# ELS NOMBRES COMPLEXOS EN FORMA POLAR

## *DIFERENTS FORMES D'ESCRIURE UN NOMBRE COMPLEX*

Sigui z un nombre complex

- $z = a + bi$ és la **forma binòmica** de z on $a$ i $b \in \mathbb{R}$

  $a$ s'anomena la part real del nombre

  $b$ s'anomena la part imaginària del nombre

  $i^2 = -1 \quad \leftrightarrow \quad i = \sqrt{-1}$

  ***Nota***: si $a = 0$ el nombre és imaginari pur

  si $b = 0$ el nombre és real

- $z = r_\alpha$ és la **forma polar** de z amb $r \geq 0$ i $0° \leq \alpha < 360°$

  $r$ s'anomena el mòdul del nombre

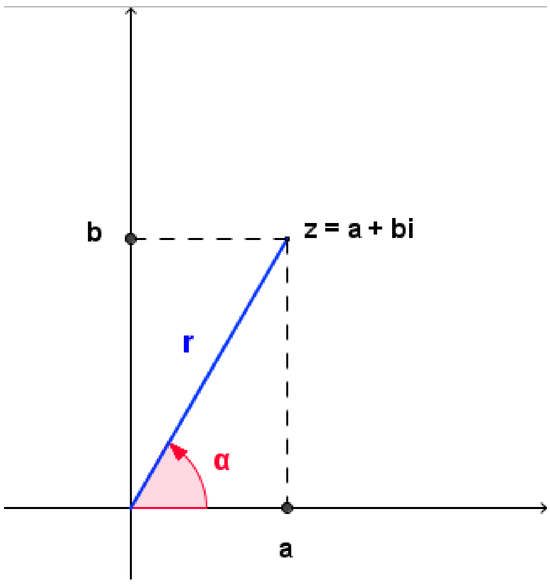
  $\alpha$ s'anomena l'argument del nombre

  Pas de forma binòmica a polar :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Representació del nombre complex:



***Nota***: No té sentit posar el nombre complex 0 en forma polar

- $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és la **forma trigonomètrica** de z

  $r$ i $\alpha$ són el mòdul i argument de z

  Pas de forma polar a binòmica :

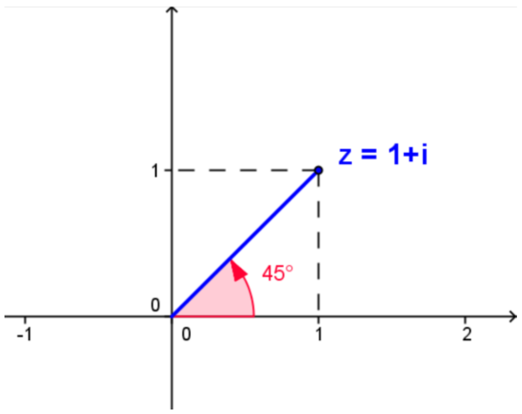
$$\boxed{\begin{array}{l} a = r\cos\alpha \\ b = r\sin\alpha \end{array}}$$

**EXEMPLES :**

- ***Troba la forma polar i la representació dels nombres complexos :***

$z_1 = 1 + i$ $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a^2 + b^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}$

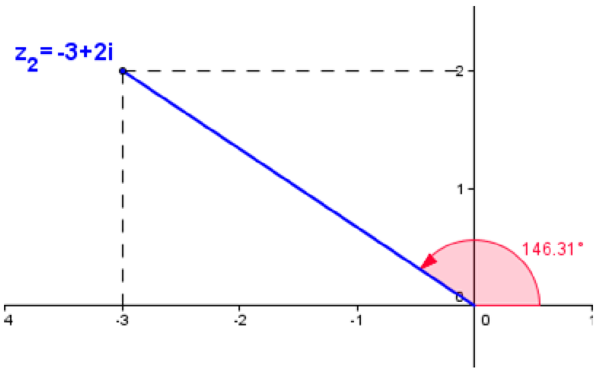
$$\alpha = arctg\left(\frac{1}{1}\right) = arctg\,1 = 45^\circ \rightarrow \alpha = 45^\circ$$




*$z_1$ està en el primer quadrant ( observa que hi ha dos angles que compleixen $tg\alpha = 1$ que són 45º i 225º)*

