2.3 Vectors en el pla

Prenent com a sistema de referència en el pla dos eixos perpendiculars amb una unitat donada, el vector $\vec{v}$ es pot representar mitjançant una fletxa i un parell de punts anomenats origen(d'on surt la fletxa) i extrem(on acaba la fletxa), respectivament, del vector.

Si designem per a i b, respectivament, les diferències

$$a = x_2 - x_1$$

$$b = y_2 - y_1$$

entre les coordenades de l'extrem i les de l'origen del vector (fig. [1]), podem donar la definició:

Un vector del pla és un parell ordenat (**a**, **b**) de nombres reals, on **a** i **b** són el primer i el segon components, respectivament, obtinguts amb

$$a = x_2 - x_1$$

$$b = y_2 - y_1$$

(fig. [1])

on (x_1, y_1) i (x_2, y_2) són l'origen i l'extrem donats.

Si considerem el seu origen i el seu extrem, aleshores parlarem del **representant fix** de $\vec{v}$ que té aquest origen i aquest extrem.

El vector representat a la figura [2] té

- per origen el punt (2, 2)
- per extrem el punt (5, 4)
- per components el parell (3, 2)
- per tant, és un representant fix de $\vec{v}$=(3, 2)

VECTORS FIXOS EQUIPOL·LENTS

Sempre que no es digui el contrari agafarem com a representant d'un vector la fletxa que té per origen el punt(0, 0).

Observeu que es poden dibuixar infinites fletxes diferents, amb origens diferents, per representar un mateix vector. *Totes aquestes fletxes es diuen vectors fixos equipol·lents.* Cadascun d'aquests vectors és un representant fix d'un mateix vector que tot seguit, en l'explicació que segueix a les figures, anomenarem ***vector lliure*** .

Si per representar un vector

escollim el **representant** amb origen en el punt (0, 0), aleshores les coordenades de l'extrem coincideixen amb els components de :

$$a = a_1$$

$$b = b_1$$

Fixeu-vos també en la figura [4], on

$$a = a_1 = 3$$

$$b = b_1 = 2$$

Vectors del pla (Vectors lliures del pla)

Tal com s'ha dit al començament, un vector del pla és un parell ordenat (**a**, **b**) de nombres reals on **a** i **b** són el primer i el segon components, respectivament, del vector.

$$\vec{v}$$

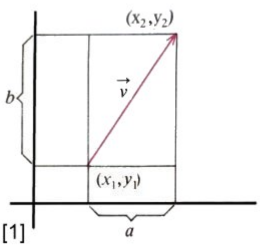
(figs. [1] i [4])

Aquests components són els que s'obtenen en fer les diferències

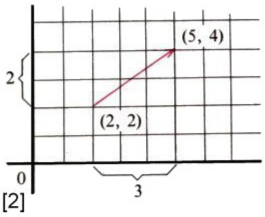
$$a = x_2 - x_1$$

$$b = y_2 - y_1$$

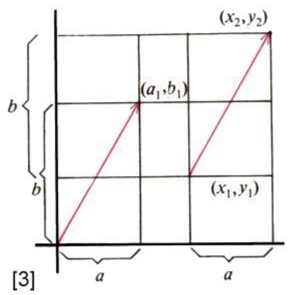
entre les coordenades de l'extrem i de l'origen de cadascun dels vectors representants fixos.



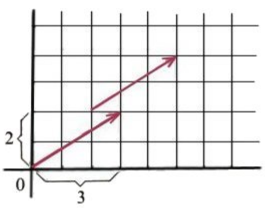
[1]



[2]



[3]



[4]

2.3.1 Mòdul, direcció i sentit d'un vector

Mòdul

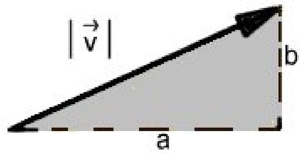
A la longitud del vector

$$\overrightarrow{v}$$

li direm mòdul de $\overrightarrow{v}$ i el designarem per $|\overrightarrow{v}|$.

En general, si $\overrightarrow{v}$ = (a, b) és

$$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{a^2+b^2}$$



Exemple 1

Trobeu el mòdul del vector $\overrightarrow{v}$ = (3, 4)

Resolució:

!

Un vector es diu **unitari** si el seu mòdul és igual a 1.

