VECTORS AL PLA : OBSERVACIONS

1. Sobre el significat dels vectors, de les operacions amb vectors, i sobre el concepte de combinació lineal.

Aquests temes s'entenen prou bé al llibre. Si sabeu obtenir les combinacions que es demanen al problema nº 32 (pàgina136) i als problemes 34 i 35 (pàgina 136), significarà que l'heu entès tot molt bé.

Però, com que són una mica difícils, tampoc us preocupeu massa si us costa trobar-les. N'hi haurà prou amb que "ho veieu clar" després de mirar les solucions.

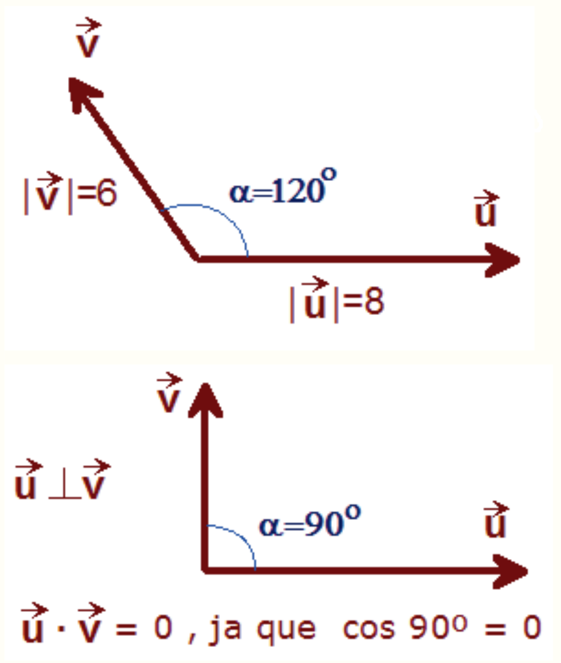
2. Sobre el producte escalar i les seves aplicacions

La utilitat bàsica del producte escalar és que *permet calcular l'angle de dos vectors a partir de les seves components, o saber si són perpendiculars* (angle de 90º).

Per aprendre a fer això no cal saber les propietats del producte escalar, ni la seva "interpretació geomètrica", ni la demostració de com és la seva "expressió analítica en una base ortonormal": Aquesta última només cal saber aplicar-la, és a dir, saber com es calcula el producte escalar a partir de les components dels vectors.

Sobre com es calcula el mòdul d'un vector, millor mireu la "demostració" geomètrica que proposem més endavant, més fàcil d'entendre que la del llibre.

Definitivament, ni ha prou amb que sapigueu que:



El producte de dos vectors és, per definició, *el nombre que resulta de multiplicar els seus mòduls pel cosinus de l'angle que formen:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Per aplicar aquesta definició cal saber els mòduls dels vectors i l'angle que formen. Per exemple, amb els vectors de la figura adjunta es té:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \cdot 6 \cdot \cos 120º = 6 \cdot 8 \cdot (-1/2) = -24$$

A més, tal com remarca el llibre i suggereix la segona figura, és molt important que recordeu que

Vectors perpendiculars ≡
Producte escalar zero

Normalment haureu de treballar amb vectors donats per les seves components, (u_1, u_2), (v_1, v_2), en una base ortonormal. Heu de saber que, en aquesta situació, el producte escalar es calcula fent

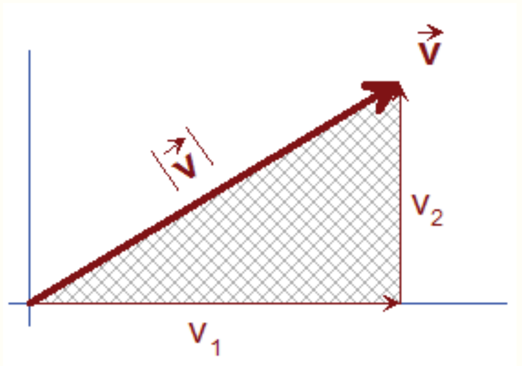
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2$$

Per exemple, (-2,5)·(5,6) = -2·5+5·6 = -10+30 = 20.

