6 # Nombres complexos

En context (Pàg. 143)

a) Resposta oberta a manera de reflexió individual que pot servir d'introducció als nombres complexos.

b) Respostes suggerides:

— Un fractal és un objecte geomètric l'estructura bàsica del qual, fragmentada o irregular, es repeteix a diferents escales.

— El conjunt de Mandelbrot es forma mitjançant un nombre complex a partir de la relació de recurrència: $z_{n+1} = z_n^2 + c$

— El conjunt de Mandelbrot és el conjunt de nombres complexos C per als quals el conjunt de Julia associat és connex.

c) Resposta suggerida: vasos sanguinis, cràters de la Lluna, llampecs, fulla de falguera, fusta, fons sec d'un pantà, etc.

Fixa-t'hi (Pàg. 144)

Resposta suggerida: El conjunt de nombres complexos és el conjunt que comprèn tots els conjunts de nombres existents.

Recorda (Pàg. 145)

Siguin $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ i $z_3 = e + fi$.

— $$\left.\begin{array}{l} z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\ z_2 + z_1 = (c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)i \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

— $$\left.\begin{array}{l} z_1 + (z_2 + z_3) = (a + bi) + ((c + di) + (e + fi)) = \\ \qquad = (a + c + e) + (b + d + f)i \\ (z_1 + z_2) + z_3 = ((a + bi) + (c + di)) + (e + fi) = \\ \qquad = (a + c + e) + (b + d + f)i \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

— $(a + bi) + 0 = 0 + (a + bi) = a + bi \Rightarrow z + 0 = 0 + z = z$

— $(a + bi) + (-a - bi) = 0 \Rightarrow z + (-z) = 0$

Amplia (pàg. 146)

Siguin $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ i $z_3 = e + fi$.

— $$\left.\begin{array}{l} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (a + bi) \cdot ((c + di) \cdot (e + fi)) = \\ = (cea - dfa - cfb - deb) + (ceb - dfb + cfa + dea)i \\ (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = ((a + bi) \cdot (c + di)) \cdot (e + fi) = \\ = (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)i \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

— $$\left.\begin{array}{l} z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \\ z_2 \cdot z_1 = (c + di) \cdot (a + bi) = (ca - db) + (cb + da)i \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

— $(a + bi) \cdot 1 = 1 \cdot (a + bi) = (a + bi) \Rightarrow z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

— $$\left.\begin{array}{l} z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a + bi) \cdot ((c + di) + (e + fi)) = \\ = (ac + ae - bd - bf) + (ad + af + bc + be)i \\ z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 = (a + bi) \cdot (c + di) + (a + bi) \cdot (e + fi) = \\ = (ac - bd + ae - bf) + (ad + bc + af + be)i \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3$$

Fixa-t'hi (pàg. 146)

Els valors de les potències de i es repeteixen de quatre en quatre; per això, per a saber quant val una determinada potència de i es divideix l'exponent entre 4, i la resta és l'exponent de la potència equivalent a la donada.

Fixa-t'hi (pàg. 148)

Sigui $z = a + bi \Rightarrow -z = -a - bi$, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |z| = |-z|$$

Amplia (pàg. 148)

Siguin, per exemple, $z_1 = -1 + 2i$ i $z_2 = 2 + i$.

— $$\left.\begin{array}{l} |z_1 + z_2| = |1 + 3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \\ |z_1| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \qquad |z_2| = \sqrt{2^2 + 1^1} = \sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{10} < 2\sqrt{5} \Rightarrow |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$$

— $$\left.\begin{array}{l} |z_1 \cdot z_2| = |-4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\ |z_1| = \sqrt{5} \qquad |z_2| = \sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = 5 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

— $|z_1| - |z_2| = 0 \qquad |z_1 - z_2| = |-3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
$$\Rightarrow 0 < \sqrt{10} \Rightarrow |z_1| - |z_2| < |z_1 - z_2|$$

Nota: La igualtat només es complirà si z_1 i z_2 són reals positius.

Fixa-t'hi (pàg. 150)

• Si z pertany al segon quadrant, $z = -a + bi$ aleshores:

$z = r(\cos(180° - \alpha) + i \sin(180° - \alpha)) = r(-\cos \alpha + i \sin \alpha)$

- Si z pertany al tercer quadrant, $z = -a - bi$ aleshores:

  $z = r(\cos(180° + \alpha) + i\sin(180° + \alpha)) = r(-\cos\alpha - i\sin\alpha)$

- Si z pertany al quart quadrant, $z = a - bi$ aleshores:

  $z = r(\cos(360° - \alpha) + i\sin(360° - \alpha)) = r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$

Amplia (pàg. 153)

Un polinomi de grau parell tindrà la meitat del seu grau de solucions i la resta seran els seus conjugats que també seran arrels del polinomi. Un polinomi de grau imparell tindrà una arrel real i les altres seran complexes comptant els conjugats de les arrels complexes.

Problemes resolts (pàgs. 155 i 156)

1. Sigui $z = 32_\pi$:

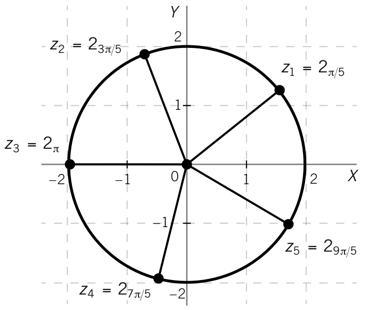
a) Les arrels cinquenes de $z = 32_\pi$ tindran mòdul $r = \sqrt[5]{32} = 2$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{\pi + 0}{5} = \frac{\pi}{5}, \alpha_2 = \frac{\pi + 2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}, \alpha_3 = \frac{\pi + 4\pi}{5} = \pi,$$

$$\alpha_4 = \frac{\pi + 6\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}, \alpha_5 = \frac{\pi + 8\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}$$

$$\Rightarrow z_1 = 2_{\pi/5}, z_2 = 2_{3\pi/5}, z_3 = 2_\pi, z_4 = 2_{7\pi/5}, z_5 = 2_{9\pi/5}$$

b)



2. Sigui $a + bi$ el nombre que busquem:

$(a + bi)\cdot(1 + 3i) - (13 + 59i) = 6i$

$(a - 3b - 13) + (3a + b - 59)i = 6i$

Igualem la part real a 0 i la part imaginària, a 6:

$$\left.\begin{array}{l} a - 3b - 13 = 0 \\ 3a + b - 59 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 19, b = 2 \Rightarrow z = 19 + 2i$$

Exercicis i problemes (pàgs. 157 a 160)

1 NOMBRE COMPLEX — Pàg. 157

3. $\sqrt[4]{16} = \pm 2, \sqrt{-9} = \sqrt{9}\,i = \pm 3i, \sqrt[3]{-8} = -2,$

$\sqrt{-121} = \sqrt{121}\,i = \pm 11i, \sqrt[5]{-1} = -1$

4. a) $\text{Re}(z) = 3$, $\text{Im}(z) = -2$

b) $\text{Re}(z) = 4$, $\text{Im}(z) = 5$

c) $\text{Re}(z) = 10$, $\text{Im}(z) = 0$

d) $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) = 6$

e) $3i^2 = -3 \Rightarrow \text{Re}(z) = 3$, $\text{Im}(z) = 0$

f) $\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} = -i \Rightarrow \text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) = -1$

5. a) $\bar{z} = 4, -z = -4$

b) $\bar{z} = 5 - 15i, -z = -5 - 15i$

c) $\bar{z} = -75i, -z = -75i$

d) $\bar{z} = 45 - 3i, -z = -45 - 3i$

6. Sigui $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, -z = -a - bi$, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} z = \bar{z} \\ z = -z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a + bi = a - bi \\ a + bi = -a - bi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 0 \\ a + bi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0, b = 0$$

7. $$\frac{1 - 2ki}{k - i}\cdot\frac{k + i}{k + i} = \frac{3k - 2k^2 i + i}{k^2 + 1} = \frac{3k}{k^2 + 1} + \frac{-2k^2 + 1}{k^2 + 1}i$$

a) $\frac{-2k^2 + 1}{k^2 + 1} = 0 \Rightarrow -2k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{3k}{k^2 + 1} = 0 \Rightarrow 3k = 0 \Rightarrow k = 0$

2 OPERACIONS EN FORMA BINÒMICA — Pàg. 157

8. a) $(3 - 2i) + (4 + 5i) = (3 + 4) + (-2 + 5)i = 7 + 3i$

b) $8 + (13 + 5i) = (8 + 13) + 5i = 21 + 5i$

c) $(5 + 9i) - (5 - 9i) = (5 - 5) + (9 - (-9))i = 18i$

d) $(16 - 2i) - (15 - 2i) = (16 - 15) + (-2 - (-2))i = 1$

9. $(a + bi) + (5 - 6i) = 8i \Rightarrow (a + 5) + (b - 6)i = 8i$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a + 5 = 0 \\ b - 6 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -5 \\ b = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow z = -5 + 14i$$

10. a) $(3 - 2i)\cdot(4 + 5i) = (12 - (-10)) + (15 + (-8))i = 22 + 7i$

b) $(6 + 2i)\cdot(3 + 3i) = (18 - 6) + (18 + 6)i = 12 + 24i$

c) $\frac{2 + i}{i} = \frac{2 + i}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{2i - 1}{-1} = 1 - 2i$

d) $\frac{3}{4 + i} = \frac{3}{4 + i}\cdot\frac{4 - i}{4 - i} = \frac{12 - 3i}{17} = \frac{12}{17} - \frac{3i}{17}$

e) $\frac{2 - i}{1 + 3i} = \frac{2 - i}{1 + 3i}\cdot\frac{1 - 3i}{1 - 3i} = \frac{-1 - 7i}{10} = \frac{-1}{10} - \frac{7i}{10}$

f) $(2 + 3i)^2 = (2 + 3i)\cdot(2 + 3i) = (4 - 9) + (6 + 6)i = -5 + 12i$

11. $$\frac{a + bi}{a - bi} = \frac{a + bi}{a - bi}\cdot\frac{a + bi}{a + bi} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$$

$-a - bi + 1 + 2i = (-a + 1) + (2 - b)i$

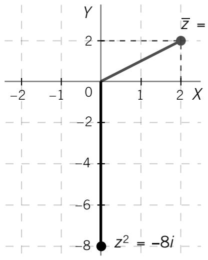
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = -a + 1 \\ \frac{2ab}{a^2 + b^2} = 2 - b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1 + i$$

3 REPRESENTACIÓ GRÀFICA Pàgs. 157 i 158

12. a) $x = 2, y = -2 \Rightarrow z = 2 - 2i$

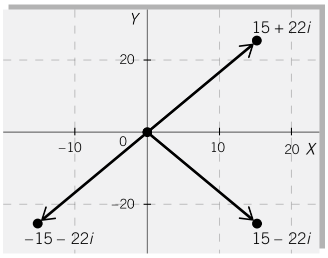
b) $\overline{z} = 2 + 2i$

c) $z^2 = (2 - 2i)(2 - 2i) = (4 - 4) + (-4 + (-4))i = -8i$



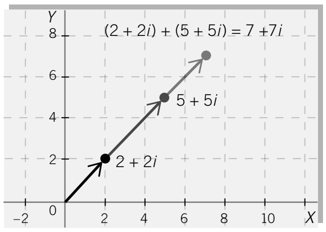
13. $z = 15 + 22i \Rightarrow z = (15, 22)$

$\overline{z} = 15 - 22i, -z = -15 - 22i$

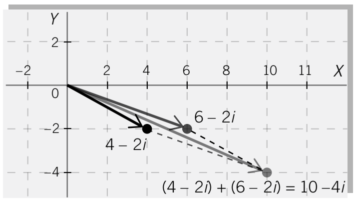


Relació: Els afixos dels nombres complexos z i $-z$ són simètrics respecte de l'origen de coordenades. Els afixos d'un nombre complex i el seu conjugat z i $\overline{z}$ són simètrics respecte a l'eix real.