Pel teorema de Pitàgores és fàcil de trobar el mòdul de $\vec{v}$.

$$|\overrightarrow{v}|$$

$$=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

Exemple 2

El vector $\overrightarrow{v}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, és unitari?

Resolució:

Sí que és unitari perquè el seu mòdul és igual a 1. Calculem-lo:

$$|\overrightarrow{v}|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}}=1$$

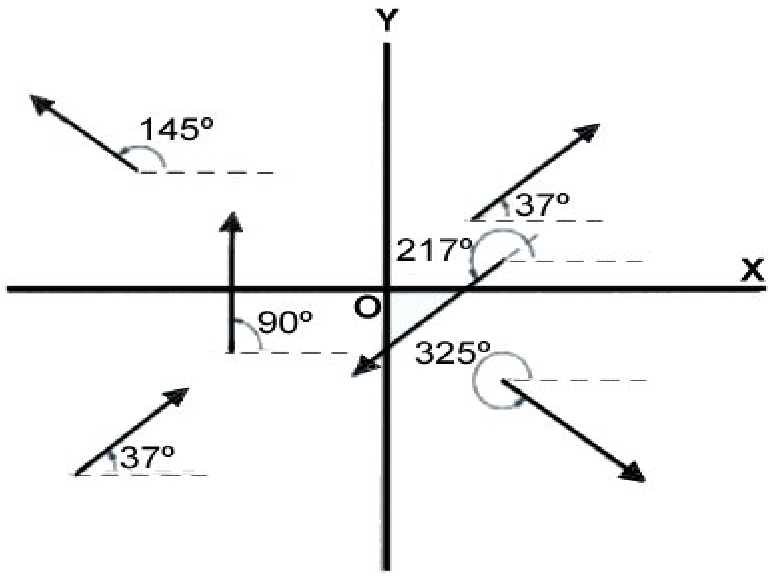
Direcció i sentit

* Si el vector $\overrightarrow{v}$ = (a, b) forma un angle x, positiu, amb la semirecta +0X, quan es calcula

$$\tan x = \frac{b}{a}$$

s'obté la *direcció* del vector.

* Els signes dels components del vector determinen el seu *sentit*.



!

L'angle que aquests vectors formen amb la semirecta +0X és el que formen amb la semirecta paral·lela a+0X, traçada per l'origen de cada vector.

El coneixement d'aquest angle ens permet decidir quan dos vectors tenen la mateixa direcció i quan no; i entre els que tenen la mateixa direcció, quins tenen el mateix sentit.

A la figura anterior tenim exemples de com comparar les direccions i sentits d'alguns vectors

1. Tots els vectors que formen un angle de 37º amb +0X tenen igual direcció i igual sentit.

2. Els vectors que formen amb +0X angles de 37° i 217° tenen igual direcció i sentit oposat (és 217° = 37°+180°). Aixi mateix, els vectors que formen amb +0X angles de 145° i 325° tenen la mateixa direcció i sentit oposat.

3. Els vectors que formen angles de 37° i 90° tenen diferent direcció.

2.3.2 Suma de vectors

Donats dos vectors del pla mitjançant els seus components

$$\overrightarrow{v} = (a, b)$$

$$\overrightarrow{w} = (c, d)$$

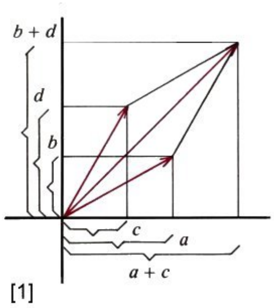
definim com a **vector suma**

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

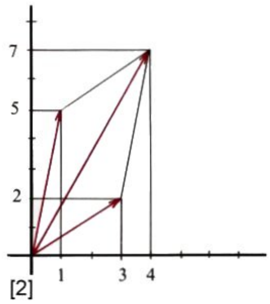
el vector que té per components la suma dels components dels vectors donats

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (a + c, b + d)$$

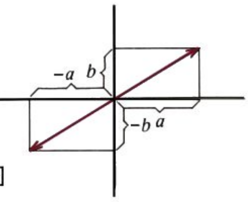
(fig. [1])



[1]



[2]



[3]

La suma de vectors satisfà les següents propietats:

- Associativa:

$$(\overrightarrow{t} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{t} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$$

- Commutativa:

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$$

- L'element neutre de la suma de vectors és el vector nul.

$$\overrightarrow{0} = (0, 0)$$

- El vector oposat: Per a cada vector $\overrightarrow{v} = (a, b)$ existeix un oposat, $\overrightarrow{-v} = (-a, -b)$, és a dir, un vector que sumat amb el primer dóna com a resultat l'element neutre (fig. [3]). Evidentment $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{-v}$ tenen igual mòdul, igual direcció i sentits oposats.

