7 # Vectors

En context (pàg. 165)

a) Resposta oberta a manera de reflexió individual que pot servir d'introducció als vectors.

b) En la pàgina web següent, es pot trobar informació sobre vectors biològics:

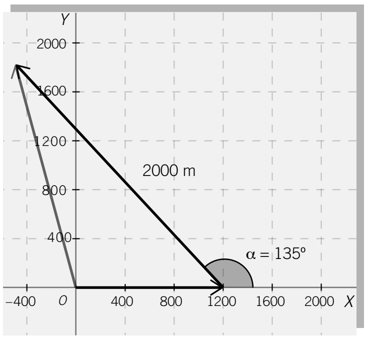
http://links.edebe.com/zfcz3w

Internet (pàg. 167)

— L'equipolència de dos vectors es demostra unint-ne els orígens i els extrems respectius. Si el polígon resultant és un paral·lelogram, els vectors són equipolents.

Problemes resolts (pàgs. 175 a 177)

1.



El desplaçament resultant és la suma dels vectors que representen cadascun dels sentits de moviment d'en Joan i en Pere. El mòdul dels recorreguts és de 1 200 m i 2 000 m; aleshores, la suma va des de l'origen del primer vector fins a l'extrem del segon vector i té un valor de 3 200 m.

2. Sigui $B(x, y)$ l'extrem del vector $\overrightarrow{AB}$, aleshores:

$$\overrightarrow{AB} = (-3,-1) \Rightarrow B - A = (x,y) - (1,2) = (-3,-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -3 \\ y - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -2,\ y = 1 \Rightarrow B(-2,1)$$

3. Per a veure si aquests punts formen un paral·lelogram, hem de veure si els costats oposats tenen la mateixa longitud. És a dir, els costats AB i CD han de tenir el mateix mòdul, i els costats AC i BD, també. Vegem-ho:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,4) - (0,0) = (0,4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$
$$\overrightarrow{CD} = D - C = (2,6) - (2,3) = (0,3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,3) - (0,0) = (2,3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$
$$\overrightarrow{BD} = D - B = (2,6) - (0,4) = (2,2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

Com que els mòduls no són iguals, significa que els costats oposats no tenen la mateixa longitud; per tant, aquests punts no formen un paral·lelogram.

4. Per trobar les components del vector $\vec{u}$ a la base $\{\vec{v}, \vec{w}\}$, hem d'assegurar que els vectors que formen la base són linealment independents i, a continuació, expressar el vector $\vec{u}$ com a combinació lineal de $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Per a veure això, s'ha de comprovar que la relació $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = 0$ només es compleix si a i b són tots dos iguals a 0. Vegem-ho:

$$a \cdot (1,0) + b \cdot (2,6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = a + 2b \\ 0 = 6b \end{cases} \Rightarrow a = 0,\ b = 0$$

Com que l'única solució és $a = 0$ i $b = 0$, els vectors $\vec{w}$ i $\vec{v}$ formen una base.

Ara, expressem el vector $\vec{u}$ com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

$$\vec{u} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} \Rightarrow (2,3) = a \cdot (1,0) + b \cdot (2,6) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = a + 2b \\ 3 = 6b \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{u} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

5. Per comprovar que els vectors $\vec{w}$ i $\vec{v}$ no formen una base hem de veure si són linealment dependents. Per a veure això, s'ha de comprovar que la relació $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = 0$ es compleix si a i b són no nuls. Vegem-ho:

$$a \cdot (1,1) + b \cdot (-2,-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = a - 2b \\ 0 = a - 2b \end{cases} \Rightarrow a = 2b$$

Com que això es compleix per a qualsevol valor de a i de b, aleshores els vectors $\vec{w}$ i $\vec{v}$ no formen una base de V_2.

6. Dos vectors són perpendiculars si el seu producte escalar és zero. Així, calculem el producte escalar dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1,k) \cdot (12 + k, k) = -12 - k + k^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k = -3,\ k = 4$$

7. a) Dos vectors són perpendiculars si el seu producte escalar és zero.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3,-4) \cdot (5,k) = 15 - 4k = 0 \Rightarrow k = 15/4$$

b) Dos vectors són paral·lels si es compleix que:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{-4}{k} \Rightarrow k = -\frac{20}{3}$$

c) Els dos vectors formen un angle de 180° si es compleix el següent:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 180°$$
$$(3,-4) \cdot (5,k) = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5^2 + k^2} \cos 180°$$
$$\Rightarrow 15 - 4k = 5 \cdot \sqrt{25 + k^2} \cdot (-1) \Rightarrow 15 - 4k = -5\sqrt{25 + k^2}$$
$$\Rightarrow (15 - 4k)^2 = 25(25 + k^2) \Rightarrow k = -20/3$$

8. Per a calcular l'angle, hem de saber quins vectors formen l'angle. Un dels vectors és $\overrightarrow{AB}$ i l'altre vector és el que té com a origen el punt A i com a extrem el punt $C = (0, 12)$, per exemple, ja que aquest vector és horitzontal.

$$\overrightarrow{AB} = (12, 20) - (-18, 12) = (30, 8)$$
$$\overrightarrow{AC} = (0, 12) - (-18, 12) = (18, 0)$$
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{30 \cdot 18 + 8 \cdot 0}{\sqrt{30^2 + 8^2} \cdot \sqrt{18^2 + 0^2}} = \frac{30}{\sqrt{964}}$$
$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{30}{\sqrt{964}}\right) = 14{,}93°$$

9. Calculem l'angle que formen els vectors:

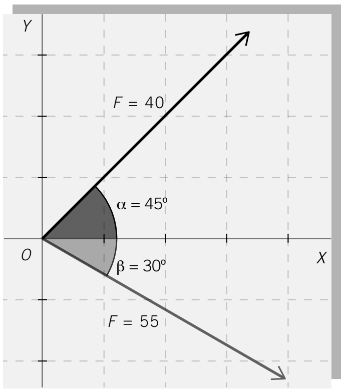
$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{6 \cdot 8 + 8 \cdot 4}{\sqrt{6^2 + 8^2} \cdot \sqrt{8^2 + 4^2}} = \frac{80}{10 \cdot \sqrt{80}} =$$
$$= \frac{\sqrt{80}}{10}$$
$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{80}}{10}\right) = 26{,}57°$$