$z_2 = -3 + 2i$ $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 2 \end{array} \right\} \rightarrow a^2 + b^2 = 13 \rightarrow r = \sqrt{13}$

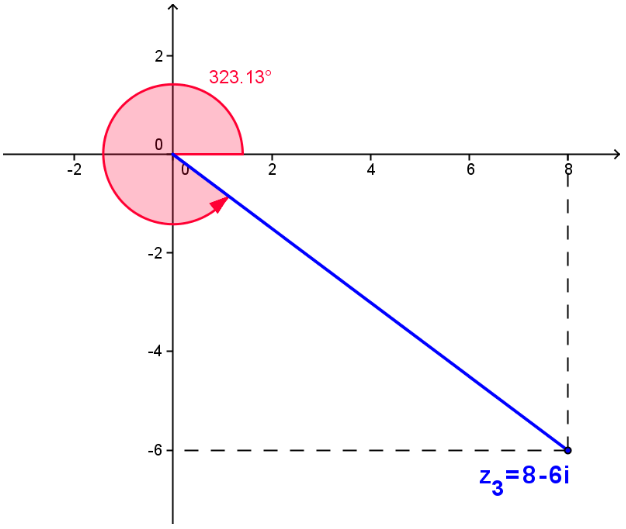
$$\alpha = arctg\left(\frac{2}{-3}\right) = arctg\,0,\widehat{6} = 146,31^\circ \rightarrow \alpha = 146,31^\circ$$




*$z_2$ està en el segon quadrant ( observa que hi ha dos angles que compleixen $tg\alpha = -\dfrac{2}{3}$ que són $146,31^o$ i $326,31^o$ )*

$z_3 = 8 - 6i \quad \rightarrow \begin{Bmatrix} a = 8 \\ b = -6 \end{Bmatrix} \rightarrow a^2 + b^2 = 100 \rightarrow r = \sqrt{100} = 10$

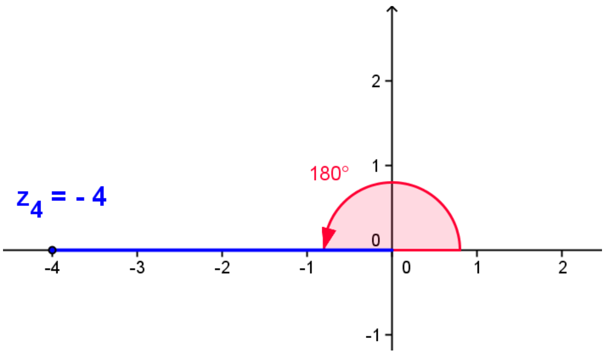
$$\alpha = arctg\left(\frac{-6}{8}\right) = arctg\left(-\frac{3}{4}\right) = 323{,}13° \rightarrow \alpha = 323{,}13°$$




*$z_3$ està en el quart quadrant ( observa que hi ha dos angles que compleixen $tg\alpha = -\frac{3}{4}$ que són $143{,}13^o$ i $323{,}13^o$ )*

$z_4 = -4 \quad \rightarrow \begin{Bmatrix} a = -4 \\ b = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow a^2 + b^2 = 16 \rightarrow r = \sqrt{16} = 4$

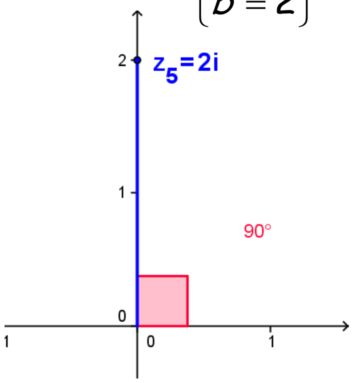
$$\alpha = arctg\left(\frac{0}{-4}\right) = arctg\, 0 = 180° \rightarrow \alpha = 180°$$




*$Z_4$ està damunt l'eix d'abscisses en la part negativa ( observa que hi ha dos angles que compleixen $tg\alpha = 0$ que són $0^o$ i $180^o$ )*

$z_5 = 2i \quad \rightarrow \begin{Bmatrix} a = 0 \\ b = 2 \end{Bmatrix} \rightarrow a^2 + b^2 = 4 \rightarrow r = \sqrt{4} = 2$

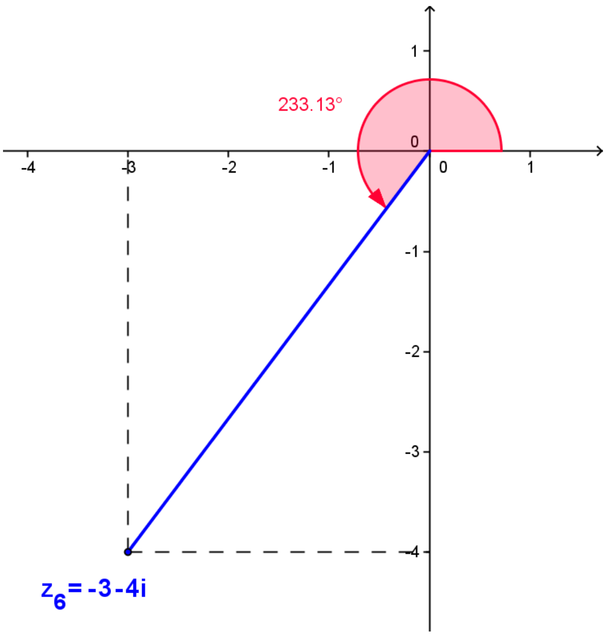
$$\alpha = arctg\left(\frac{2}{0}\right) \quad \text{però} \nexists \frac{2}{0} \rightarrow \alpha = 90°$$




*$Z_5$ està damunt l'eix d'ordenades en la part positiva ( observa que hi ha dos angles que no tenen tangent que són $90^o$ i $270^o$ )*

$\boxed{z_6 = -3-4i} \quad \rightarrow \begin{Bmatrix} a=-3 \\ b=-4 \end{Bmatrix} \rightarrow a^2+b^2 = 25 \rightarrow r=5$

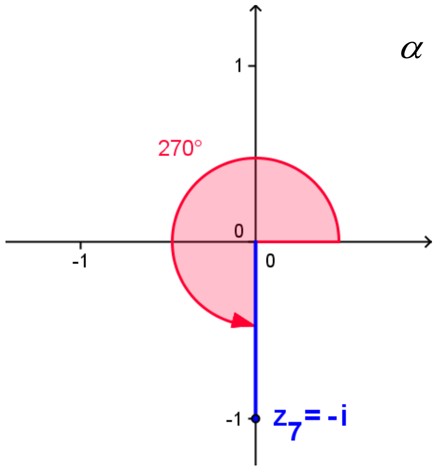
$$\alpha = arctg\left(\frac{-4}{-3}\right) = arctg\left(\frac{4}{3}\right) = 233{,}13^{\circ} \rightarrow \alpha = 233{,}13^{\circ}$$




$Z_6$ està en el tercer quadrant ( *observa que hi ha dos angles que compleixen* $tg\alpha = \frac{4}{3}$ *que són* $233{,}13^{o}$ *i* $53{,}13^{o}$ )

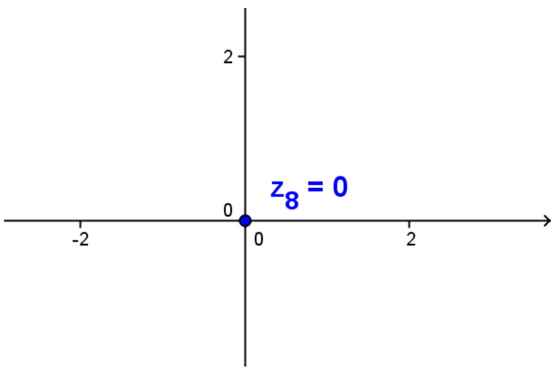
$\boxed{z_7 = -i} \quad \rightarrow \begin{Bmatrix} a=0 \\ b=-1 \end{Bmatrix} \rightarrow a^2+b^2 = 1 \rightarrow r=1$

$$\alpha = arctg\left(\frac{-1}{0}\right) \quad \text{però} \nexists \frac{-1}{0} \rightarrow \alpha = 270^{\circ}$$