Gràficament és fàcil veure que el vector suma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ coincideix en mòdul, direcció i sentit amb el vector traçat sobre la diagonal del paral·lelogram, construït a partir dels dos vectors sumands (Regla del paral·lelogram, fig. [1]).

(A cada propietat es poden plantejar i resoldre exercicis per verificar-les, tal com ho hem fet en els exemples següents.)

Exemple 1

Sumeu els vectors $\overrightarrow{v} = (3,2)$ i $\overrightarrow{w} = (1,5)$

Resolució:

Si volem sumar els vectors $\overrightarrow{v} = (3,2)$ i $\overrightarrow{w} = (1,5)$, aleshores tenim que:

$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (3+1, 2+5) = (4,7)$(fig. [2])

Exemple 2

Trobeu el vector oposat a $\overrightarrow{v} = (3,2)$

Resolució:

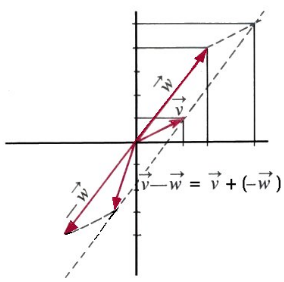
Per a $\overrightarrow{v} = (3,2)$ és $\overrightarrow{-v}$ = (-3,-2)ja que (3, 2)+ (—3,—2) = (0,0) (fig. [3])

Exemple 3

Si $\overrightarrow{v} = (2,1)$ i $\overrightarrow{w} = (3,4)$, trobeu el vector diferència $\overrightarrow{v} — \overrightarrow{w}$

Resolució:

Si volem calcular la diferència dels vectors $\overrightarrow{v}$ = (2,1) i $\overrightarrow{w}$ = (3,4) aleshores tenim que:



$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (2-3, 1-4) = (-1, -3)$

Gràficament, el vector diferència coincideix en mòdul, direcció i sentit amb el vector construït a partir dels dos vectors sumands

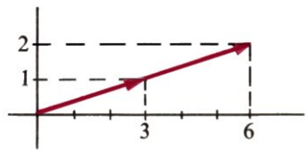
$$\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{-w})$$

que es forma sobre la diagonal menor del paral·lelogram (Regla del paral·lelogram).

2.3.3 Producte d'un vector per un nombre

Per a tot nombre real **m** i tot vector $\overrightarrow{v} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ definim el producte **m**· $\overrightarrow{v}$ com el vector que té com a 1r i 2n components els resultats de multiplicar els de $\overrightarrow{v}$, 1r i 2n components respectivament, per **m**:

$$\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{v} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{m} \cdot \mathbf{b})$$



Això equival a la suma de **m** vectors iguals a $\overrightarrow{v}$.

(El símbol · es fa servir per a aquesta operació, el producte d'un nombre per un vector que estem estudiant, per distingir-lo del producte entre dos nombres reals).

El producte d'un vector per un nombre real se'l coneix també com a **producte d'un vector per un escalar**.

Exemple 1

Si $\overrightarrow{v} = (3, 1)$, calculeu: 2· $\overrightarrow{v}$

Resolució:

Si $\overrightarrow{v} = (3, 1)$, el producte de $\overrightarrow{v}$ per 2 serà:

2· $\overrightarrow{v}$ = 2·(3,1) = (2·3,2·1) = (6,2)