Les components del vector resultant que s'aplica al vaixell és la suma dels dos vectors:

$$\vec{v} + \vec{w} = (6, 8) + (8, 4) = (14, 12) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{14^2 + 12^2} = 18{,}44$$

10. Per calcular la força que s'aplicarà a la barcassa, calculem la força vertical i la força horitzontal aplicada.

Considerem el dibuix següent:



$$\left.\begin{array}{l} F_1 = 40 \cdot \cos 45° = 40 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \\ F_2 = 55 \cdot \cos(-30°) = \dfrac{55\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow F_h = F_1 + F_2 = 75{,}91$$

$$\left.\begin{array}{l} F'_1 = 40 \cdot \sin 45° = 40 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \\ F'_2 = 55 \cdot \sin(-30°) = -\dfrac{55}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow F_V = F'_1 + F'_2 = 0{,}78$$

$$F_R = |F_h + F_V| = \sqrt{75{,}91^2 + 0{,}78^2} = 75{,}91 \text{ NW}$$

11. Sigui $C = (c_1, c_2)$ l'extrem del segment $\overline{AC}$, i com que B és el punt mitjà d'aquest segment, es compleix que:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = B \Rightarrow \left(\frac{-6 + c_1}{2}, \frac{4 + c_2}{2}\right) = (4, -6) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-6 + c_1}{2} = 4 \\ \dfrac{4 + c_2}{2} = -6 \end{array}\right. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_1 = 14,\ c_2 = -16 \Rightarrow C = (14, -16)$$

12. Calculem les components del vector $\overrightarrow{AB}$ i, a partir d'elles, determinem els punts que demana l'enunciat.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 8) - (-2, 0) = (4, 8)$$

Ara, dividim entre 4:

$$\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} \cdot (4, 8) = \left(\frac{1}{4} \cdot 4, \frac{1}{4} \cdot 8\right) = (1, 2)$$

Sumem (1, 2) a les coordenades del punt A:

$$A_1 = (-2, 0) + (1, 2) = (-1, 2)$$

Per obtenir la divisió següent repetim l'operació, però ara sobre les coordenades del punt A_1. El punt resultant és $A_2 = (-1, 2) + (1, 2) = (0, 4)$. Fent una altra vegada el mateix, tenim que $A_3 = (0, 4) + (1, 2) = (1, 6)$.

Ara, repetint una altra vegada l'operació, obtenim les coordenades de l'extrem B i ja hem acabat.

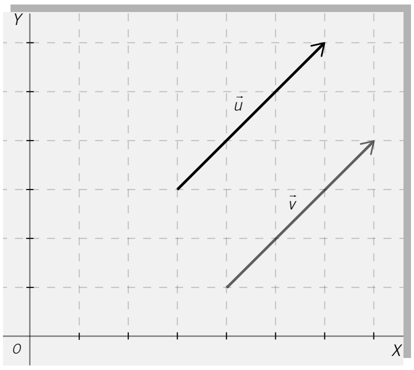
13. Per trobar les coordenades del punt B, busquem les coordenades del vector $\overrightarrow{AA_1}$ i les sumem a les coordenades del punt A_2.

$$\overrightarrow{AA_1} = A_1 - A = (1, 0) - (-1, -3) = (2, 3)$$
$$B = A_2 + \overrightarrow{AA_1} = (3, 3) + (2, 3) = (5, 6)$$

Exercicis i problemes (pàgs. 178 a 180)

1 VECTORS Pàg. 178

14. Dos vectors són equipolents si tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i el mateix sentit. Aleshores, els vectors següents són equipolents:



15. Sabent que els vectors equipolents tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i el mateix sentit, tenim que les parelles de vectors $\vec{u}$ i $\vec{t}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$, $\vec{x}$ i $\vec{t}$ són equipolents.

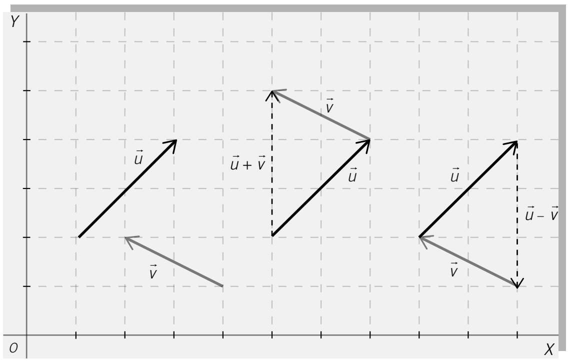
16. Els vectors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{y}, \vec{x}$ tenen el mateix mòdul.

2 OPERACIONS AMB VECTORS Pàg. 178

17. La suma de dos vectors qualssevol, gràficament, consisteix a representar els dos vectors de manera que l'extrem del primer vector coincideixi amb l'origen del segon vector. Aleshores, el vector suma d'aquests dos vectors té com a origen l'origen del primer vector i l'extrem és l'extrem del segon vector.

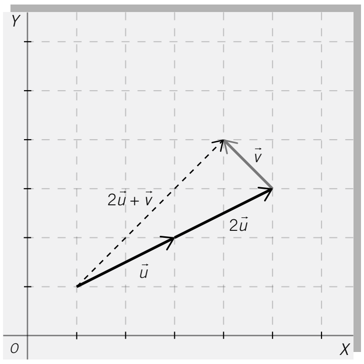
Tenint en compte això, podem descartar les opcions a) i b), ja que no coincideixen amb el que s'ha explicat anteriorment. D'altra banda, l'opció d) tampoc no pot ser la correcta, ja que la resta consisteix a fer l'oposat del vector *v*, en aquest cas. Per tant, la resposta correcta és l'opció c), que, efectivament, coincideix amb l'explicació de la representació de suma de vectors.

18.