Podeu considerar aquesta fórmula com una definició "alternativa" del producte, útil quan els vectors venen donats per les seves components. I, com a resultat de comparar o "combinar" les dues "fórmules" del producte escalar surt la **fórmula pel càlcul de l'angle de dos vectors** (a partir de les components),

$$\cos\alpha = \frac{u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

(on els mòduls dels vectors es calculen a part, tal com de seguida veiem).



La figura mostra que el mòdul ó "longitud" d'un vector es pot calcular com a hipotenusa d'un triangle rectangle on els catets mesuren els valors de les components del vector. Per tant, aplicant el Teorema de Pitàgores, és clar que s'ha de complir

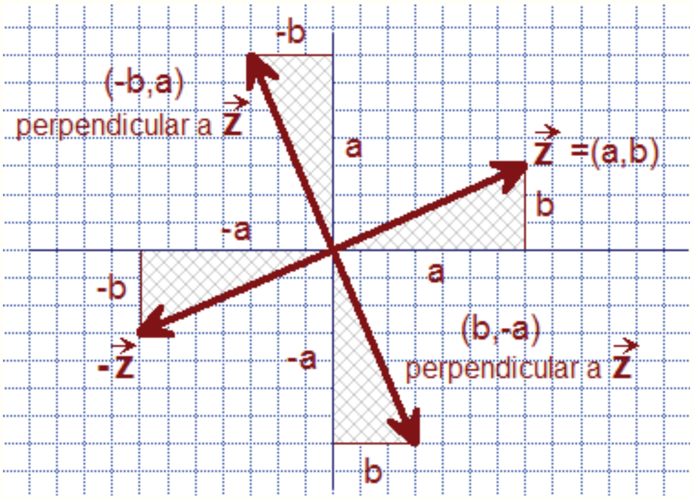
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Ara observa que, lligant tot el que hem dit, podem fer diferents coses com, per exemple,

- *Calcular mòduls de vectors*: Si $\vec{u}$=(-2,5) llavors $|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$
- *Calcular angles de vectors*: Comprova que si $\vec{u}$=(-2,5) i $\vec{v}$=(5,6) llavors

$$\cos\alpha = \frac{20}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{61}} = 0{,}4755 \Rightarrow \alpha = 61^{\circ}\,36'\,25{,}13''$$

- *Saber si dos vectors són perpendiculars*: $\vec{u}$=(-2,5) i $\vec{v}$=(15,6) ho són, ja que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = -2·15+5·6 = -30+30 = 0 (què tal si els representeu?)



Aquesta figura us ajudarà a memoritzar una regla senzilla i pràctica per obtenir vectors perpendiculars a un altre.

Per ajudar a memoritzar la figura i la regla l'anomenem "regla del molinet":

S'obté un vector perpendicular a $\vec{\mathbf{z}}$**=**(a,b) *intercanviat les seves components i canviant una d'elles de signe.*

Per exemple, si $\vec{\mathbf{z}}$**=**(7,3), els vectors (3,-7) i (-3,7) són perpendiculars a $\vec{\mathbf{z}}$ (Comproveu-lo també a la figura)

3. Sobre les diferents formes de l'equació d'una recta

Imagino que ja sabíeu que els punts (*x*,*y*) del pla que compleixen fórmules dels tipus $Ax + By + C = 0$ (1) ó $y = mx + n$ (2) formen rectes. De fet, es pot passar d'un tipus d'equació a l'altra aïllant la *y*, tal com fem en