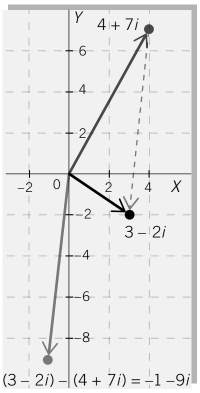
14. a)



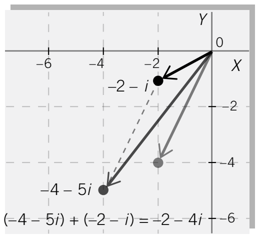
b)



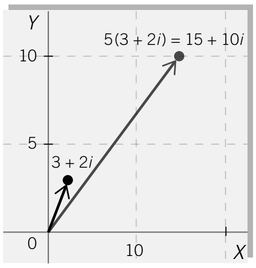
c)



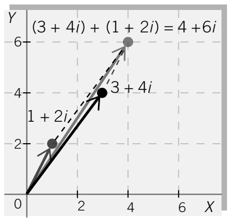
d)



e)



f)



15. a) $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow |z| = 5$

b) $|z| = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow |z| = 5$

c) $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow |z| = 5$

d) $|z| = \sqrt{10^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow |z| = 10$

16. $z = 7 - 6i \Rightarrow \overline{z} = 7 + 6i$

Mètode 1: $|z| = \sqrt{7^2 + (-6)^2} = \sqrt{85} = 9,2$

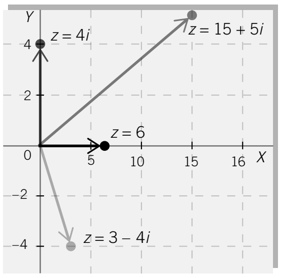
Mètode 2: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(7 - 6i) \cdot (7 + 6i)} = \sqrt{85} = 9,2$

17. a) $|z| = \sqrt{6^2} = \sqrt{36} = 6$

b) $|z| = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{250} = 15,8$

c) $|z| = \sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$

d) $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

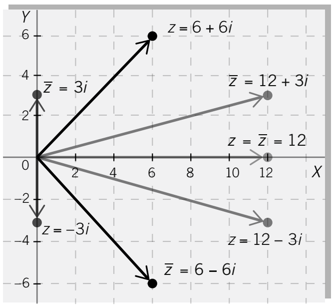


18. a) $z = 6 + 6i \Rightarrow \overline{z} = 6 - 6i \Rightarrow$ z i $\overline{z}$ són simètrics respecte a l'eix real.

b) $z = -3i \Rightarrow \overline{z} = 3i \Rightarrow$ z i $\overline{z}$ són simètrics respecte a l'eix real i es representen en l'eix imaginari.

c) $z = 12 \Rightarrow \overline{z} = 12 \Rightarrow$ z i $\overline{z}$ es representen en el mateix punt: (12,0).

d) $z = 12 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 12 + 3i \Rightarrow z$ i $\bar{z}$ són simètrics respecte a l'eix real.



19. a) $z_1 = (4 + 8i) + (4 - 8i) = (4 + 4) + (8 - 8)i = 8$

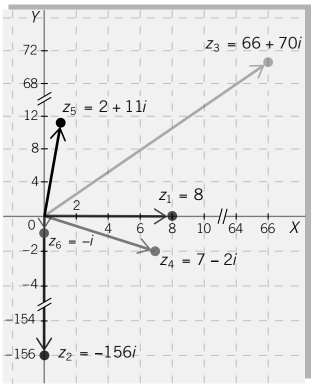
b) $z_2 = (124 - 78i) - (124 + 78i) =$
$= (124 - 124) + (-78 - 78)i = -156i$

c) $z_3 = (5 + 8i) \cdot (10 - 2i) =$
$= (50 + 16) + (-10 + 80)i = 66 + 70i$

d) $z_4 = \dfrac{2 + 7i}{i} = \dfrac{2 + 7i}{i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{-7 + 2i}{-1} = 7 - 2i$

e) $z_5 = (2 + i)^3 = (3 + 4i) \cdot (2 + i) = (6 - 4) + (3 + 8)i = 2 + 11i$

f) $z_6 = \dfrac{1 - i}{1 + i} = \dfrac{1 - i}{1 + i} \cdot \dfrac{1 - i}{1 - i} = \dfrac{-2i}{2} = -i$



20. a) $z^{-1} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{-1} = -i$

b) $z^{-1} = \dfrac{1}{5 + 6i} = \dfrac{1}{5 + 6i} \cdot \dfrac{5 - 6i}{5 - 6i} = \dfrac{5}{61} - \dfrac{6i}{61} = 0{,}08 - 0{,}1i$

c) $z^{-1} = \dfrac{1}{7 - i} = \dfrac{1}{7 - i} \cdot \dfrac{7 + i}{7 + i} = \dfrac{7}{50} + \dfrac{i}{50} = 0{,}14 + 0{,}02i$

d) $z^{-1} = \dfrac{1}{-4 - 5i} = \dfrac{1}{-4 - 5i} \cdot \dfrac{-4 + 5i}{-4 + 5i} = \dfrac{-4}{41} + \dfrac{5i}{41} =$
$= -0{,}1 + 0{,}12i$

21. a) $\bar{z} = -i \Rightarrow \bar{z}^{-1} = \dfrac{1}{-i} = \dfrac{1}{-i} \cdot \dfrac{i}{i} = i$

b) $\bar{z} = 6 + i \Rightarrow \bar{z}^{-1} = \dfrac{1}{6 + i} = \dfrac{1}{6 + i} \cdot \dfrac{6 - i}{6 - i} = \dfrac{6}{37} - \dfrac{i}{37}$

c) $\bar{z} = 4 - 2i \Rightarrow \bar{z}^{-1} = \dfrac{1}{4 - 2i} = \dfrac{1}{4 - 2i} \cdot \dfrac{4 + 2i}{4 + 2i} =$
$= \dfrac{4}{20} + \dfrac{2i}{20} = 0{,}2 + 0{,}1i$

d) $\bar{z} = 0{,}1 - 0{,}1i \Rightarrow \bar{z}^{-1} = \dfrac{1}{0{,}1 - 0{,}1i} =$
$= \dfrac{1}{0{,}1 - 0{,}1i} \cdot \dfrac{0{,}1 + 0{,}1i}{0{,}1 + 0{,}1i} = \dfrac{0{,}1}{0{,}02} + \dfrac{0{,}1i}{0{,}02} = 5 + 5i$

22. Els valors es repeteixen de quatre en quatre; per això, per a saber quant val una determinada potència de i es divideix l'exponent entre 4, i la resta és l'exponent de la potència equivalent a la donada.

a) $i^{1231} = (i^4)^{307} \cdot i^3 = -i$

b) $i^{10320} = (i^4)^{2580} \cdot i^0 = 1$

c) $i^{7037} = (i^4)^{1759} \cdot i^1 = i$

d) $i^{883002} = (i^4)^{220750} \cdot i^2 = -1$

4 FORMA POLAR D'UN NOMBRE COMPLEX

Pàgs. 158 i 159

23. a) $z = 3_{\pi/2} \Rightarrow r = 3, \alpha = \pi/2$

b) $z = 10_{\pi} \Rightarrow r = 10, \alpha = \pi$

c) $z = 1_{2\pi} \Rightarrow r = 1, \alpha = 2\pi$

d) $z = 3_{\pi} \Rightarrow r = 3, \alpha = \pi$

e) $z = 4_{2\pi} \Rightarrow r = 4, \alpha = 2\pi$

f) $z = 1_0 \Rightarrow r = 1, \alpha = 0$

24. a) $z_1 = 10_{\pi/4} \Rightarrow a = 10 \cos \dfrac{\pi}{4} = 5\sqrt{2}, b = 10 \sin \dfrac{\pi}{4} = 5\sqrt{2}$

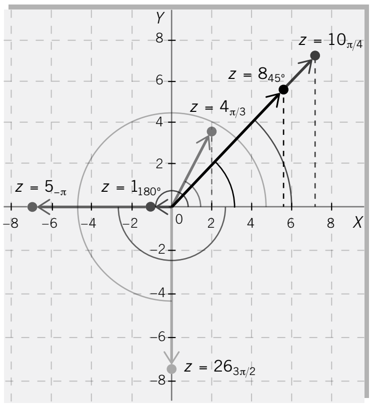
b) $z_2 = 5_{-\pi} \Rightarrow a = 5 \cos(-\pi) = -5, b = 5 \sin(-\pi) = 0$

c) $z_3 = 26_{3\pi/2} \Rightarrow a = 26 \cos \dfrac{3\pi}{2} = 0, b = 26 \sin \dfrac{3\pi}{2} = -26$

d) $z_4 = 1_{180°} \Rightarrow a = \cos 180° = -1, b = \sin 180° = 0$

e) $z_5 = 4_{\pi/3} \Rightarrow a = 4 \cos \dfrac{\pi}{3} = 2, b = 4 \sin \dfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$

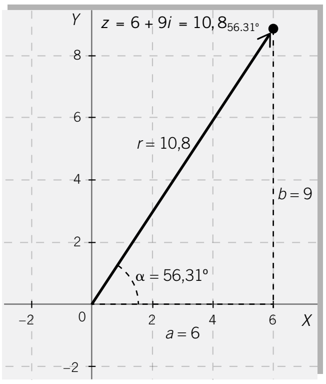
f) $z_6 = 8_{45°} \Rightarrow a = 8 \cos 45° = 4\sqrt{2}, b = 8 \sin 45° = 4\sqrt{2}$



25. a) $a = 8 > 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(0/8) = 0$

b) $a = -13 < 0 \Rightarrow \alpha = 180° - \text{arc tg}(0/13) = 180° - 0 = \pi$

26. a) $\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = 10{,}8 \\ \alpha = \text{arc tg}(9/6) = 56{,}31° \end{array}\right\} \Rightarrow z = 10{,}8_{56{,}31°}$

b) 

27. $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$a = -\sqrt{2} < 0, b = \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \alpha = \pi - \text{arc tg}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 2_{3\pi/4}$