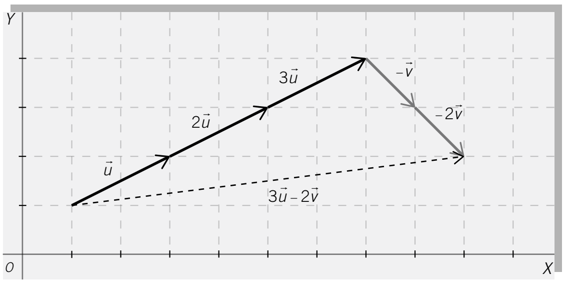


3 COMBINACIÓ LINEAL DE VECTORS Pàg. 178

19. a)

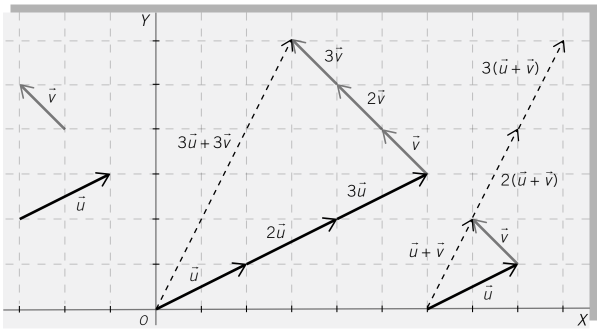


b)

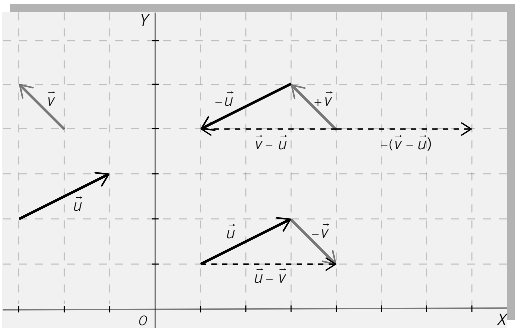


20. $\vec{u} = 2\cdot\vec{v} - 3\cdot\vec{w} \Rightarrow \vec{u} + 3\cdot\vec{w} = 2\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{1}{2}\cdot\vec{u} + \dfrac{3}{2}\cdot\vec{w}$

21. a) Dibuixem dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ qualssevol en el pla. Primerament, per a la primera part de la igualtat, dibuixem $3\vec{u}$, després desplacem el vector $\vec{v}$ fins a l'extrem de $3\vec{u}$. A partir d'aquí, dibuixem $3\vec{v}$. Unim l'origen de $3\vec{u}$ amb l'extrem de $3\vec{v}$ i obtenim el vector $3\vec{u} + 3\vec{v}$. Per a la segona part de la igualtat, dibuixem $\vec{u}$ i desplacem el vector $\vec{v}$ fins a l'extrem de $\vec{u}$. Després, unim l'origen de $\vec{u}$ amb l'extrem de $\vec{u} + \vec{v}$ i dibuixem $3\cdot(\vec{u} + \vec{v})$.



b) Dibuixem dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ qualssevol en el pla. Primerament, per a la primera part de la igualtat, dibuixem $\vec{u}$, després desplacem el vector $-\vec{v}$ fins a l'extrem de $\vec{u}$. Unim l'origen de $\vec{u}$ amb l'extrem de $-\vec{v}$, i obtenim el vector $\vec{u}$-$\vec{v}$. Per a la segona part de la igualtat, dibuixem $\vec{v}$ i desplacem el vector $-\vec{u}$ fins a l'extrem de $\vec{v}$. Després, unim l'origen de $\vec{v}$ amb l'extrem de $-\vec{u}$ i fem el seu oposat per obtenir $-(\vec{v}$-$\vec{u})$.



22. Per veure si el vector $\vec{u}$ és combinació lineal dels vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ hem de veure si existeixen dos nombres reals *a* i *b* tal que es compleixi que $\vec{u} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w}$. Per tant:

$$(3, 4) = a\cdot(3, -3) + b\cdot(4, 6) \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3a + 4b \\ 4 = -3a + 6b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{15},\ b = \frac{7}{10} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{15}\cdot\vec{v} + \frac{7}{10}\cdot\vec{w}$$

Per tant, el vector $\vec{u}$ es pot expressar com a combinació lineal dels vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

4 BASES DE V_2 Pàg. 178

23. Siguin $\vec{O} = (0,0)$, $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$, aleshores:

a) $\overrightarrow{Ov} = -9\cdot(1,0) + 4\cdot(0,1) = -9\vec{i} + 4\vec{j}$

b) $\overrightarrow{Ov} = -7\cdot(1,0) + 8\cdot(0,1) = -7\vec{i} + 8\vec{j}$

c) $\overrightarrow{Ov} = -\dfrac{7}{3}\cdot(1,0) - 7\cdot(0,1) = -\dfrac{7}{3}\vec{i} - 7\vec{j}$

24. Vegem si hi ha dos nombres reals *a* i *b* tals que:

$$\vec{t} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w}$$

$$(5,-1) = a\cdot(1,3) + b\cdot(2,-2) \Rightarrow \begin{cases} 5 = a + 2b \\ -1 = 3a - 2b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 1,\ b = 2$$

25. Per a comprovar que els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base, hem de veure si són linealment independents. Per a veure això, s'ha de comprovar que la relació $a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} = 0$ només es compleix si *a* i *b* són tots dos iguals a 0. Vegem-ho:

$$a\cdot(-3,4) + b\cdot(9,4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = -3a + 9b \\ 0 = 4a + 4b \end{cases} \Rightarrow a = 0,\ b = 0$$

Com que l'única solució és $a = 0$ i $b = 0$, els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base.

26. Per a comprovar que els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base, hem de veure si són linealment independents. Per a veure això, s'ha de comprovar que la relació $a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} = 0$ només es compleix si *a* i *b* són tots dos iguals a 0. Vegem-ho:

$$a\cdot(1,1) + b\cdot(1,-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = a + b \\ 0 = a - b \end{cases} \Rightarrow a = 0,\ b = 0$$

Com que l'única solució és $a = 0$ i $b = 0$, els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base.

Ara, expressem el vector $\vec{t}$ com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

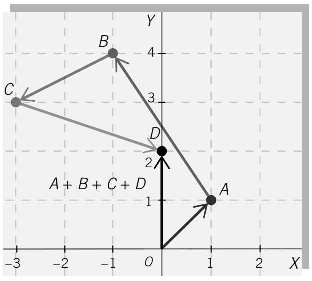
$$\vec{t} = a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} \Rightarrow (4,0) = a\cdot(1,1) + b\cdot(1,-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = a - b \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = 2 \Rightarrow \vec{t} = 2\cdot\vec{u} + 2\cdot\vec{v}$$

5 OPERACIONS AMB COMPONENTS

Pàgs. 178 i 179

27. a)



b) $A + B + C + D = (1,1) + (-2,3) + (-2,-1) + (3,-1) =$

$= (1 - 2 - 2 + 3, 1 + 3 - 1 - 1) = (0,2)$

28. a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (1,-3) + (2,-1) + (1,1) =$

$= (1 + 2 + 1, -3 - 1 + 1) = (4,-3)$

b) $2\cdot\vec{v} - \vec{u} - \vec{w} = 2\cdot(2,-1) - (1,-3) - (1,1) =$

$= (4 - 1 - 1, -2 + 3 - 1) = (2,0)$

c) $2\cdot\vec{w} - \vec{u} = 2\cdot(1,1) - (1,-3) = (2 - 1, 2 + 3) = (1,5)$

d) $-4\cdot\vec{v} + \vec{u} - 2\cdot\vec{w} = -4\cdot(2,-1) + (1,-3) - 2\cdot(1,1) =$

$= (-8 + 1 - 2, 4 - 3 - 2) = (-9,-1)$

29. a) $5\cdot(x,y) + (3,-9) - 2\cdot(6,8) + (-11,10) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 3 - 12 - 11 = 0 \\ 5y - 9 - 16 + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 20 = 0 \\ 5y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4,\ y = 3$$

b) $2\cdot(-3,7) + 6\cdot(x,-2) - (13,y) = 2\cdot(-x,y) + (-91,-49)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6 + 6x - 13 = -2x - 91 \\ 14 - 12 - y = 2y - 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 72 = 0 \\ -3y + 51 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -9,\ y = 17$$

30. $7\cdot(3,-k) + (-5,-5) = (16,-26) \Rightarrow \begin{cases} 21 - 5 = 16 \\ -7k - 5 = -26 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 = 16 \\ k = 3 \end{cases}$$

31. $\vec{w} + \vec{v} = (7,2) \Rightarrow (x,y) + (-10,8) = (7,2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 10 = 7 \\ y + 8 = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 17,\ y = -6 \Rightarrow \vec{w} = (17,-6)$$

32. $\vec{u} = 2\cdot\vec{v} - 3\cdot\vec{w} \Rightarrow \vec{u} = 2\cdot\left(-3\vec{i} + 6\vec{j}\right) - 3\cdot\left(7\vec{i} - 3\vec{j}\right) =$

$= -6\vec{i} + 12\vec{j} - 21\vec{i} + 9\vec{j} = -27\vec{i} + 21\vec{j}$

33. Siguin $A_1 = (a,b)$, $A_2 = (c,d)$, aleshores:

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_1} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot(9,3) = (a - 1, b - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3,1) = (a - 1, b - 3) \Rightarrow \begin{cases} 3 = a - 1 \\ 1 = b - 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 4,\ b = 4 \Rightarrow A_1 = (4,4)$$

$$2\cdot\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AA_2} \Rightarrow 2\cdot(3,1) = (c - 1, d - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (6,2) = (c - 1, d - 3) \Rightarrow \begin{cases} 6 = c - 1 \\ 2 = d - 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 7,\ d = 5 \Rightarrow A_2 = (7,5)$$

6 PRODUCTE ESCALAR DE DOS VECTORS

Pàg. 179

34. $|\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

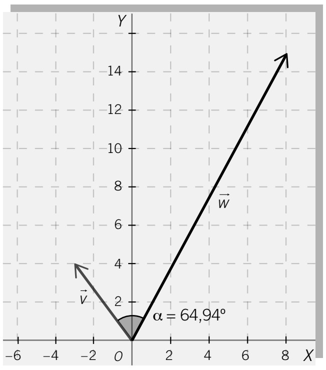
35. $\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1\cdot w_1 + v_2\cdot w_2 = -5\cdot 8 + 12\cdot 15 = 140$

36. Calculem la projecció del vector *u* sobre el vector *v*:

$$\text{Proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{4\cdot 5 + 3\cdot 12}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{56}{13} = 4{,}31$$

37. $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \dfrac{-3\cdot 8 + 4\cdot 15}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}\cdot\sqrt{8^2 + 15^2}} =$

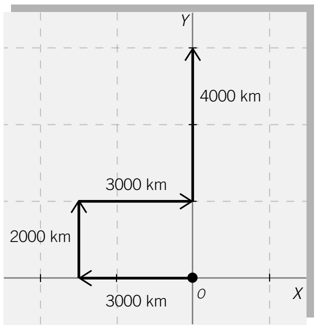
$$= \frac{36}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{289}} = \frac{36}{85} \Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{36}{85}\right) = 64{,}94°$$



38. $(2 \cdot \vec{u}) \cdot (-3 \cdot \vec{v}) = (2 \cdot (-2{,}5)) \cdot (-3 \cdot (-5{,}7)) =$

$= (-4{,}10) \cdot (15{,}-21) = -4 \cdot 15 + 10 \cdot (-21) = -270$

39. a)



b) La distància que ha de recórrer el vaixell fins al lloc on es troba la balena és de 6000 km, és a dir, és la suma de 2000 km i 4000 km dels quilòmetres recorreguts per la balena cap al nord.

40. El mòdul del vector (20, *x*) és 101; per tant:

$$|(20, x)| = 101 \Rightarrow \sqrt{20^2 + x^2} = 101 \Rightarrow 400 + x^2 = 10\,201 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 9\,801 \Rightarrow x = \sqrt{9\,801} = 99$$

41. Amb les condicions de l'enunciat, tenim que

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{9}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{9\sqrt{5}}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{9\sqrt{5}}{25}\right) = 36{,}39°$$

42. Sabem que el mòdul del vector *v* és 13; per tant:

$$|\vec{v}| = 12 \Rightarrow \sqrt{k^2 + 12^2} = 13 \Rightarrow k^2 + 144 = 169 \Rightarrow k^2 = 25$$

$$k = 5;\ k = -5$$

43. Per convertir el vector en unitari, calculem el mòdul del vector i dividim cada component entre el mòdul.

$$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}\right) = \left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$$

44. $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \dfrac{-16 \cdot 4 + 8 \cdot (-2)}{\sqrt{(-16)^2 + 8^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2}} =$

$$= \frac{-80}{\sqrt{320} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-80}{80} = -1 \Rightarrow \alpha = \text{arc cos}(-1) = 180°$$

45. Amb les condicions de l'enunciat, tenim que

$$|\vec{u}| = 8 \Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 8 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 = 64$$

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot u_2 \\ 3u_2 = 4v_2 \Rightarrow v_2 = \dfrac{3}{4}u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{3}{4}u_1 \\ v_2 = \dfrac{3}{4}u_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = u_1 \cdot \frac{3}{4}u_1 + u_2 \cdot \frac{3}{4}u_2 =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot (u_1^2 + u_2^2) = \frac{3}{4} \cdot (64) = 48$$

46. $\cos 60° = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \dfrac{4 \cdot 7 + (-3) \cdot x}{\sqrt{4^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{7^2 + x^2}} =$

$$= \frac{28 - 3x}{5 \cdot \sqrt{49 + x^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{28 - 3x}{5 \cdot \sqrt{49 + x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \sqrt{49 + x^2} = 56 - 6x \Rightarrow x = 2{,}99$$

7 COORDENADES D'UN PUNT EN EL PLA

Pàgs. 179 i 180

47. El vector $\overline{AB}$ té com a origen el punt *A* i com a extrem el punt *B*. Aleshores, l'oposat d'aquest vector tindrà com a origen el punt *B* i com a extrem el punt *A*. Per tant, el vector oposat a $\overline{AB}$ és determinat per:

$$\overline{BA} = A - B = (7,-4) - (-8,7) = (15,-11)$$

48. El vector l'origen del qual és el punt (2, –3) i l'extrem és el punt (7, 9), té com a components:

$$(7, 9) - (2, -3) = (5, 12)$$

49. a) $\overline{AB} = B - A = (-2,1) - (1,3) = (-3,-2)$

b) $\overline{BA} = A - B = (1,3) - (-2,1) = (3,2)$

c) $\overline{DC} = C - D = (3,1) - (-1,2) = (4,-1)$

d) $\overline{CA} = A - C = (1,3) - (3,1) = (-2,2)$

50. Calculem el vector que formen el punt on es troba el vehicle avariat i el punt on està situada la instal·lació del servei d'assistència mecànica. Després, en calculem el mòdul i aquesta distància és la que busquem.

$$(-12, 140) - (120, 110) = (-132, 30) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(-132, 30)| = \sqrt{132^2 + 30^2} = \sqrt{18\,324} = 135{,}37$$

Aleshores, la distància entre el vehicle avariat i el servei d'assistència mecànica és de 135,37 km.

51. Sigui *B* = (*x*, *y*), aleshores:

$$\overline{AB} = B - A = (x, y) - (13,6) = (x - 13, y - 6)$$

Com que aquest vector ha de ser equipolent al vector *u*, aleshores s'ha de complir que:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Rightarrow (x - 13, y - 6) = (4, -9) \Rightarrow \begin{cases} x - 13 = 4 \\ y - 6 = -9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow B = (17, -3)$$

52. a) Dos vectors són ortogonals si el seu producte escalar és zero. Per tant:

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = x \cdot (-4) + 12 \cdot (-3) = -4x - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = -36 \Rightarrow x = -9 \Rightarrow \vec{w} = (-9, 12)$$

b) Calculem el mòdul dels dos vectors:

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

c) Per transformar el vector *w* en unitari, calculem el mòdul del vector i dividim cada component entre el mòdul.

$$|\vec{w}| = 15 \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{w_1}{|\vec{w}|}, \frac{w_2}{|\vec{w}|}\right) = \left(\frac{-9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

53. El vector de desplaçament real de la barca és la suma de la direcció de la barca i de l'orientació del corrent. Aleshores, resulta el vector següent: (15, 7) + (–3, 4) = (12, 11).

Calculem el mòdul d'aquest vector:

$$|(12, 11)| = \sqrt{12^2 + 11^2} = \sqrt{265} = 16{,}28$$

54. Començarem calculant el vèrtex *C*. Com que els vèrtexs han de formar un quadrat, els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ han de ser perpendiculars. D'altra banda, tots els costats del quadrat han de tenir la mateixa longitud. Així que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2, 3) - (-5, -4) = (3, 7) \\ \overrightarrow{AC} = (x, y) \Rightarrow (c_1, c_2) - (-5, -4) = (c_1 + 5, c_2 + 4) = (x, y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (3, 7) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow 3x + 7y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-7y}{3} \Rightarrow k \cdot \overrightarrow{AC} = k \cdot \left(\frac{-7}{3}, 1\right)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} \Rightarrow |k \cdot \overrightarrow{AC}| = \sqrt{58}$$

$$\Rightarrow k\sqrt{\left(\frac{-7}{3}\right)^2 + 1^2} = k\sqrt{\frac{58}{9}} = \sqrt{58} \Rightarrow k = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) = (7, -3) \Rightarrow\Rightarrow (c_1 + 5, c_2 + 4) = (7, -3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + 5 = 7 \Rightarrow c_1 = 2 \\ c_2 + 4 = -3 \Rightarrow c_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow C = (2, -7)$$

Per calcular el vèrtex *D*, fem el següent:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow B - A = D - C \Rightarrow D = B - A + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = (-2, 3) - (-5, -4) + (2, -7) = (5, 0)$$

55. A partir de l'enunciat, sabem que la diferència entre la segona component del vector i la primera és igual a 7; per tant, resulta l'equació següent: $y - x = 7$. D'altra banda, el mòdul del vector és 73, i resulta aquesta equació:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 73 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5\,329$$

Resolem el sistema que resulta de les dues equacions anteriors:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5\,329 \\ y - x = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 48,\ y = 55$$

56. Per a comprovar que tots els punts pertanyen a la circumferència de centre (3, 1), hem de verificar que els mòduls dels vectors formats pels punts i el centre donen el mateix resultat. En aquest cas, el mòdul és el radi de la circumferència. Vegem això, en què *E* = (3, 1):

$$\overrightarrow{AE} = E - A = (3, 1) - (7, 4) = (-4, -3) \Rightarrow |\overrightarrow{AE}| =$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\overrightarrow{BE} = E - B = (3, 1) - (-2, 1) = (5, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{BE}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

$$\overrightarrow{CE} = E - C = (3, 1) - (6, -3) = (-3, 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{CE}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\overrightarrow{DE} = E - D = (3, 1) - (7, -2) = (-4, 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

Per tant, tots els punts pertanyen a la circumferència de radi 5.

57. Per a saber quin tipus de triangle forma els punts *A, B* i *C*, hem de calcular el mòdul dels vectors. És a dir:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 2) - (1, 3) = (2, -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (4, 5) - (3, 2) = (1, 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, 5) - (1, 3) = (3, 2) \Rightarrow$$

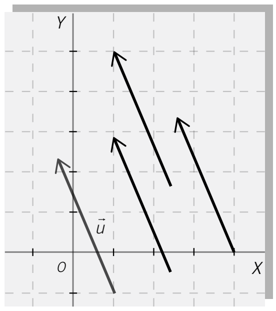
$$\Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Com que els mòduls són tots diferents, significa que el triangle format pels punts *A, B* y *C* és escalè.

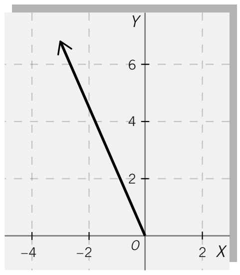
SÍNTESI

Pàg. 180

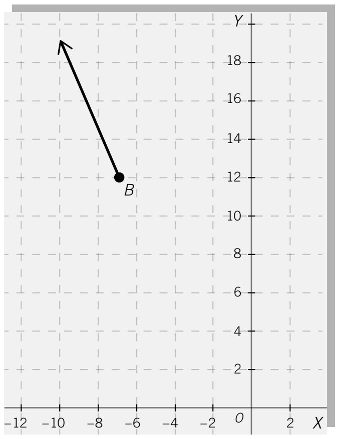
58. a)



b)



c)



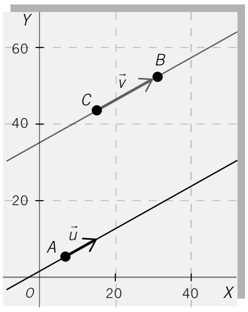
59. Dos vectors són perpendiculars si el seu producte escalar és zero; per tant, hem de trobar un vector $\vec{u}$ tal que:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (x, y)\cdot(4,3) = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -\frac{3}{4}y$$
$$\vec{u} = \left(-\frac{3}{4}y, y\right)$$

60. Com que el triangle ha de ser rectangle, ha de complir que els vectors $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AC}$ siguin perpendiculars. Aleshores:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (3 - b_1, -b_2)\cdot(2,2) = 0 \Rightarrow 3 = b_1 + b_2$$

61. Mitjançant un dibuix, podem veure clarament que aquests dos vehicles no xocaran mai, ja que amb el sentit en què van tots dos no s'arribaran a trobar. Si situem aquests punts en un eix de coordenades, observem que el punt d'intersecció entre les rectes determinades per cada vector director que segueix cada vehicle es troba en el quart quadrant; per tant mai no xocaran.



62. La distància entre dos punts consisteix a calcular el mòdul del vector que formen aquests dos punts.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,7) - (0,x) = (5,7-x)$$
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = 13 \Rightarrow \sqrt{5^2 + (7-x)^2} = \sqrt{x^2 - 14x + 74} = 13 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -5$$

63. Per saber quin helicòpter arribarà primer a la posició del camió, calculem la distància a la qual es troba el camió de cada helicòpter i la de valor més petit serà la de l'helicòpter que arribi primer. És a dir, calculem els mòduls dels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-21,100) - (14,140) = (-35,-40)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-35)^2 + (-40)^2} = \sqrt{2\,825} = 53{,}15$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (40,73) - (14,140) = (26,-67)$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{26^2 + (-67)^2} = \sqrt{5\,165} = 71{,}87$$

Com que el mòdul entre el punt A i el punt B és més petit, aleshores l'helicòpter que arribarà primer a la posició on es troba el camió és el que està situat en el punt B.

64. Aquests punts es poden unir en una sola carretera recta si els tres punts estan alineats. Per veure això, calculem els vectors $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$, i comprovem si són proporcionals.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CA} = A - C = (12,21) - (3,9) = (9,12)\\ \overrightarrow{CB} = B - C = (17,23) - (3,9) = (14,12)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{9}{14} \neq \frac{12}{12}$$

Com que la igualtat anterior no es compleix, els tres punts no es poden unir en una sola carretera recta.

65. a) $\left|\vec{w}\right| = 53 \Rightarrow \sqrt{28^2 + x^2} = 53 \Rightarrow x = 45$

b) $\vec{w}\cdot\vec{u} = -44 \Rightarrow (28,x)\cdot(-5,3) = -44 \Rightarrow$
$\Rightarrow -140 + 3x = -44 \Rightarrow x = 32$

c) $(28,x)\cdot(3,-12) = 0 \Rightarrow 84 - 12x = 0 \Rightarrow x = 7$

66. Per a veure si aquests punts formen un trapezi, hem d'observar si hi ha dos costats oposats que siguin paral·lels. Per a això, calculem els vectors dels punts que formin costats que siguin oposats:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,5) - (1,1) = (2,4)$$
$$\overrightarrow{DC} = C - D = (10,6) - (7,-1) = (3,7)$$

Com que $\frac{2}{3} \neq \frac{4}{7}$, els costats formats per aquests punts no són paral·lels. Ara, fem el mateix per a l'altre parell de costats oposats:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (10,6) - (3,5) = (7,1)$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (7,-1) - (1,1) = (6,-2)$$

Com que $\frac{7}{6} \neq \frac{1}{-2}$, aquests costats tampoc no són paral·lels.

Per tant, tenim que aquests punts no formen un trapezi.

67. a) $-3\cdot(x,-2) + (2x,-6) = (14,0) \Rightarrow \begin{cases}-3x + 2x = 14\\ 6 - 6 = 0\end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -14$

b) $2\cdot(3x,-9) + 3\cdot(-3x,12) - (-3,6) = (-15,12)$

$$\begin{cases}6x-9x+3=-15\\-18+36-6=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x=-18\\12=12\end{cases}\Rightarrow x=6$$

68. Classifiquem el triangle segons els seus angles a partir de les condicions següents:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2<\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2\to\text{Acutangle}$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2\to\text{Rectangle}$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2>\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2\to\text{Obtusangle}$$

Calculem aquests vectors directors i els seus mòduls i veiem la condició que es compleix:

$$\overrightarrow{AB}=(3,0)-(4,-3)=(-1,3)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$
$$\overrightarrow{AC}=(0,1)-(4,-3)=(-4,4)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{32}$$
$$\overrightarrow{BC}=(0,1)-(3,0)=(-3,1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{32}\right)^2>\left(\sqrt{10}\right)^2+\left(\sqrt{10}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 32>10+10\Rightarrow 32>20$$

Per tant, aquest triangle és **obtusangle**. D'altra banda, observem que hi ha dos costats del triangle amb la mateixa longitud i un de diferent; per tant, també es tracta d'un triangle **isòsceles**.

a) Hem calculat la longitud dels costats del triangle anteriorment per classificar el triangle fent els mòduls dels vectors.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{10},\ \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{32},\ \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{10}$$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-1,3)+(-4,4)=(-5,7)$

c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(-1,3)-(-4,4)=(3,-1)$

69. a) $2\cdot\vec{u}+3\cdot\vec{v}-5\cdot\vec{w}=2\cdot(2,5)+3\cdot(-3,4)-5\cdot(5,12)=$

$=(4,10)+(-9,12)+(-25,-60)=(-30,-38)$

b) $2\cdot\vec{u}\cdot\left(-3\cdot\vec{v}\right)=2\cdot(2,5)\cdot\left(-3\cdot(-3,4)\right)=$

$=(4,10)\cdot(9,-12)=4\cdot 9-10\cdot 12=-84$

c) $$\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{-3\cdot 5+4\cdot 12}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{33}{65}$$

$$\Rightarrow\alpha=\text{arc}\cos\left(\frac{33}{65}\right)=59,5°$$

d) Per transformar el vector v en unitari, calculem el mòdul del vector i dividim cada component entre el mòdul.

$$|\vec{v}|=5\Rightarrow\vec{t}=\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|},\frac{v_2}{|\vec{v}|}\right)=\left(\frac{-3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

e) Per a comprovar que els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base, hem de veure si són linealment independents. Per a veure això, s'ha de comprovar que la relació $a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}=0$ només es compleix si a i b són tots dos iguals a 0. Aleshores:

$$a\cdot(2,5)+b\cdot(-3,4)=0\Rightarrow\begin{cases}0=2a-3b\\0=5a+4b\end{cases}\Rightarrow a=0,\ b=0$$

Com que l'única solució és $a=0$ i $b=0$, els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base.

Ara, expressem el vector $\vec{w}$ com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

$$\vec{w}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}\Rightarrow(5,12)=a\cdot(2,5)+b\cdot(-3,4)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}5=2a-3b\\12=5a+4b\end{cases}\Rightarrow a=\frac{56}{23},\ b=-\frac{1}{23}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\vec{w}=\frac{56}{23}\cdot\vec{u}-\frac{1}{23}\cdot\vec{v}$$

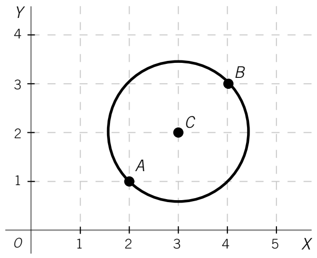
70. a) El centre de la circumferència a partir dels punts que en delimiten el diàmetre s'obté calculant el punt mitjà d'aquests dos punts.

$$C=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)=\left(\frac{2+4}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(3,2)$$

b) Trobem el radi de la circumferència calculant el mòdul del vector format pels punts C i A o B.

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(3,2)-(2,1)=(1,1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=$$
$$=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

c)



71. a) Els vectors $\overrightarrow{OK}$ i $\overrightarrow{OJ}$ són perpendiculars; per tant, el seu producte escalar és zero. És a dir, $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OJ}=0$.

b) Els vectors $\overrightarrow{KJ}$ i $\overrightarrow{IJ}$ formen un angle de 45°. Per tant:

$$\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left|\overrightarrow{KJ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{IJ}\right|\cdot\cos 45°=12\cdot 12\cdot\cos 45°=101{,}82$$

c) Els vectors $\overrightarrow{OL}$ i $\overrightarrow{OJ}$ formen un angle de 180°. D'altra banda, hem de calcular el valor dels costats OJ i OL. Per a això, utilitzem el teorema del cosinus:

$$JL^2=JK^2+LK^2-2\cdot JK\cdot LK\cdot\cos 135°\Rightarrow$$
$$\Rightarrow JL^2=12^2+12^2-2\cdot 12\cdot 12\cdot\cos 135°\Rightarrow JL=22{,}17$$
$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{OJ}\right|=\left|\overrightarrow{OL}\right|=\frac{22{,}17}{2}=11{,}09\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{OJ}\cdot\overrightarrow{OL}=\left|\overrightarrow{OJ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OL}\right|\cdot\cos 180°=$$
$$=11{,}09\cdot 11{,}09\cdot\cos 180°=-122{,}99$$

Avaluació (pàg. 182)

1. a) $\overrightarrow{BA}=A-B=(-3,7)-(5,-4)=(-8,11)$

b) $\overrightarrow{AB}=B-A=(5,-4)-(-3,7)=(8,-11)\Rightarrow$

$\Rightarrow(-8,11)=-(8,-11)\Rightarrow\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

c) $PM = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{7-4}{2}\right) = (1, 3/2)$

d) $2 \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot (8, -11) = (16, -22)$

2. Sigui $C = (x, y)$.

a) $\overrightarrow{AC} = \vec{u} \Rightarrow C - A = \vec{u} \Rightarrow (x-3, y-7) = (4, -5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 4 \\ y - 7 = -5 \end{cases} \Rightarrow x = 7,\ y = 2 \Rightarrow C = (7, 2)$$

b) $\overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot \vec{u} \Rightarrow (x-3, y-7) + 2 \cdot (x+2, y+3) =$

$$= (12, -15) \Rightarrow \begin{cases} x - 3 + 2x + 4 = 12 \\ y - 7 + 2y + 6 = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 11 \\ 3y = -14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{3},\ y = \frac{-14}{3} \Rightarrow C = \left(\frac{11}{3}, \frac{-14}{3}\right)$$

3. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 14) - (-14, 9) = (12, 5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

4. Sigui $\vec{w} = (x, y)$, aleshores:

$$\vec{w} + 3 \cdot \vec{v} = (1, 4) \Rightarrow (x, y) + 3 \cdot (8, -6) = (1, 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 24 = 1 \\ y - 18 = 4 \end{cases} \Rightarrow x = -23,\ y = 22 \Rightarrow \vec{w} = (-23, 22)$$

5. $\vec{w} \cdot 3 \cdot \vec{v} = (-3, 5) \cdot 3 \cdot (1, 4) = (-3, 5) \cdot (3, 12) =$
$= -3 \cdot 3 + 5 \cdot 12 = 51$

6. $\vec{t} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} \Rightarrow (5, -6) = a \cdot (-1, 2) + b \cdot (2, -3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = -a + 2b \\ -6 = 2a - 3b \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ b = 4$$

7. a) $|(-40, 9)| = \sqrt{(-40)^2 + 9^2} = \sqrt{1681} = 41$

b) $\cos\alpha = \frac{(-40, 9) \cdot (3, 7)}{|(-40, 9)| \cdot |(3, 7)|} = \frac{-40 \cdot 3 + 9 \cdot 7}{\sqrt{(-40)^2 + 9^2} \cdot \sqrt{3^2 + 7^2}} =$

$$= \frac{-57}{41\sqrt{58}} \Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{-57}{41\sqrt{58}}\right) = 100{,}52°$$

c) $(-40, 9) \cdot (1, 10) = -40 \cdot 1 + 9 \cdot 10 = -40 + 90 = 50$

d) Primerament, normalitzem el vector (–40, 9) calculant-ne el mòdul i dividint cada component entre aquest.

$$|(-40, 9)| = \sqrt{(-40)^2 + 9^2} = \sqrt{1681} = 41 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{-40}{41}, \frac{9}{41}\right)$$

Com que aquest vector és unitari, té mòdul 1. Volem que el mòdul d'aquest vector sigui dos, aleshores, ho multipliquem tot per dos:

$$2 \cdot \vec{v} = 2 \cdot \left(\frac{-40}{41}, \frac{9}{41}\right) = \left(\frac{-80}{41}, \frac{18}{41}\right)$$

8. Primerament, calculem els vectors que formen el triangle:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 10) - (6, 5) = (-3, 5)$$
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1, 2) - (3, 10) = (-2, -8)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 2) - (6, 5) = (-5, -3)$$

Ara, calculem els angles formats per aquests vectors:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-3) \cdot (-5) + 5 \cdot (-3)}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \text{arc cos}(0) = 90° \Rightarrow$$

$$\cos\hat{C} = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-2) \cdot (-5) + (-8) \cdot (-3)}{\sqrt{(-2)^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2}} =$$

$$= \frac{34}{\sqrt{2\,312}}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \text{arc cos}\left(\frac{34}{\sqrt{2\,312}}\right) = 45°$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - 90° - 45° = 45°$$

9. Dos vectors són perpendiculars si el seu producte escalar és zero. Per tant:

$$(5, x) \cdot (-9, 15) = 0 \Rightarrow 5 \cdot (-9) + x \cdot 15 = -45 + 15x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 15x = 45 \Rightarrow x = 3$$

10. a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-12, 5) \cdot (15, 8) = (-12) \cdot 15 + 5 \cdot 8 = -140$

b) $\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{4 \cdot 12 + (-6) \cdot 8}{\sqrt{4^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{12^2 + 8^2}} =$

$$= \frac{0}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{208}} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{arc cos}(0) = 90°$$

c) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (3, -4) \cdot (1, -1) = 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-1) = 7$

d) $\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{0 \cdot 3 + (-2) \cdot 4}{\sqrt{0^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-8}{2 \cdot 5} =$

$$= \frac{-8}{10} \Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{-8}{10}\right) = 143{,}13°$$

11. Per transformar aquests vectors en vectors unitaris, calculem el mòdul del vector i dividim cada component entre el mòdul.

a) $|(15, -8)| = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = \sqrt{289} = 17 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{15}{17}, \frac{-8}{17}\right)$$

b) $|(3, -4)| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

c) $|(4, 0)| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4 \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{4}{4}, \frac{0}{4}\right) = (1, 0)$

d) $|(2, -3)| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$

e) $|(-4, 7)| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65} \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{-4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}\right)$

f) $\left|(-5,-3)\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{-5}{\sqrt{34}}, \frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$

12. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3,-4) \cdot (-5,12) = 3 \cdot (-5) + (-4) \cdot 12 = -63$

b) $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5;$

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

c) $\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{-63}{5 \cdot 13} = \frac{-63}{65} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{-63}{65}\right) = 165{,}75°$

13. Siguin $C = (c_1, c_2)$ i $D = (d_1, d_2)$ els altres dos vèrtexs del paral·lelogram. Busquem el punt mitjà de les dues diagonals del paral·lelogram, que són el punt M:

$$\frac{1}{2} AC = M \Rightarrow \left(\frac{1+c_1}{2}, \frac{-2+c_2}{2}\right) = (0,2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+c_1}{2} = 0 \\ \frac{-2+c_2}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 = -1,\ c_2 = 6 \Rightarrow C = (-1,6)$$

$$\frac{1}{2} BD = M \Rightarrow \left(\frac{6+d_1}{2}, \frac{1+d_2}{2}\right) = (0,2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{6+d_1}{2} = 0 \\ \frac{1+d_2}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 = -6,\ d_2 = 3 \Rightarrow D = (-6,3)$$

Zona + (pàg. 183)

— **Els vectors i l'animació audiovisual**

- L'interès principal dels gràfics vectorials és poder ampliar la mida d'una imatge a voluntat sense la pèrdua de qualitat que es produeix en els mapes de bits.
- Una part de la resposta a aquesta pregunta es pot trobar en la pàgina web que s'esmenta en l'enunciat de l'apartat anterior.