2.4 Geometria amb coordenades

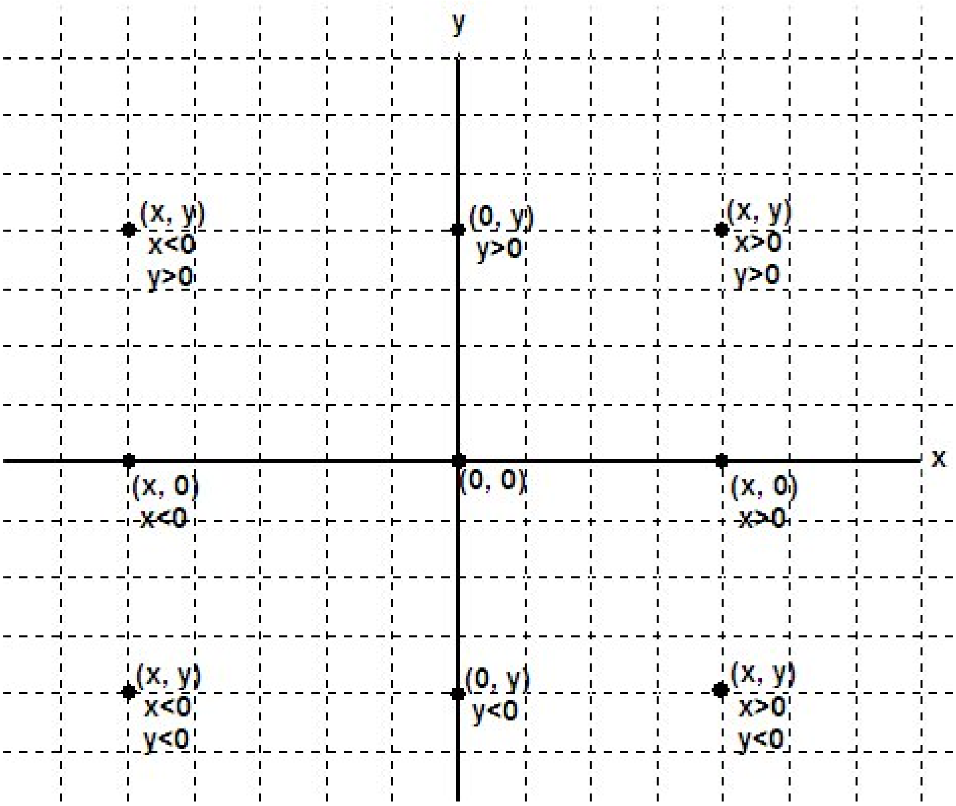
En un pla tracem dues rectes perpendiculars (eixos) —que, per conveni, es tracen de manera que una d'elles sigui horitzontal i l'altra vertical—, i cada punt del pla queda unívocament determinat per les distàncies d'aquest punt a cadascun dels eixos, sempre que es doni també un *criteri per determinar sobre quin semiplà determinat per cadascuna de les rectes cal prendre aquesta distància, criteri que ve donat per un signe i que expliquem a continuació* en el quadre ressaltat següent: Aquest parell de nombres, les coordenades, quedarà representat per un parell ordenat (**x**,**y**), sent **x** la distància a un dels eixos (per conveni serà la distància a l'eix vertical) i **y** la distància a l'altre eix (a l'horitzontal). El conjunt 'aquests parells ordenats (**x**,**y**) s'anomena *pla de coordenades* o, si ens referim als eixos horitzontal i vertical amb què posicionem els punts, *eixos de coordenades* o també *eixos cartesians*.

!

En la coordenada **x**, el signe positiu (que sol ometre's) significa que la distància es pren cap a la dreta de l'eix horitzontal (eix de les abscisses), i el signe negatiu (mai s'omet) indica que la distància es pren cap a l'esquerra. Per a la coordenada **y**, el signe positiu (també se sol ometre) indica que la distància es pren cap amunt de l'eix vertical (eix d'ordenades), prenent-se cap avall si el signe és negatiu (tampoc s'omet mai en aquest cas). A la coordenada **x** se l'anomena *abscissa* del punt, mentre que a la **y** se l'anomena *ordenada* del punt.