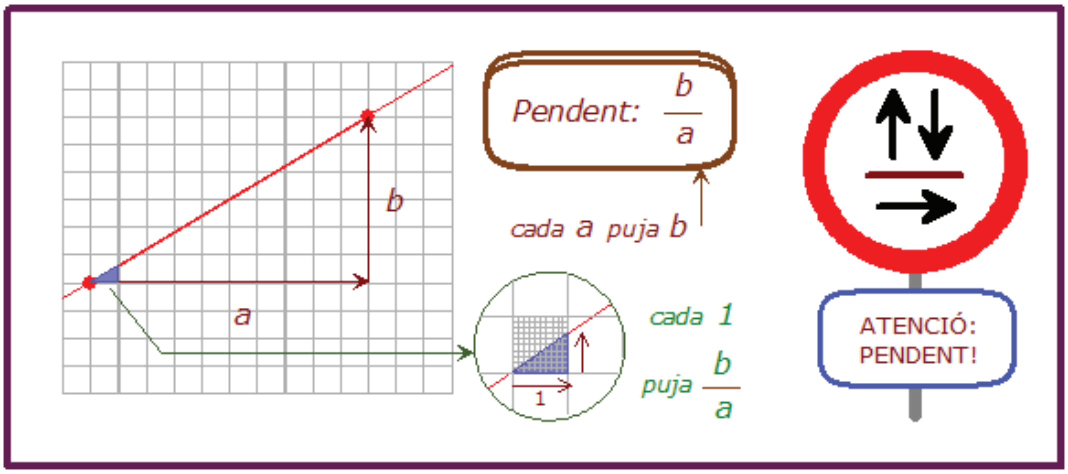
$$4x + 3y - 23 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = -4x + 23 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{3}$$

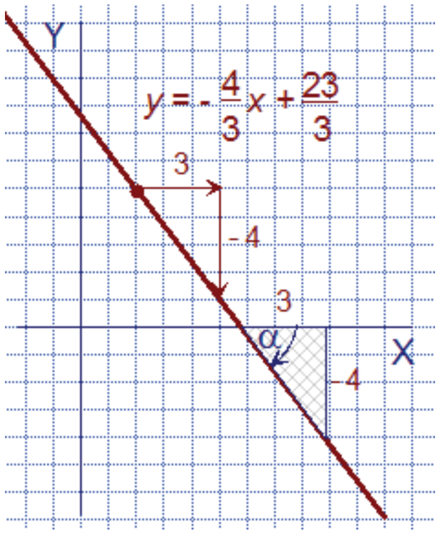
Això ajuda a representar gràficament la recta considerant, per exemple,

que passa, entre d'altres, pel punt (2,5) (obtingut provant de substituir *x* per un valor que faci enter el valor de la *y*, fins trobar $x = 2$)

i que el seu pendent és m = -4/3, la qual cosa significa que "per cada tres unitats d'avenç horitzontal, baixa quatre verticalment".

Els que no recordàveu o no coneixíeu aquesta interpretació del pendent fareu bé en mirar-vos el quadre de la pàgina següent:





De fet, en aquest curs ja heu repassat abans tot això, en fer les interpretacions geomètriques de sistemes lineals; però, per si de cas, aquí teniu la representació gràfica de la recta anterior.

També aprofitem per il·lustrar quelcom que és important, però que el llibre "passa una mica de llarg", i és que:

> *El pendent d'una recta és la tangent de l'angle orientat* α *(positiu o negatiu) que aquesta forma amb el semieix OX positiu.*

I en el cas d'aquesta recta, és l'angle que compleix

$$\tan\alpha = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -53^o\ 7'48,37''$$

Si escollim l'angle mesurat en sentit antihorari (positiu) podem dir que aquest mesura: $-53°7'48,37''+180° = 126°52'11,63''$

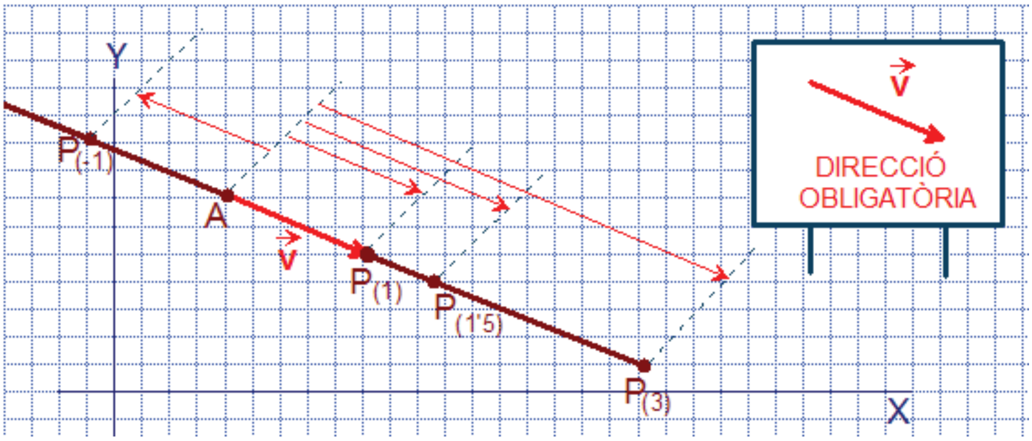
En aquesta lliçó el llibre presenta tot un seguit de formes de l'equació d'una recta, i les dues recordades aquí queden "en última posició" (De fet, la forma $y = mx + n$ o *explícita*, quasi bé la ignora, però és igual que la que anomena *punt-pendent*). Malgrat això són les dues formes d'equació en què hauries de parar més atenció.