28. a) $r = \sqrt{7^2} = 7, b = 7 > 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}\dfrac{7}{0} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 7_{\pi/2}$

b) $\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7,07 \\ a = -5 < 0, b = 5 > 0 \Rightarrow \alpha = 180° - \text{arc tg}\dfrac{5}{5} = 135° \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 7,07_{135°}$

c) $r = |z| = \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6, \alpha = \text{arc tg}\dfrac{0}{-6} = \pi \Rightarrow z = 6_\pi$

d) $\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 5,66 \\ a = 4 > 0, b = -5 < 0 \Rightarrow \alpha = 360° - \text{arc tg}\dfrac{4}{4} = 315° \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 5,66_{315°}$

e) $z = 2i^2 = -2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ a = -2 < 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}\dfrac{0}{2} = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 2_\pi$

29. $z = -5 + 10i \Rightarrow -z = 5 - 10i \Rightarrow \overline{-z} = 5 + 10i$

$\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 11,18 \\ \alpha = \text{arc tg}\dfrac{10}{5} = 63,43° \end{array}\right\} \Rightarrow z = 11,18_{63,43°}$

30. a) $z = 7_{5\pi/2} = 7\cos(5\pi/2) + 7i\,\sin(5\pi/2) = 7i$

b) $z = 1_{-\pi/2} = \cos(-\pi/2) + i\,\sin(-\pi/2) = -i$

c) $z = 9_{3\pi/2} = 9\cos(3\pi/2) + 9i\,\sin(3\pi/2) = -9i$

d) $z = 3_{\pi/4} = 3\cos(\pi/4) + 3i\,\sin(\pi/4) = 2,12 + 2,12i$

31. a) $z_1 \cdot z_2 = 8_{3\pi/2} \cdot 0,5_{\pi/2} = (8 \cdot 0,5)_{(3\pi/2+\pi/2)} = 4_{2\pi}$

b) $z_1 \cdot z_2 = 25_{\pi/2} \cdot 2_{\pi/2} = (25 \cdot 2)_{(\pi/2+\pi/2)} = 50_\pi$

c) $z_1 \cdot z_2 = e_{\pi/3} \cdot 7_{\pi/5} = (e \cdot 7)_{(\pi/3+\pi/5)} = 7e_{8\pi/15}$

d) $z_1 \cdot z_2 = 6_{5°} \cdot 5_{6°} = (6 \cdot 5)_{(5°+6°)} = 30_{11°}$

e) $z_1 \cdot z_2 = 2_{2\pi} \cdot 7_{2\pi} = (2 \cdot 7)_{(2\pi+2\pi)} = 14_{4\pi} = 14_{2\pi}$

32. a) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{8_{5\pi/2}}{0,5_{\pi/2}} = \left(\dfrac{8}{0,5}\right)_{(5\pi/2-\pi/2)} = 16_{2\pi}$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{10_{\pi/2}}{2_{\pi/2}} = \left(\dfrac{10}{2}\right)_{(\pi/2-\pi/2)} = 5_0$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5_{\pi/3}}{1_{\pi/5}} = \left(\dfrac{5}{1}\right)_{(\pi/3-\pi/5)} = 5_{2\pi/15}$

d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1_{5°}}{10_{6°}} = \left(\dfrac{1}{10}\right)_{(5°-6°)} = 0,1_{-1°} = 0,1_{359°}$

e) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2_{2\pi}}{4_{-2\pi}} = \left(\dfrac{2}{4}\right)_{(2\pi-(-2\pi))} = 0,5_{4\pi} = 0,5_{2\pi}$

33. a) $z^n = (10_{\pi/2})^3 = (10^3)_{3\cdot\pi/2} = 1000_{3\pi/2}$

b) $z^n = (2_{3\pi/2})^6 = (2^6)_{6\cdot 3\pi/2} = 64_{9\pi} = 64_\pi$

c) $z^n = (1_\pi)^9 = (1^9)_{9\cdot\pi} = 1_{9\pi} = 1_\pi$

d) $z^n = (2_{1°})^4 = (2^4)_{4\cdot 1°} = 16_{4°}$

e) $z^n = (5_{90°})^2 = (5^2)_{2\cdot 90°} = 25_{180°}$

f) $z^n = (3_{30°})^3 = (3^3)_{3\cdot 30°} = 27_{90°}$

34. a) $z_1 \cdot z_2 = 2_{\pi/2} \cdot 10_{-\pi/2} = (2 \cdot 10)_{(\pi/2-\pi/2)} = 20$

b) $z_1^3 \cdot z_2 = (2_{\pi/2})^3 \cdot 10_{-\pi/2} = 8_{3\pi/2} \cdot 10_{-\pi/2} = 80_{(3\pi/2-\pi/2)} = 80_\pi$

c) $(z_1/z_2)^6 = \left(\dfrac{2_{\pi/2}}{10_{-\pi/2}}\right)^6 = \left(\left(\dfrac{1}{5}\right)_\pi\right)^6 = 5^{-6}{}_{6\pi} = 5^{-6}$

d) Les arrels quadrades de $z_2 = 10_{-\pi/2}$ tindran mòdul $r = \sqrt{10}$ i arguments:

$\alpha_1 = \dfrac{-\pi/2 + 0}{2} = -\dfrac{\pi}{4}, \alpha_2 = \dfrac{-\pi/2 + 2\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$

$z_{2_1} = \sqrt{10}_{-\pi/4}, z_{2_2} = \sqrt{10}_{3\pi/4}$

$z_1 \cdot \sqrt{z_2} = 2_{\pi/2} \cdot \sqrt{10_{-\pi/2}} = \begin{cases} 2_{\pi/2} \cdot \sqrt{10}_{-\pi/4} = 6,3_{\pi/4} \\ 2_{\pi/2} \cdot \sqrt{10}_{3\pi/4} = 6,3_{5\pi/4} \end{cases}$

35. a) Les arrels quartes de $z = 16_{120°}$ tindran mòdul $r = \sqrt[4]{16} =$ $= 2$ i arguments:

$\alpha_1 = \dfrac{120° + 0}{4} = 30°, \alpha_2 = \dfrac{120° + 360°}{4} = 120°,$

$\alpha_3 = \dfrac{120° + 2 \cdot 360°}{4} = 210°, \alpha_4 = \dfrac{120° + 3 \cdot 360°}{4} = 300°$

$z_1 = 2_{30°}, z_2 = 2_{120°}, z_3 = 2_{210°}, z_4 = 2_{300°}$

b) Les arrels cinquenes de $z = 1_{10°}$ tindran mòdul $r = \sqrt[5]{1} = 1$ i arguments:

$\alpha_1 = \dfrac{10° + 0}{5} = 2°, \alpha_2 = \dfrac{10° + 360°}{5} = 74°, \alpha_3 =$

$= \dfrac{10° + 2 \cdot 360°}{5} = 146°, \alpha_4 = \dfrac{10° + 3 \cdot 360°}{5} = 218°,$

$\alpha_5 = \dfrac{10° + 4 \cdot 360°}{5} = 290°$

$z_1 = 1_{2°}, z_2 = 1_{74°}, z_3 = 1_{146°}, z_4 = 1_{218°}, z_5 = 1_{290°}$

c) Les arrels cúbiques de $z = 27_\pi$ tindran mòdul $r = \sqrt[3]{27} =$ $= 3$ i arguments:

$\alpha_1 = \dfrac{\pi + 0}{3} = \dfrac{\pi}{3}, \alpha_2 = \dfrac{\pi + 2\pi}{3} = \pi, \alpha_3 = \dfrac{\pi + 2 \cdot 2\pi}{3} =$

$= \dfrac{5\pi}{3} \Rightarrow z_1 = 3_{\pi/3}, z_2 = 3_\pi, z_3 = 3_{5\pi/3}$

d) Les arrels quadrades de $z = 4_{30°}$ tindran mòdul $r = \sqrt[2]{4} = 2$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{30°}{2} = 15°, \alpha_2 = \frac{30° + 360°}{2} = 195° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 = 2_{15°}, z_2 = 2_{195°}$$

e) En primer lloc, es converteix el nombre complex $z = 1 + i$ a forma polar:

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \alpha = \text{arc tg}(1/1) = 45° \Rightarrow z = \sqrt{2}_{45°}$

Les arrels quartes de $z = \sqrt{2}_{45°}$ tindran mòdul $r = \sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{45° + 0}{4} = 11,25°, \alpha_2 = \frac{45° + 360°}{4} = 101,25°,$$

$$\alpha_3 = \frac{45° + 2 \cdot 360°}{4} = 191,25°,$$

$$\alpha_4 = \frac{45° + 3 \cdot 360°}{4} = 281,25°$$

$$z_1 = \sqrt[8]{2}_{11,25°}, z_2 = \sqrt[8]{2}_{101,25°}, z_3 = \sqrt[8]{2}_{191,25°}, z_4 = \sqrt[8]{2}_{281,25°}$$

f) Les arrels sisenes de $z = 2_{27°}$ tindran mòdul $r = \sqrt[6]{2}$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{27° + 0}{6} = 4,5°, \alpha_2 = \frac{27° + 360°}{6} = 64,5°,$$

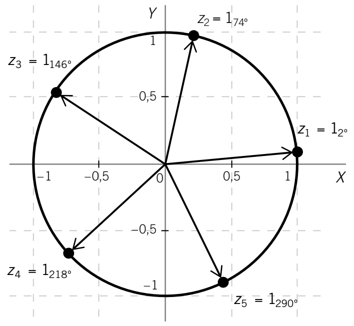
$$\alpha_3 = \frac{27° + 2 \cdot 360°}{6} = 124,5°, \alpha_4 = \frac{27° + 3 \cdot 360°}{6} = 184,5°,$$

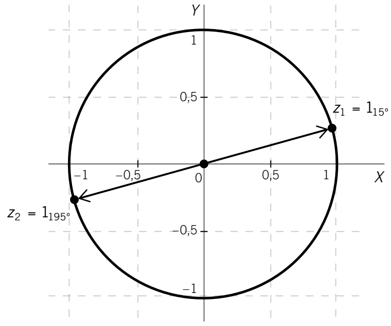
$$\alpha_5 = \frac{27° + 4 \cdot 360°}{6} = 244,5°, \alpha_6 = \frac{27° + 5 \cdot 360°}{6} = 304,5°$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}_{4,5°}, z_2 = \sqrt[6]{2}_{64,5°}, z_3 = \sqrt[6]{2}_{124,5°}, z_4 = \sqrt[6]{2}_{184,5°},$$

$$z_5 = \sqrt[6]{2}_{244,5°}, z_6 = \sqrt[6]{2}_{304,5°}$$

36.





37. a) La part imaginària és el doble que la part real; aleshores, el nombre complex serà de la forma: $z = a + 2ai$

$$|z| + a = 80,9 \Rightarrow \sqrt{a^2 + (2a)^2} + a = \sqrt{5a^2} + a =$$

$$= a\sqrt{5} + a = 80,9$$

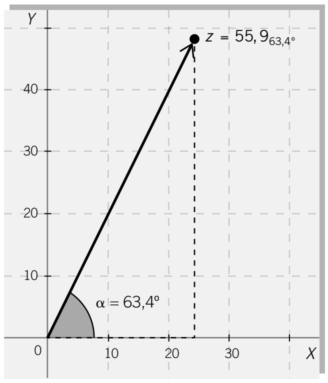
$$\Rightarrow a(\sqrt{5} + 1) = 80,9 \Rightarrow a = \frac{80,9}{\sqrt{5} + 1} = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 25 + 50i$$

La seva forma polar és:

$$\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{25^2 + 50^2} = 55,9 \\ \alpha = \text{arc tg}(50/25) = 63,4 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 55,9_{63,4°}$$

b)



38. L'arrel cúbica indicada amb el color blau té com a afix $(a, b) = (-2, 0) \Rightarrow r = \sqrt{(-2)^2} = 2 \Rightarrow r^3 = 2^3 = 8$, que és el mòdul del nombre complex que s'està buscant. D'altra banda, l'angle respecte de l'origen d'arrel cúbica indicada amb el color vermell és $\pi/3$, el de l'arrel indicada amb el color blau és π i el de l'arrel indicada amb el color negre és $5\pi/3$. Se substitueixen aquests valors en la fórmula d'arguments $\frac{\pi}{3} = \frac{x}{3}, \pi = \frac{x + 2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} = \frac{x + 4\pi}{3}$ en què x és l'argument del nombre complex que es busca. Resolent les igualtats, tenim que: $x = \pi \Rightarrow z = 8_\pi$

39. a) $z_1 + z_2 = (8 - 5i) + (4 - 12i) = 12 - 17i$

$$(z_1 + z_2)^{-1} = \frac{1}{12 - 17i} \cdot \frac{12 + 17i}{12 + 17i} = \frac{12 + 17i}{12^2 + 17^2} =$$

$$= \frac{12}{433} + \frac{17i}{433}$$

b) $z_1 = 8 - 5i \Rightarrow r = \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{89}, a = 8 > 0,$
$b = -5 < 0$

$\alpha = 360° - \text{arc tg}(5/8) = 327,99° \Rightarrow z_1 = \sqrt{89}_{327,99°}$

$z_2 = 4 - 12i \Rightarrow r = \sqrt{4^2 + (-12)^2} = \sqrt{160}, a = 4 > 0,$
$b = -12 < 0 \Rightarrow \alpha = 360° - \text{arc tg}(12/4) = 288,43°$

$z_2 = \sqrt{160}_{288,43°}$

$z_1 + z_2 = 12 - 17i \Rightarrow r = \sqrt{12^2 + (-17)^2} = \sqrt{433}, a =$
$= 12 > 0, b = -17 < 0 \Rightarrow \alpha = 360° - \text{arc tg}(17/12) =$
$= 305,22°$

$$z_1 + z_2 = \sqrt{433}_{305,22°} \Rightarrow (z_1 + z_2)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{433}_{305,22°}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{433}}\right)_{(0-305,22°)} = \left(\frac{\sqrt{433}}{433}\right)_{-305,22°} = \left(\frac{\sqrt{433}}{433}\right)_{54,78°}$$

c) Per comprovar que les operacions dels apartats a) i b) són les mateixes, es passa el resultat de l'apartat a) a forma polar i es compara amb el resultat de l'apartat b).

$(z_1 + z_2)^{-1} = \dfrac{12}{433} + \dfrac{17i}{433} \Rightarrow r = \sqrt{\left(\dfrac{12}{433}\right)^2 + \left(\dfrac{17}{433}\right)^2} =$

$= \dfrac{\sqrt{433}}{433},$

$\alpha = \text{arc tg}(17/12) = 54{,}78° \Rightarrow (z_1 + z_2)^{-1} = \left(\dfrac{\sqrt{433}}{433}\right)_{54{,}78°}$

40. a) $\sqrt[6]{3_\pi \cdot 3_\pi} = \sqrt[6]{9_{2\pi}} \Rightarrow$ les arrels sisenes de $z = 9_{2\pi}$ tindran mòdul $r = \sqrt[6]{9}$ i arguments:

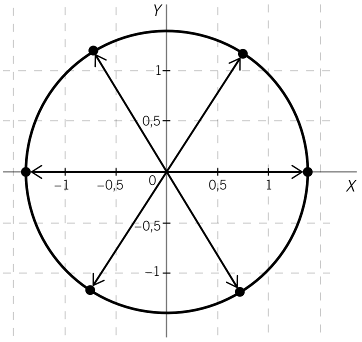
$\alpha_1 = \dfrac{2\pi + 0}{6} = \dfrac{\pi}{3}, \alpha_2 = \dfrac{2\pi + 2\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3},$

$\alpha_3 = \dfrac{2\pi + 4\pi}{6} = \pi, \alpha_4 = \dfrac{2\pi + 6\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{3},$

$\alpha_5 = \dfrac{2\pi + 8\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{3}, \alpha_6 = \dfrac{2\pi + 10\pi}{6} = 2\pi$

$z_1 = \sqrt[6]{9}_{\pi/3}, z_2 = \sqrt[6]{9}_{2\pi/3}, z_3 = \sqrt[6]{9}_{\pi},$

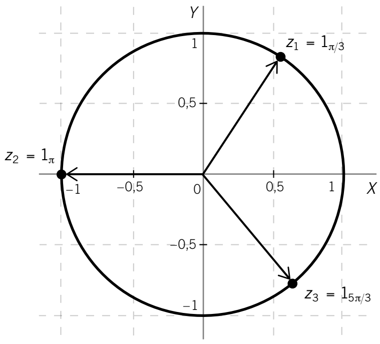
$z_4 = \sqrt[6]{9}_{4\pi/3}, z_5 = \sqrt[6]{9}_{5\pi/3}, z_6 = \sqrt[6]{9}_{2\pi}$



b) $\sqrt[3]{1_{2\pi} \cdot 1_{3\pi}} = \sqrt[3]{1_{5\pi}} = \sqrt[3]{1_\pi} \Rightarrow$ les arrels cúbiques de $z = 1_\pi$ tindran mòdul $r = \sqrt[3]{1} = 1$ i arguments:

$\alpha_1 = \dfrac{\pi + 0}{3} = \dfrac{\pi}{3}, \alpha_2 = \dfrac{\pi + 2\pi}{3} = \pi, \alpha_3 = \dfrac{\pi + 4\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$

$z_1 = 1_{\pi/3}, z_2 = 1_\pi, z_3 = 1_{5\pi/3}$

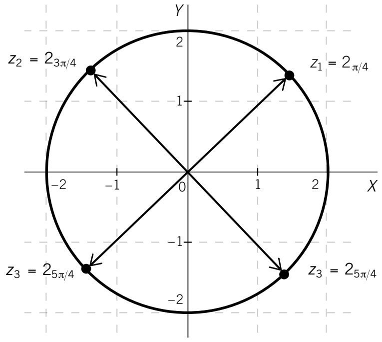


c) $\sqrt[4]{16_{2\pi} \cdot 1_{3\pi}} = \sqrt[4]{16_{5\pi}} = \sqrt[4]{16_\pi} \Rightarrow$ les arrels quartes de $z = 16_\pi$ tindran mòdul $r = \sqrt[4]{16} = 2$ i arguments:

$\alpha_1 = \dfrac{\pi + 0}{4} = \dfrac{\pi}{4}, \alpha_2 = \dfrac{\pi + 2\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4},$

$\alpha_3 = \dfrac{\pi + 4\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}, \alpha_4 = \dfrac{\pi + 6\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$

$z_1 = 2_{\pi/4}, z_2 = 2_{3\pi/4}, z_3 = 2_{5\pi/4}, z_4 = 2_{7\pi/4}$

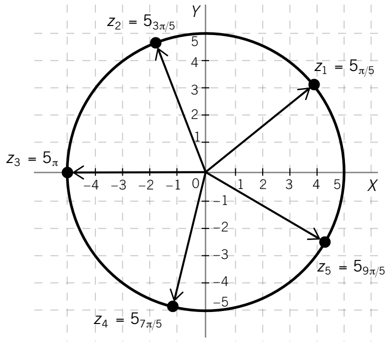


d) $\sqrt[5]{25_{\pi/2} \cdot 125_{\pi/2}} = \sqrt[5]{3125_\pi} \Rightarrow$ les arrels cinquenes de $z = 3125_\pi$ tindran mòdul $r = \sqrt[5]{3125} = 5$ i arguments:

$\alpha_1 = \dfrac{\pi + 0}{5} = \dfrac{\pi}{5}, \alpha_2 = \dfrac{\pi + 2\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{5}, \alpha_3 = \dfrac{\pi + 4\pi}{5} = \pi,$

$\alpha_4 = \dfrac{\pi + 6\pi}{5} = \dfrac{7\pi}{5}, \alpha_5 = \dfrac{\pi + 8\pi}{5} = \dfrac{9\pi}{5}$

$z_1 = 5_{\pi/5}, z_2 = 5_{3\pi/5}, z_3 = 5_\pi, z_4 = 5_{7\pi/5}, z_5 = 5_{9\pi/5}$



e) $\sqrt[6]{1_{\pi/3} \cdot 1_{\pi/2}} = \sqrt[6]{1_{5\pi/6}} \Rightarrow$ les arrels sisenes de $z = 1_{5\pi/6}$ tindran mòdul $r = \sqrt[6]{1} = 1$ i arguments:

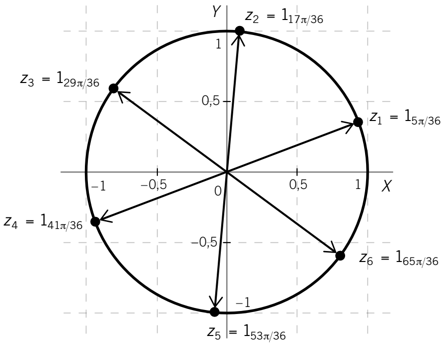
$\alpha_1 = \dfrac{5\pi/6 + 0}{6} = \dfrac{5\pi}{36}, \alpha_2 = \dfrac{5\pi/6 + 2\pi}{6} = \dfrac{17\pi}{36},$

$\alpha_3 = \dfrac{5\pi/6 + 4\pi}{6} = \dfrac{29\pi}{36}, \alpha_4 = \dfrac{5\pi/6 + 6\pi}{6} = \dfrac{41\pi}{36},$

$\alpha_5 = \dfrac{5\pi/6 + 8\pi}{6} = \dfrac{53\pi}{36}, \alpha_6 = \dfrac{5\pi/6 + 10\pi}{6} = \dfrac{65\pi}{36}$

$z_1 = 1_{5\pi/36}, z_2 = 1_{17\pi/36}, z_3 = 1_{29\pi/36}, z_4 = 1_{41\pi/36},$

$z_5 = 1_{53\pi/36}, z_6 = 1_{65\pi/36}$



f) $\sqrt[6]{-3 \cdot (243)} = \sqrt[6]{-729} \Rightarrow$ Es converteix $z = -729$ a forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{(-729)^2} = 729 \\ a < 0 \Rightarrow \alpha = \pi - \text{arc tg}(0 / 729) = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow z = 729_{\pi}$$