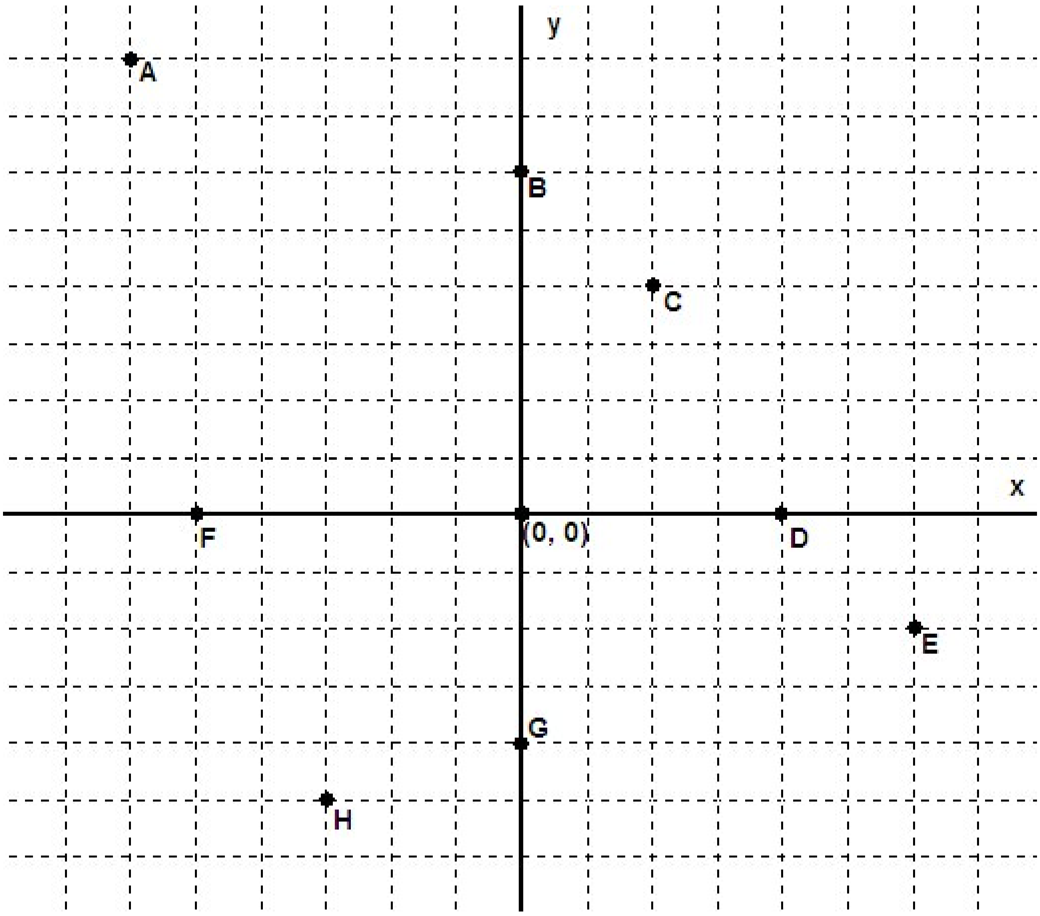
Els punts de l'eix d'abscisses tenen, per tant, ordenada igual a **0**, així que seran de la forma (**x**,**0**); d'altra banda, els de l'eix d'ordenades tindran abscissa igual a **0**, per tant, seran de la forma (**0**,**y**).

El punt on ambdós eixos es creuen tindrà per tant distancia **0** a cadascun dels eixos, ja que la seva abscissa serà **0** i la seva ordenada també serà **0**. A aquest punt —el (**0**,**0**)— se'l denomina *origen de coordenades*.



Exemple 1

Poseu raonadament les coordenades dels punts **A**, **B**, **C**,..., **H** situats en el pla de coordenades següent:



Resolució:

a) A(-6, 8): Des de l'origen de coordenades (0, 0) ens desplacem horitzontalment sobre l'eix X, cap a l'esquerra, és a dir, en la zona de valors negatius, fins arribar a la línia vertical on és el punt A: som al **- 6**, és a dir, a l'abscissa **-6**.

Igualment, des de l'origen de coordenades ens desplacem verticalment cap amunt sobre 'eix Y, en la zona positiva, fins arribar a la línia horitzontal on és el punt A: som al **+8**, és a dir, a l'ordenada **8**.

b) B(0, 6): Des de l'origen de coordenades ens desplacem verticalment cap amunt sobre l'eix Y, en la zona de valors positius, fins arribar a la línia horitzontal on és el punt B: som al **+6**, és a dir, a l'ordenada **6**. Com el punt B és sobre l'eix Y, no es possible desplaçar-se ni cap a la dreta ni cap a l'esquerra sobre l'eix X; per tant, l'abscissa val x=0.

Amb raonaments semblants situarem les coordenades de la resta de punts, com es veu en el següent pla de coordenades: