=a-bi$
- El seu oposat és $-z=-a-bi$
- El seu invers és $z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$

EXEMPLES :

- ***Donats els nombres complexos z =2-i , w = -5+3i i t = -2i , efectua les operacions que s'indiquen***

$z+3w=(2-i)+3\cdot(-5+3i)=2-i-15+9i=(2-15)+(-1+9)i=-13+8i$

$\overline{z}\cdot z=(2+i)\cdot(2-i)=2^2-i^2=4-(-1)=5$

$$z\cdot w+\frac{1}{2}t=(2-i)\cdot(-5+3i)+\frac{1}{2}(-2i)=-10+6i+5i-3i^2=-10+6i+5i+3=$$
$$-7+11i$$

$$t:w=\frac{t}{w}=\frac{-2i}{-5+3i}=\frac{-2i\cdot(-5-3i)}{(-5+3i)\cdot(-5-3i)}=\frac{10i+6i^2}{(-5)^2-(3i)^2}=\frac{10i-6}{25+9}=\frac{10i-6}{34}=$$
$$\frac{\cancel{2}\cdot(-3+5i)}{\cancel{2}\cdot 17}=\frac{-3+5i}{17}=-\frac{3}{17}+\frac{5}{17}i$$

$$w^2:t-2zt=(-5+3i)(-5+3i):(-2i)-2(2-i)(-2i)=(5^2+(3i)^2-30i):(-2i)$$
$$-2\cdot(-4i+2i^2)=(25-9-30i):(-2i)-2\cdot(-4i-2)=$$
$$\frac{16-30i}{-2i}+8i+4=\frac{(16-30i)\cdot 2i}{-2i\cdot 2i}+8i+4=\frac{32i+60}{4}+8i+4=$$
$$\frac{\cancel{4}\cdot(8i+15)}{\cancel{4}}+8i+4=8i+15+8i+4=19+16i$$

$$t^7=(-2i)^7=(-2)^7\cdot i^7=-128\cdot(-i)=128i$$

$$\overline{w}^{-1}=\frac{1}{\overline{w}}=\frac{1}{-5-3i}=\frac{1\cdot(-5+3i)}{(-5-3i)\cdot(-5+3i)}=\frac{-5+3i}{25+9}=\frac{-5+3i}{34}=-\frac{5}{34}+\frac{3}{34}i$$

$$\overline{w}:\overline{(z+3t)}=$$
$$(-5-3i):\overline{(2-i+3\cdot(-2i))}=(-5-3i):\overline{(2-i-6i)}=(-5-3i):\overline{(2-7i)}=$$
$$(-5-3i):(2+7i)=\frac{(-5-3i)\cdot(2-7i)}{(2+7i)\cdot(2-7i)}=\frac{-10+35i-6i+21i^2}{4+49}=$$
$$\frac{-31+29i}{53}=-\frac{31}{53}+\frac{29}{53}i$$

Observa:

$$i^1=i \qquad i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$$
$$i^2=-1 \qquad i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$$
$$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i \qquad i^7=i^4\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1 \qquad i^8=i^4\cdot i^4=1\cdot 1=1$$

En general $i^N=i^R$ per $N>0$ on

$$\begin{array}{l|l} N & 4 \\ \hline \cancel{R} & Q \end{array}$$

$i^{102} = i^{2} = -1$

$$\begin{array}{l|l} 102 & 4 \\ \hline 2 & 25 \end{array}$$

$i^{203} = i^{3} = -i$

$$\begin{array}{l|l} 203 & 4 \\ \hline 3 & 50 \end{array}$$

$i^{400} = i^{0} = 1$

$$\begin{array}{l|l} 400 & 4 \\ \hline 0 & 100 \end{array}$$

$i^{101} = i^{1} = i$

$$\begin{array}{l|l} 101 & 4 \\ \hline 1 & 25 \end{array}$$