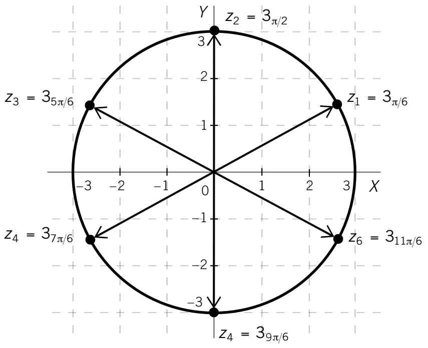
Les arrels sisenes de $z = 729_{\pi}$ tindran mòdul $r = \sqrt[6]{729} =$ $= 3$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{\pi + 0}{6} = \frac{\pi}{6}, \alpha_2 = \frac{\pi + 2\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi + 4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \alpha_4 = \frac{\pi + 6\pi}{6} = \frac{7\pi}{6},$$

$$\alpha_5 = \frac{\pi + 8\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}, \alpha_6 = \frac{\pi + 10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$z_1 = 3_{\pi/6}, z_2 = 3_{\pi/2}, z_3 = 3_{5\pi/6}, z_4 = 3_{7\pi/6},$
$z_5 = 3_{3\pi/2}, z_6 = 3_{11\pi/6}$



41. a) $(x, y) = \left(\sqrt{3}, 1\right) \Rightarrow z = \sqrt{3} + i$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2 \\ \alpha = \text{arc tg}\left(1/\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2_{\pi/6}$$

b) $z \cdot \bar{z} = \left(\sqrt{3} + i\right) \cdot \left(\sqrt{3} - i\right) = 4$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{4^2} = 4 \\ \alpha = \text{arc tg}\,(0/4) = 0° \end{array}\right\} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 4_{0°}$$

c) Les arrels cúbiques de $z = 2_{\pi/6}$ tindran mòdul $r = \sqrt[3]{2} =$ $= 1,26$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{\pi/6 + 0}{3} = \frac{\pi}{18}, \alpha_2 = \frac{\pi/6 + 2\pi}{3} = \frac{13\pi}{18},$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi/6 + 4\pi}{3} = \frac{25\pi}{18} \Rightarrow z_1 = 1,26_{\pi/18}, z_2 =$$
$= 1,26_{13\pi/18}, z_3 = 1,26_{25\pi/18}$

5 EQUACIONS AMB SOLUCIONS COMPLEXES

Pàgs. 159 i 160

42. a) $x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0,$
$x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$

Per tant, les solucions són reals.

b) $x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{-16} = \sqrt{16}\,i \Rightarrow x = \pm 4i$

En aquest cas, les solucions són complexes.

c) $6x^2 = -6 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = \sqrt{1}\,i \Rightarrow x = \pm i$

Les solucions són complexes.

d) $-10x^2 = 1000 \Rightarrow x^2 = -100 \Rightarrow x = \sqrt{100}\,i \Rightarrow x = \pm 10i$

Aleshores, les solucions són complexes.

e) $x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x^2 = -25 \Rightarrow x = \sqrt{-25} =$
$= \sqrt{25}\,i \Rightarrow x = \pm 5i$

Les solucions són complexes.

f) $1000x^2 = -10 \Rightarrow x^2 = -0,01 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{0,01}\,i \Rightarrow x = \pm 0,1i$

Per tant, les solucions són complexes.

43. a) $x^2 + 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$

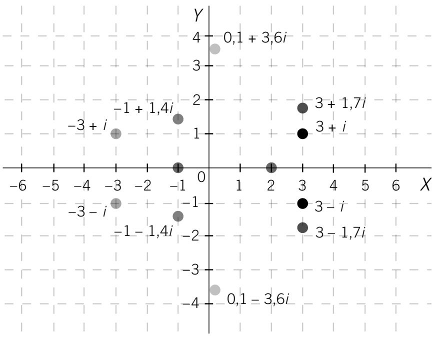
b) $x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$

c) $x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}\,i}{2} = -1 \pm 1,4i$

d) $6x^2 - 36x + 72 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{36 \pm \sqrt{432}\,i}{12} = 3 \pm 1,7i$

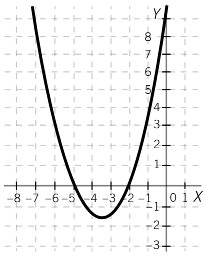
e) $9x^2 - 2x + 121 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4352}\,i}{18} = 0,1 \pm 3,6i$

f) $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$



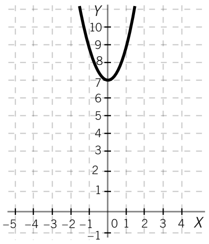
44. $x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-7 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -5$

Per tant, els punts de tall amb l'eix X són (–2, 0) i (–5, 0), ja que les solucions de l'equació són reals.

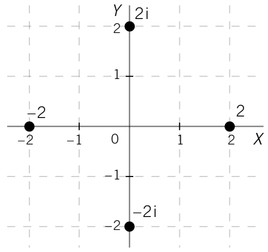


45. $10x^2 + x + 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{279}\,i}{20} = -0,05 \pm 0,83i$

Aquesta equació no té punts de tall amb l'eix X perquè les solucions són complexes.



46. a) Sigui $x^4 = t^2 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = \sqrt{16} \Rightarrow t = \pm 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$, $x = \sqrt{-4} = \pm 2i$



b) Sigui $x^4 = t^2 \Rightarrow t^2 = -16 \Rightarrow t = \sqrt{16}\,i \Rightarrow t = \pm 4i$ i, com que són nombres complexos, es converteixen a forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{4^2} = 4 \\ \alpha = \text{arc tg}(4 / 0) = \pi/2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 4_{\pi/2}$$

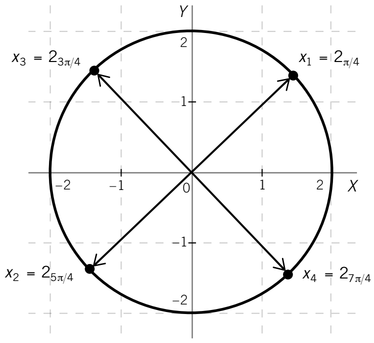
$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{(-4)^2} = 4 \\ a = 0, b < 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(4 / 0) = 3\pi/2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 4_{3\pi/2}$$

Les arrels quadrades de $z = 4_{\pi/2}$ tindran mòdul $r = \sqrt{4} = 2$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{\pi/2 + 0}{2} = \frac{\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{\pi/2 + 2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = 2_{\pi/4}, x_2 = 2_{5\pi/4}$$

Les arrels quadrades de $z = 4_{3\pi/2}$ tindran mòdul $r = \sqrt{4} = 2$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{3\pi/2 + 0}{2} = \frac{3\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{3\pi/2 + 2\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_3 = 2_{3\pi/4}, x_4 = 2_{7\pi/4}$$



c) Sigui $x^4 = t^2 \Rightarrow t^2 = -1 \Rightarrow t = \sqrt{-1} \Rightarrow t = \pm i$ i, com que són nombres complexos, es converteixen a forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{1^2} = 1 \\ \alpha = \text{arc tg}(1 / 0) = \pi/2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1_{\pi/2}$$

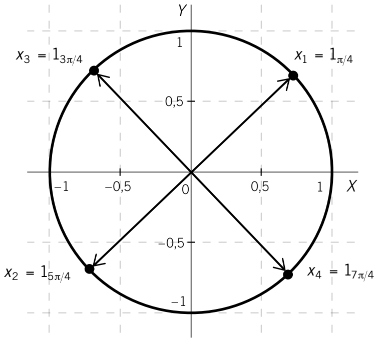
$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{(-1)^2} = 1 \\ a = 0, b < 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(1 / 0) = 3\pi/2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1_{3\pi/2}$$

Les arrels quadrades de $z = 1_{\pi/2}$ tindran mòdul $r = \sqrt{1} = 1$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{\pi/2 + 0}{2} = \frac{\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{\pi/2 + 2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = 1_{\pi/4}, x_2 = 1_{5\pi/4}$$

Les arrels quadrades de $z = 1_{3\pi/2}$ tindran mòdul $r = \sqrt{1} = 1$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{3\pi/2 + 0}{2} = \frac{3\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{3\pi/2 + 2\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_3 = 1_{3\pi/4}, x_4 = 1_{7\pi/4}$$



d) Sigui $x^4 = t^2 \Rightarrow t^4 = 1$ i sigui $t^2 = y \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ $t = \pm 1, t = \pm i \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm i$. Com que $t = \pm i$ són nombres complexos es converteixen a forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{1^2} = 1 \\ \alpha = \text{arc tg}(1 / 0) = \pi/2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1_{\pi/2}$$

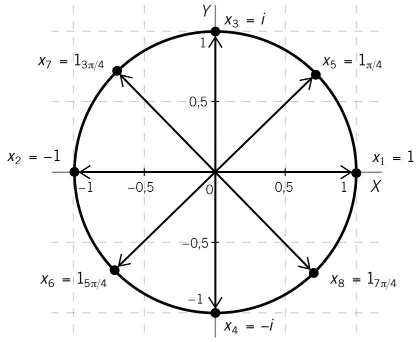
$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{(-1)^2} = 1 \\ a = 0, b < 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(1 / 0) = 3\pi/2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1_{3\pi/2}$$

Les arrels quadrades de $z = 1_{\pi/2}$ tindran mòdul $r = \sqrt{1} = 1$ i arguments:

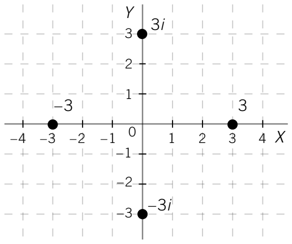
$$\alpha_1 = \frac{\pi/2 + 0}{2} = \frac{\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{\pi/2 + 2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_5 = 1_{\pi/4}, x_6 = 1_{5\pi/4}$$

Les arrels quadrades de $z = 1_{3\pi/2}$ tindran mòdul $r = \sqrt{1} = 1$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{3\pi/2 + 0}{2} = \frac{3\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{3\pi/2 + 2\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_7 = 1_{3\pi/4}, x_8 = 1_{7\pi/4}$$

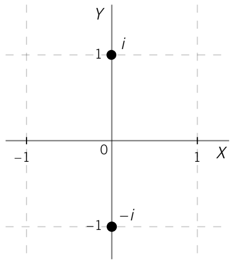


e) Sigui $x^4 = t^2 \Rightarrow 3t^2 = 243 \Rightarrow t = \sqrt{81} = \pm 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$, $x = \sqrt{-9} = \pm 3i$



f) Sigui $x^4 = t^2, x^2 = t \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1$

$x = \sqrt{-1} = \pm i$ (Multiplicitat 2)



47. a) Sigui $x^4 = t^2, x^2 = t \Rightarrow t^2 + 6t + 10 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} =$
$= -3 \pm i \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3+i}, x = \pm\sqrt{-3-i}$

b) Sigui $x^4 = t^2, x^2 = t \Rightarrow t^2 - 6t + 10 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{6 \pm 2i}{2} =$
$= 3 \pm i \Rightarrow x = \pm\sqrt{3+i}, x = \pm\sqrt{3-i}$

c) Sigui $x^4 = t^2, x^2 = t \Rightarrow t^2 + 2t + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}\,i}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\,i \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-1+\sqrt{2}\,i}, x = \pm\sqrt{-1-\sqrt{2}\,i}$

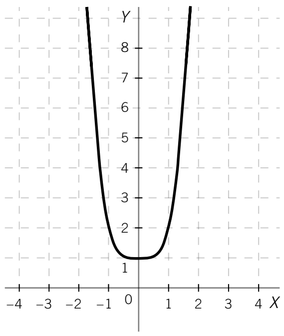
d) Sigui $x^4 = t^2, x^2 = t \Rightarrow 9t^2 - 2t + 121 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{2 \pm \sqrt{4352}\,i}{18} = \dfrac{2 \pm 16\sqrt{17}\,i}{18} = \dfrac{1 \pm 8\sqrt{17}\,i}{9} \Rightarrow$

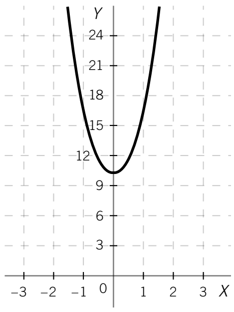
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1+8\sqrt{17}\,i}{9}} = \pm\dfrac{\sqrt{1+8\sqrt{17}\,i}}{3}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{1-8\sqrt{17}\,i}{9}} = \pm\dfrac{\sqrt{1-8\sqrt{17}\,i}}{3}$

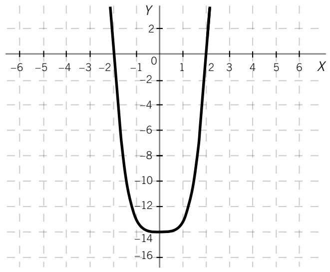
48. a) $P(x) = 1 + x^4 \Rightarrow$ Si s'observa la gràfica, es veu que no hi ha cap punt de tall amb l'eix *X;* aleshores, les arrels del polinomi són complexes.