Això no significa que no hàgiu de conèixer les altres formes (oblideu-vos, si de cas, de la *canònica* o *segmentària*), però n'hi ha prou amb que sabeu trobar-les, reconèixer-les i convertir-les en alguna de les formes *Ax+By+C=0* (forma *general*, *cartesiana* o *implícita*) i $y = mx + n$ (*explícita*).

També es bo observar que la primera forma estudiada al llibre (equació *vectorial*) respon perfectament a "una bona idea intuïtiva" del que és una recta:

> *Una recta la formen els punts que s'obtenen en sortir d'un punt* A *i seguir la direcció d'un vector* $\vec{v}$.

El dibuix de la pàgina desenvolupa "al màxim" aquesta idea intuïtiva:



Al dibuix podeu veure, amb tota mena d'indicacions, la recta que s'obté

"sortint" del punt $A = (a_1,a_2) = (4,7)$

i "seguint la direcció" del vector $\vec{v} = (v_1,v_2) = (5,-2)$

En seguir aquesta recta "passem" pels punts de la forma

$$P = (x,y) \;=\; A + k\cdot\vec{v} \;=\; (a_1,a_2) \;+\; k\cdot(v_1,v_2)$$

(punt pel qual passem) (punt de sortida) ("camí fet", en la direcció de $\vec{v}$)

o sigui, passem, entre d'altres, per aquests punts:

$P_{(1)} = A + 1\cdot\vec{v}$ **=** $(4,7) + (5,-2) = (9,5)$

$P_{(1'5)} = A + 1'5\cdot\vec{v}$ **=** $(4,7) + (7'5,-3) = (11'5,4)$

$P_{(3)} = A + 3\cdot\vec{v}$ **=** $(4,7) + (15,-6) = (19,1)$

$P_{(-1)} = A - 1\cdot\vec{v}$ **=** $(4,7) - (5,-2) = (-1,9)$

I observeu, de passada, que la recta té pendent $m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-2}{5}$.

Havent entès correctament l'equació vectorial, les altres formes són fàcils d'entendre (tot i que demana el seu temps).

4. Observacions finals

A més del que ja hem dit, només ens queda assenyalar certes coses que són realment importants, i altres que no cal mirar, o que cal "reduir exclusivament a una fórmula i/o una manera de procedir".

Aquests són els punts les observacions que hem de fer:

- *És particularment important conèixer i saber aplicar la fórmula punt-pendent de l'equació d'una recta*. La necessitareu en capítols posteriors (DERIVADES).
- Per trobar una paral·lela a una altra recta que passi per un punt A, només cal utilitzar el fet evident de que, si són paral·leles, han de tenir el mateix pendent, i aplicar la fórmula punt–pendent al punt A, per trobar la paral·lela.

- La fórmula de l'angle entre dues rectes es demana. Com reconèixer si dues rectes són perpendiculars i com trobar-ne, també es demana.

- Oblideu-vos de tot el que fa el llibre per demostrar o justificar la fórmula per càlcul de la distància d'un punt a una recta. Limiteu-vos a aprendre-la de memòria, en la forma $d(P,r)=\frac{|Ap_1+Bp_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, i a saber aplicar-la (Per la qual cosa només cal saber què significa cada "lletra" de la fórmula; és a dir, heu de saber que la equació general de la recta r és: Ax+By+C=0 i que les coordenades del punt P són (p_1, p_2)).