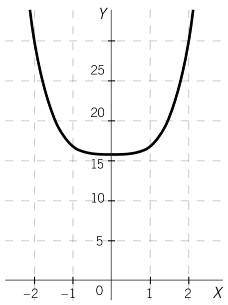
b) $P(x) = x^4 + 6x^2 + 10 \Rightarrow$ No hi ha cap punt de tall amb l'eix *X;* aleshores, les arrels del polinomi són complexes.



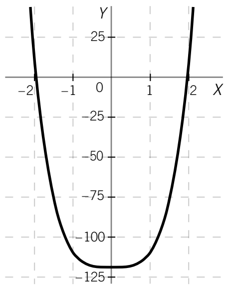
c) $P(x) = x^4 - 16 \Rightarrow$ Si s'observa la gràfica, es veu que els punts de tall amb l'eix *X* són (–2, 0) i (2, 0); aleshores, el polinomi té dues arrels reals i les dues restants són complexes.



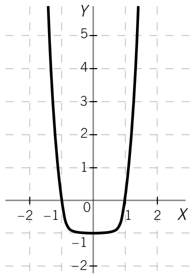
d) $P(x) = x^4 + 16 \Rightarrow$ Comprovem amb la gràfica que no hi ha cap punt de tall amb l'eix *X;* aleshores, les arrels del polinomi són complexes.



e) $P(x) = 9x^4 - 2x^2 - 121 \Rightarrow$ Amb la gràfica comprovem que hi ha dos punts de tall amb l'eix *X;* aleshores, el polinomi té dues arrels reals i les dues restants són complexes.



f) $P(x) = -1 + x^8 \Rightarrow$ Si s'observa la gràfica, es veu que hi ha dos punts de tall amb l'eix *X;* per tant, el polinomi té dues arrels reals i les sis restants són complexes.



49. a) $z_1 \cdot z_2 = (3\,e^{i\pi x}) \cdot (15\,e^{-i\pi/3}) = 3 \cdot 15\,e^{(i\pi x - i\pi/3)} = 45e^{(3x-1)\cdot i\pi/3}$

b) $z_1 \cdot z_2 = 45 \Rightarrow 45e^{(3x-1)\cdot i\pi/3} = 45 \Rightarrow (3x-1)\dfrac{i\pi}{3} = 0$

$e^{(3x-1)\cdot i\pi/3} = 1 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{3x-1}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\dfrac{3x-1}{3}\pi\right) = 1$

Perquè aquesta igualtat es compleixi, ha de succeir que:

$\cos\left(\dfrac{3x-1}{3}\pi\right) = 1$ i $\sin\left(\dfrac{3x-1}{3}\pi\right) = 0$

I això és cert quan $\dfrac{3x-1}{3}\pi$ és igual a $2k\pi$, k enter

$\Rightarrow \dfrac{3x-1}{3}\pi = 2k\pi, k \text{ enter} \Rightarrow 3x - 1 = 6k, k \text{ enter}$

$\Rightarrow x = \dfrac{6k+1}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{6k}{3}, k \text{ enter}$

c) $z_1 \cdot z_2 = 22{,}5 - 38{,}97i \Rightarrow 45e^{(3x-1)\cdot i\pi/3} = 22{,}5 - 38{,}97i$

$e^{(3x-1)\cdot i\pi/3} = 0{,}5 - 0{,}866i \Rightarrow \cos\left(\dfrac{3x-1}{3}\pi\right) +$

$+i\,\sin\left(\dfrac{3x-1}{3}\pi\right) = 0{,}5 - 0{,}866i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\dfrac{3x-1}{3}\pi\right) = 0{,}5 \\ \text{sen}\left(\dfrac{3x-1}{3}\pi\right) = -0{,}866 \end{cases}$$

L'únic quadrant en què el cosinus és positiu i el sinus negatiu és en el quart quadrant. D'altra banda, el cosinus serà 0,5 i el sinus serà –0,866 quan $\dfrac{3x-1}{3}\pi$ sigui igual a $-\pi/3 + 2k\pi$, k enter. Per tant, amb aquestes dues condicions es resol el sistema anterior:

$\dfrac{3x-1}{3}\pi = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi, k \text{ enter} \Rightarrow 3x - 1 = -1 + 6k,$
$k \text{ enter} \Rightarrow x = 2k, k \text{ enter}$

SÍNTESI Pàg. 160

50. a) $z = (8 + 5i) + (5 - 4i) = (8 + 5) + (5 - 4)i = 13 + i$

$\bar{z} = 13 - i, -z = -13 - i$

b) $z = (6 + 7i) - (-5 + 2i) = (6 - (-5)) + (7 - 2)i = 11 + 5i$

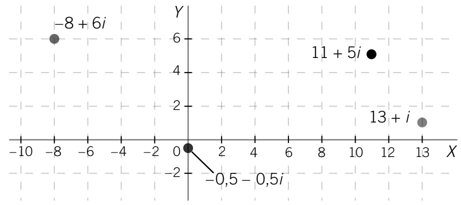
$\bar{z} = 11 - 5i, -z = -11 - 5i$

c) $z = (2i) \cdot (3 + 4i) = 6i + 8\cdot(-1) = -8 + 6i$

$\bar{z} = -8 - 6i, -z = 8 - 6i$

d) $z = \dfrac{2+2i}{4i} = \dfrac{2+2i}{4i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{2i-2}{-4} = \dfrac{-2}{-4} + \dfrac{2i}{-4} =$

$= 0{,}5 - 0{,}5i \Rightarrow \bar{z} = 0{,}5 + 0{,}5i, -z = -0{,}5 + 0{,}5i$



51. a) $z = 5_{27°} = 5\cos(27°) + i5\sin(27°) = 4{,}5 + 2{,}5i$

$z^{-1} = \dfrac{1}{4{,}5 + 2{,}5i} = \dfrac{4{,}5 - 2{,}5i}{4{,}5^2 + 2{,}5^2} =$

$= \dfrac{4{,}5 - 2{,}5i}{26{,}5} = 0{,}2 - 0{,}1i$

b) $z = 8_{5\pi/2} = 8\cos(5\pi/2) + i8\sin(5\pi/2) = 8i$

$z^{-1} = \dfrac{1}{8i} = \dfrac{1}{8i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{-8} = \dfrac{-i}{8}$

c) $z = 3_{65°} = 3\cos(65°) + i3\sin(65°) = 1{,}2 + 2{,}7i$

$z^{-1} = \dfrac{1}{1{,}2 + 2{,}7i} = \dfrac{1{,}2 - 2{,}7i}{1{,}2^2 + 2{,}7^2} =$

$= \dfrac{1{,}2 - 2{,}7i}{8{,}73} = 0{,}1 - 0{,}3i$

d) $z = 11_{-\pi/4} = 11\cos(-\pi/4) + i11\sin(-\pi/4) = 7{,}7 - 7{,}7i$

$z^{-1} = \dfrac{1}{7{,}7 - 7{,}7i} = \dfrac{7{,}7 + 7{,}7i}{7{,}7^2 + 7{,}7^2} = \dfrac{1 + 1i}{15{,}4} = 0{,}1 + 0{,}1i$

e) $z = 2_{30°} = 2\cos(30°) + i2\sin(30°) = 1{,}8 + i$

$z^{-1} = \dfrac{1}{1{,}8 + i} = \dfrac{1{,}8 - i}{1{,}8^2 + 1^2} = \dfrac{1{,}8 - i}{4{,}24} = 0{,}4 - 0{,}2i$

f) $z = 5_{\pi/3} = 5\cos(\pi/3) + i5\sin(\pi/3) = 2{,}5 + 4{,}5i$

$z^{-1} = \dfrac{1}{2{,}5 + 4{,}5i} = \dfrac{2{,}5 - 4{,}5i}{2{,}5^2 + 4{,}5^2} =$

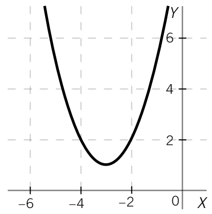
$= \dfrac{2{,}5 - 4{,}5i}{26{,}5} = 0{,}1 - 0{,}2i$

g) $z = 1_{270°} = \cos(270°) + i\sin(270°) = -i$

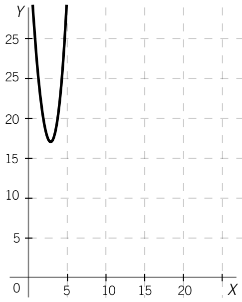
$z^{-1} = \dfrac{1}{-i} = \dfrac{1}{-i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{1} = i$

h) $z = 4_{2\pi} = 4\cos(2\pi) + i4\sin(2\pi) = 4 \Rightarrow z^{-1} = \dfrac{1}{4}$

52. a) Sigui $x^2 + 6x + 10$, en la gràfica s'observa que no hi ha cap punt de tall amb l'eix *X;* aleshores, les arrels de l'equació són complexes.

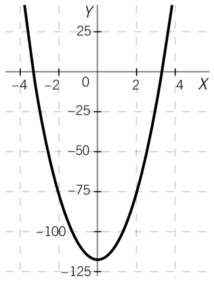


b) Sigui $6x^2 - 36x + 72$, en la gràfica s'observa que no hi ha punts de tall amb l'eix *X;* aleshores, les arrels de l'equació són complexes.

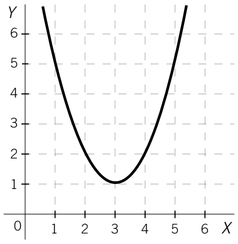


c) Aquesta funció representa una paràbola amb un mínim en el punt (0, 10), és a dir que no talla l'eix d'abscises. Les solucions de l'equació seràn complexes.

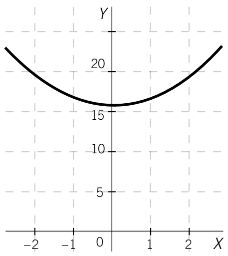
d) Sigui $9x^2 - 2x - 121$, si s'analitza la gràfica s'observa que hi ha dos punts de tall amb l'eix *X;* aleshores, les arrels de l'equació són reals.



e) Sigui $x^2 - 6x + 10 = 0$, en la gràfica s'observa que no hi ha punts de tall amb l'eix *X;* aleshores, les arrels de l'equació són complexes.



f) Sigui $x^2 + 16$, i segons la gràfica, no hi ha punts de tall amb l'eix *X;* per tant, les arrels de l'equació són complexes.



53. a) $100 = 100\,000x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{1000} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{1}{1000}} =$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{1000}} = \pm\frac{\sqrt{1000}}{1000} = \pm\frac{10\sqrt{10}}{1000} = \pm\frac{\sqrt{10}}{100}$$

Forma polar d'aquestes solucions:

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{100}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{100} \\ \alpha = \text{arc tg}(0 / (\sqrt{10}/100)) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = \left(\frac{\sqrt{10}}{100}\right)_{0°}$$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{\left(\dfrac{-\sqrt{10}}{100}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{100} \\ a < 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(0 / (\sqrt{10}/100)) = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{\sqrt{10}}{100}\right)_{180°}$$

b) Sigui $x^4 = t^2 \Rightarrow t^2 + 625 = 0 \Rightarrow t^2 = 625 \Rightarrow t = \pm 25$

$$\Rightarrow x = \sqrt{25} = \pm 5,\ x = \sqrt{-25} = \pm 5i$$

c) $2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

d) $11x^2 - 2x = -12 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-524}}{22} = \dfrac{2 \pm \sqrt{524}\,i}{22} =$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{131}\,i}{22} = \frac{1 \pm \sqrt{131}\,i}{11}$$

54. a) $z_1 = 6 - 8i \Rightarrow r = \sqrt{6^2 + (-8)^2} =$
$= 10, a = 6 > 0, b = -8 < 0 \Rightarrow$
$\alpha = 360° - \text{arc tg}(8 / 6) = 306{,}87° \Rightarrow z = 10_{306{,}87°}$
$z_2 = 4 + 12i \Rightarrow r = \sqrt{4^2 + 12^2} = 12{,}65, a = 4 > 0,$
$b = 12 > 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(12 / 4) = 71{,}57° \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 12{,}65_{71{,}57°}$
$z_1 \cdot z_2 = (10_{306{,}87°}) \cdot (12{,}65_{71{,}57°}) =$
$= (10 \cdot 12{,}65)_{(306{,}87° + 71{,}57°)} =$
$= 126{,}5_{378{,}44°} = 126{,}5_{18{,}44°}$

b) $z_1 \cdot z_2 = (6 - 8i) \cdot (4 + 12i) = (24 + 96) + (72 - 32)i = 120 + 40i$

Per comprovar que aquest resultat és el mateix que el de l'apartat a), es passa aquesta solució a forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{120^2 + 40^2} = \sqrt{16\,000} = 126{,}5 \\ \alpha = \text{arc tg}(40 / 120) = 18{,}44° \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 126{,}5_{18{,}44°}$$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{10_{306{,}87°}}{12{,}65_{71{,}57°}} = \left(\dfrac{10}{12{,}65}\right)_{(306{,}87° - 71{,}57°)} = 0{,}79_{235{,}3°}$

55. Siguin x els nombres complexos que s'estan buscant. Segons les condicions de l'exercici, resulta l'equació següent: $3x^4 + 6x^2 = -6$, es resol i s'obtenen els nombres complexos buscats anteriorment:

$$x^4 = t^2, x^2 = t \Rightarrow 3t^2 + 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{-6 \pm \sqrt{-36}}{6} =$$

$$= \frac{-6 \pm 6i}{6} = -1 \pm i \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1 + i},\ x = \pm\sqrt{-1 - i}$$

56. a) $i^2 = j^2 = k^2 = -1 \Rightarrow i = j = k = \sqrt{-1}$

- $ijk = \left(\sqrt{-1}\right)^3 = -1 \cdot \sqrt{-1} = -i$
- $ij = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

- $ik = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$
- $jk = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

b) Siguin $q_1 = a + bi + cj + dk$ i $q_2 = e + fi + gj + hk$; per tant: $(q_1 + q_2) = (a + e) + (b + f)i + (c + g)j + (d + h)k$

Avaluació (pàg. 162)

1. a) Falsa, ja que la part imaginària d'un nombre complex també ha de contenir el signe.

b) Falsa, perquè l'oposat d'un nombre complex ha de canviar el signe de tot el nombre complex.

c) Vertadera, no hi ha excepcions per a expressar un nombre en forma polar.

d) Falsa, tot nombre es pot representar en forma polar.

e) Vertadera. $z = 2i \Rightarrow z^{-1} = \dfrac{1}{2i} = \dfrac{1}{2i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{-2} = -0,5i$

f) Vertadera.

$$z = 3 + 2i \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{3+2i} = \frac{1}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} =$$

$$= \frac{3-2i}{3^2+2^2} = \frac{3-2i}{13} = 0,23 - 0,15i \Rightarrow \overline{z^{-1}} = 0,23 + 0,15i$$

g) Falsa, el mòdul d'un nombre complex mai no serà negatiu.

h) Falsa, $i^{150} = (i^4)^{37} \cdot i^2 = -1$

2. a) $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (-7i) = 3 + (2 - 7)i = 3 - 5i$

b) $|z_1| - \overline{z_2} = \sqrt{3^2 + 2^2} - (7i) = \sqrt{13} - 7i$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3+2i}{-7i} = \dfrac{3+2i}{-7i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{-2+3i}{7} = \dfrac{-2}{7} + \dfrac{3i}{7}$

d) $\dfrac{1}{z_1} - \left|\overline{z_2}\right| = \dfrac{1}{3+2i} - |7i| = \dfrac{1}{3+2i} - 7 =$

$$= \frac{1}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} - 7 = \frac{3-2i}{13} - 7 =$$

$$= \frac{-88-2i}{13} = \frac{-88}{13} - \frac{2i}{13}$$

e) $-z_1 - z_2 = -3 - 2i - (-7i) = -3 + 5i$

f) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (-7i) = -21i - 14 \cdot (-1) = 14 - 21i$

g) $z_1^2 + z_2^2 = (3 + 2i)^2 + (-7i)^3 = (5 + 12i) + 343i = 5 + 355i$

h) $\dfrac{1}{z_1+z_2} = \dfrac{1}{3-5i} = \dfrac{1}{3-5i} \cdot \dfrac{3+5i}{3+5i} =$

$$= \frac{3+5i}{34} = \frac{3}{34} + \frac{5i}{34}$$

3. a) $r = |z| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 4,47, a = 2 > 0,$

$b = -4 < 0 \Rightarrow \alpha = 360° - \text{arc tg}(4/2) = 296,56° \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 4,47_{296,56°}$

b) $z = 6_{2\pi} = 6\cos(2\pi) + i6\sin(2\pi) = 6$

c) $z = (1 + 2i)^2 = (1 - 4) + (2 + 2)i = -3 + 4i$

$$\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ a = -3 < 0, b = 4 > 0 \Rightarrow \alpha = 180° - \text{arc tg}(4/3) = 126,86° \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = 5_{126,86°}$

d) $z = (5 + 5i)^3 = (50i) \cdot (5 + 5i) = -250 + 250i$

$$\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{(-250)^2 + 250^2} = \sqrt{125\,000} = 353,55 \\ a < 0, b > 0 \Rightarrow \alpha = 180° - \text{arc tg}(250/250) = 135° \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = 353,55_{135°}$

e) $$\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3,6 \\ a = 2 > 0, b = 3 > 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(3/2) = 56,3° \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = 3,6_{56,3°}$

f) $z = 5_\pi + 5_{\pi/2} = \left(5\cos(\pi) + i5\sin(\pi)\right) +$

$+ \left(5\cos(\pi/2) + i5\sin(\pi/2)\right) = -5 + 5i$

g) $$\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{1^2} = 1 \\ a = 0, b = 1 > 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(1/0) = \pi/2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1_{\pi/2}$$

h) $z = 0,5_{2\pi/3} = 0,5\cos(2\pi/3) + i0,5\sin(2\pi/3) =$

$= -0,25 + 0,43i$

4. Sigui $z = 2b + bi$, ja que la part real és el doble de la part imaginària, aleshores, $(2b + bi) + (2b - bi)^2 = 5 - 3i \Rightarrow$ $\Rightarrow (3b^2 + 2b) + (b - 4b^2)i = 5 - 3i$

$$\left.\begin{array}{l} 3b^2 + 2b = 5 \\ b - 4b^2 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = \dfrac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \dfrac{-2 \pm 8}{6} \\ b = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{-8} = \dfrac{-1 \pm 7}{-8} \end{array}\right\} \Rightarrow b = 1$$

$z = 2b + bi = 2 + i$

5. a) $z_1 \cdot z_2 = 3_{\pi/2} \cdot 3_\pi = (3 \cdot 3)_{(\pi/2+\pi)} = 9_{3\pi/2}$

b) $z_1^3 \cdot z_2 = \left(3_{\pi/2}\right)^3 \cdot 3_\pi = 27_{3\pi/2} \cdot 3_\pi = (27 \cdot 3)_{(3\pi/2+\pi)} = 81_{5\pi/2}$

c) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^4 = \left(\dfrac{3_{\pi/2}}{3_\pi}\right)^4 = \left(\left(\dfrac{3}{3}\right)_{(\pi/2-\pi)}\right)^4 = \left(1_{-\pi/2}\right)^4 =$

$= \left(1_{3\pi/2}\right)^4 = 1_{4\cdot 3\pi/2} = 1_{6\pi} = 1_{2\pi}$

d) $\sqrt{z_1^3} = \sqrt{\left(3_{\pi/2}\right)^3} = \sqrt{27_{3\pi/2}} \Rightarrow$ Les arrels quadrades de $z = 27_{3\pi/2}$ tindran mòdul $r = \sqrt{27}$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{3\pi/2 + 0}{2} = \frac{3\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{3\pi/2 + 2\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{27}_{\,3\pi/4}, z_2 = \sqrt{27}_{\,7\pi/4}$

e) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3_{\pi/2}}{3_\pi} = \left(\dfrac{3}{3}\right)_{(\pi/2-\pi)} = 1_{-\pi/2} = 1_{3\pi/2}$

f) $\dfrac{z_1}{(z_2)^2} = \dfrac{3_{\pi/2}}{(3_\pi)^2} = \dfrac{3_{\pi/2}}{9_{2\pi}} = \left(\dfrac{3}{9}\right)_{(\pi/2-2\pi)} =$

$= \left(\dfrac{1}{3}\right)_{-3\pi/2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{\pi/2}$

g) Les arrels quadrades de $z_2 = 3_\pi$ tindran mòdul $r = \sqrt{3}$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}, \alpha_2 = \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_{2_1} = \sqrt{3}_{\,\pi/2}, z_{2_2} = \sqrt{3}_{\,3\pi/2}$

h) $z_1^2 + z_2^3 = \left(3_{\pi/2}\right)^2 + \left(3_\pi\right)^3 = 9_\pi + 27_{3\pi} = \left(9\cos(\pi) + i9\ \sin(\pi)\right) +$

$+\ (27\cos(3\pi) + i27\ \sin(3\pi)) = -9 - 27 = -36$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{(-36)^2} = 36 \\ a = -36 < 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}\left(0/36\right) = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow z_1^2 + z_2^3 = 36_\pi$$

6. Les solucions de l'equació $x^2 + 6x + 10 = 0$ són $x = -3 \pm i$, ja que és l'únic parell de solucions que són conjugats entre ells.

$$x^2 + 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{4}\,i}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$$

7. $$\frac{(k + 3i)^2 (1 - i)^2}{(2 - 2i)} = \frac{\left(k^2 + 6ki - 9\right)(-2i)}{(2 - 2i)} =$$

$$= \frac{-2k^2 i + 12k + 18i}{(2 - 2i)} = \frac{\left(-2k^2 i + 12k + 18i\right)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} =$$

$$= \frac{\left(4k^2 + 24k - 36\right) + \left(-4k^2 + 24k + 36\right)i}{8}$$

a) La condició perquè sigui un nombre real és:

$$\frac{\left(-4k^2 + 24k + 36\right)i}{8} = 0 \Rightarrow -4k^2 + 24k + 36 = 0$$

$$k = \frac{-24 \pm \sqrt{1152}}{-8} = \frac{-24 \pm 24\sqrt{2}}{-8} = 3 \pm 3\sqrt{2}$$

b) La condició perquè sigui un imaginari pur és:

$$\frac{\left(4k^2 + 24k - 36\right)}{8} = 0 \Rightarrow 4k^2 + 24k - 36 = 0$$

$$k = \frac{-24 \pm \sqrt{1152}}{8} = \frac{-24 \pm 24\sqrt{2}}{8} = -3 \pm 3\sqrt{2}$$

8. Es passa a forma polar el nombre complex $z = \sqrt{32} + \sqrt{32}\,i$:

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{\left(\sqrt{32}\right)^2 + \left(\sqrt{32}\right)^2} = \sqrt{64} = 8 \\ \alpha = \text{arc tg}\left(\sqrt{32}/\sqrt{32}\right) = \pi/4 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 8_{\pi/4}$$

Les arrels cúbiques de $z = 8_{\pi/4}$ tindran mòdul $r = \sqrt[3]{8} = 2$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{\pi/4}{3} = \frac{\pi}{12}, \alpha_2 = \frac{\pi/4 + 2\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}, \alpha_3 = \frac{\pi/4 + 4\pi}{3} =$$

$$= \frac{17\pi}{12} \Rightarrow z_1 = 2_{\pi/12} = 2\cos\left(\pi/12\right) + 2i\ \sin\left(\pi/12\right) =$$

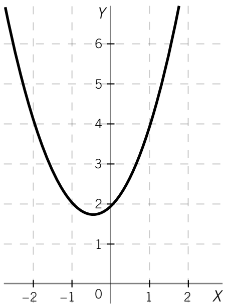
$$= 1{,}93 + 0{,}51i$$

$$z_2 = 2_{3\pi/4} = 2\cos\left(3\pi/4\right) + 2i\ \sin\left(3\pi/4\right) = -1{,}41 + 1{,}41i$$

$$z_3 = 2_{17\pi/12} = 2\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + 2i\ \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -0{,}51 - 1{,}93i$$

9. $$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2} \Rightarrow x = -0{,}5 \pm 1{,}32i$$

No hi ha punts de tall amb l'eix *X,* ja que les solucions de l'equació són complexes.



10. Escrivim el punt *P* en forma binòmica: (1, 2) = 1 + 2*i*. Els vèrtexs del quadrat són els afixos de les arrels quartes d'un altre complex *z*.

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ \alpha = \text{arc tg}(2\ /\ 1) = 70{,}48° \end{array}\right\} \Rightarrow z_0 = \sqrt{5}_{\,70{,}48°}$$

$$z = \left(\sqrt{5}_{\,70{,}48°}\right)^4 = 25_{281{,}92°}$$

Per tant, les arrels quartes de *z* tindran mòdul $r = \sqrt[4]{25} = \sqrt{5}$ i arguments:

$$\alpha_1 = \frac{281{,}92° + 0}{4} = 70{,}48°, \alpha_2 = \frac{281{,}92° + 360°}{4} = 160{,}48°,$$

$$\alpha_3 = \frac{281{,}92° + 2 \cdot 360°}{4} = 250{,}48°, \alpha_4 = \frac{281{,}92° + 3 \cdot 360°}{4} =$$

$$= 340{,}48° \Rightarrow z_1 = \sqrt{5}_{\,70{,}48°}, z_2 = \sqrt{5}_{\,160{,}48°}, z_3 = \sqrt{5}_{\,250{,}48°},$$

$$z_4 = \sqrt{5}_{\,340{,}48°}$$

$$z_1 = \sqrt{5}_{\,70{,}48°} = \sqrt{5}\left(\cos 70{,}48° + i\ \sin 70{,}48°\right) =$$

$$= 1 + 2i = (1, 2)$$

$$z_2 = \sqrt{5}_{\,160{,}48°} = \sqrt{5}\left(\cos 160{,}48° + i\ \sin 160{,}48°\right) =$$

$$= -2 + 1i = (-2, 1)$$

$$z_3 = \sqrt{5}_{\,250{,}48°} = \sqrt{5}\left(\cos 250{,}48° + i\ \sin 250{,}48°\right) =$$

$$= -1 - 2i = (-1, -2)$$

$$z_4 = \sqrt{5}_{\,340{,}48°} = \sqrt{5}\left(\cos 340{,}48° + i\ \sin 340{,}48°\right) =$$

$$= 2 - 1i = (2, -1)$$

Zona + (pàg. 163)

— Els nombres complexos i els negatius

- Resposta suggerida: Sigui $x^2 + 2bx + c^2 = 0$, les arrels són $x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$. Si $b > c$, les solucions P_1 i P_2 son reals i poden situar-se sobre la recta real formant un triangle rectangle d'hipotenusa *c* i altura *b* respecte un punt *Q.*
- Si $b < c$, no podem formar el mateix triangle partint del punt *Q,* doncs al ser $b < c$ els extrems que representen les solucions (P_1 i P_2) del triangle no tocaran la recta real (quedaran per sobre). Així, la representació de les solucions complexes P_1 i P_2 quedará per sobre de la recta real.

— Són útils els nombres complexos?

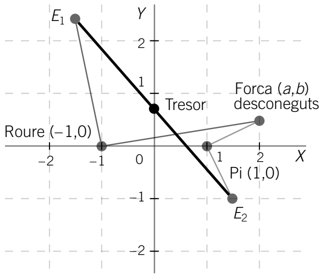
- Resposta suggerida: Per a explicar l'efecte de l'aire sobre l'ala d'un avió es pot recórrer a una transformació per treballar en un pla complex, i aquesta transformació va fer que es reduís a un efecte sobre una simple circumferència. La transformació era la següent: si tenim una circumferència, i en comptes de definir-la amb nombres reals es fa en el pla complex, $z = Re^{i\theta}$, i s'aplica a la transformació $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, en què la gràfica resultant d'aquesta transformació recorda l'ala d'un avió.

- Resposta suggerida: Aparells elèctrics com, per exemple, amplificadors i motors; estudis d'ones (física); facilitar l'estudi de càrregues: sobre bigues (arquitectura); centrals hidroelèctriques.

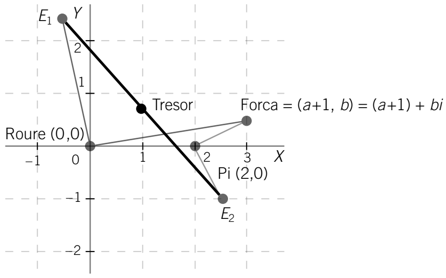
— L'illa del tresor

- El tresor està en la mediatriu del segment format pel pi i el roure, una unitat cap al nord, i per a localitzar aquest punt no cal saber on és la forca.
- Passos suggerits:

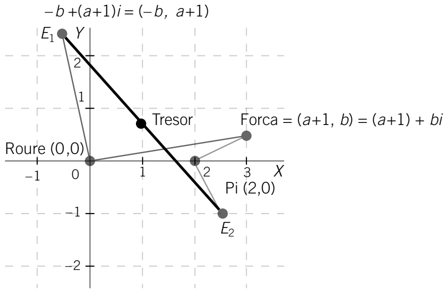
Dibuixar un eix de coordenades situant el pi i el roure en diferents punts i situant la forca en un punt desconegut. Després, indicar les instruccions del pare respecte al gràfic dibuixat.



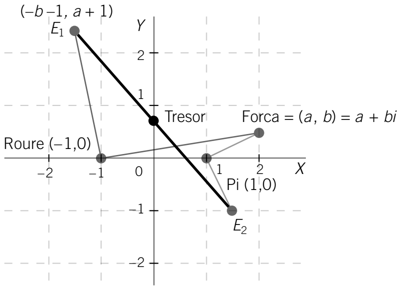
Situar l'origen de coordenades en el roure i canviar els punts de situació respecte al canvi fet.



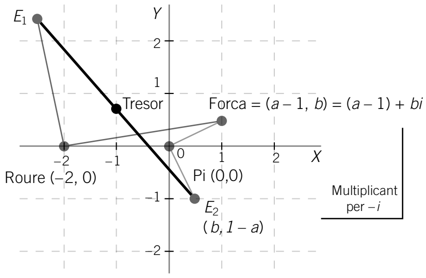
Girar el punt F (Forca) un angle de +90º i s'obté el punt E_1. Per a dur a terme aquest gir, n'hi ha prou de multiplicar per la unitat imaginària; és a dir, multiplicar per $1_{\pi/2} = i$. Amb això s'obté el següent: $[(a + 1) + bi] \cdot i = (a + 1) \cdot i - b = -b + (a + 1) \cdot i$. Per tant, les coordenades de E_1 seran $(-b, a + 1)$.



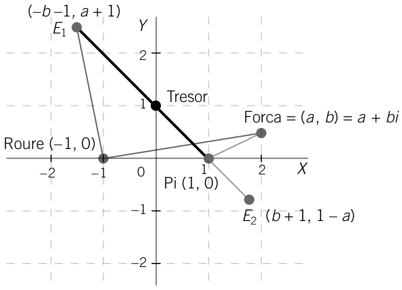
Tornar a col·locar els eixos de manera que l'origen estigui en el punt mitjà del segment format pels punts R(roure) i P(pi) i l'eix real passi pels punts R i P.



Girar H un angle de –90º col·locant l'origen de coordenades en P i multiplicar l'afix de H per $-i$.



Tornar l'origen de coordenades al punt inicial.



El pare pirata li diu al seu fill que el tresor es troba en el punt mitjà del segment E_1E_2. Les coordenades del punt mitjà d'un segment són la semisuma de les coordenades dels extrems. Per tant:

Primera coordenada = $(-b - 1 + b + 1)/2 = 0$

Segona coordenada = $(a + 1 + 1 - 1)/2 = 1$