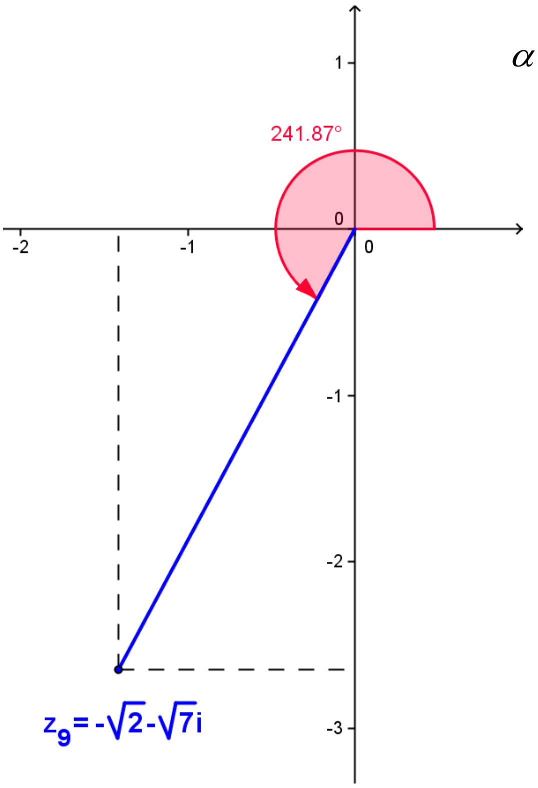



$Z_7$ està damunt l'eix d'ordenades en la part negativa ( *observa que hi ha dos angles que no tenen tangent que són* $90^{o}$ *i* $270^{o}$ )

$\boxed{z_8 = 0} \quad \rightarrow$ *No hi ha forma polar*



$z_9 = -\sqrt{2} - \sqrt{7}i \quad \rightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b = -\sqrt{7} \end{cases} \rightarrow a^2 + b^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{7}\right)^2 = 2 + 7 = 9 \rightarrow r = 3$




$$\alpha = arctg\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right) = 241{,}87° \rightarrow \alpha = 241{,}87°$$

*$Z_9$ està en el tercer quadrant ( observa que hi ha dos angles que compleixen $tg\alpha = \sqrt{\frac{7}{2}}$ que són $61{,}87^o$ i $241{,}87^o$ )*

- ***Escriu en forma binòmica els nombres***

  $z_1 = 3_{60°}$ , $z_2 = 4_{210°}$ , $z_3 = 5_{180°}$ , $z_4 = 4_{270°}$ , $z_5 = 1_{315°}$ , $z_6 = 2_{185°}$

$$z_1 = 3_{60^0} = 3\cdot(\cos 60° + i\sin 60°) = 3\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = 4_{210^0} = 4\cdot(\cos 210° + i\sin 210°) = 4\cdot(-\cos 30° - i\sin 30°) = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) =$$

$$-\frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{2}i = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_3 = 5_{180^0} = 5\cdot(\cos 180° + i\sin 180°) = 4\cdot(-1 - i\cdot 0) = -4$$

$$z_4 = 2_{270^0} = 2\cdot(\cos 270° + i\sin 270°) = 2\cdot(0 + i\cdot(-1)) = -2i$$

$z_5 = 1_{315^0} = 1\cdot(\cos 315° + i\sin 315°) = 1\cdot(\cos 45° + i\cdot(-\sin 45°)) =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$z_6 = 2_{185^0} = 2\cdot(\cos 185° + i\sin 185°) = 4\cdot(-0,996 - 0,087i) = -3,984 - 0,348i$

## OPERACIONS DELS COMPLEXOS EN FORMA POLAR

Siguin z i w dos nombres complexos que la seva expressió en forma polar és

$z = r_\alpha$ i $w = r'_\beta$ , aleshores

- $z\cdot w = r_\alpha \cdot r'_\beta = (r\cdot r')_{\alpha+\beta}$
- $z : w = r_\alpha : r'_\beta = (r : r')_{\alpha-\beta}$
- $z^n = (r_\alpha)^n = (r^n)_{\alpha\cdot n}$ $\quad on\ n \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_\alpha}$ $\quad$ *hi ha n arrels d'índex n que anomenarem* $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$
  *Totes elles tenen per mòdul* $\sqrt[n]{r}$ *i els seus arguments són*:
  $\alpha_k = \dfrac{\alpha + k\cdot 360°}{n}$ *amb* $k = 0,1,2\ldots n-1$
  *Així doncs queda que les arrels n-èsimes són*:

$$z_k = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha + k\cdot 360°}{n}} \quad amb\ k = 0,1,2\ldots n-1$$

***Nota***: si representem les arrels n-èsimes d'un nombre z veurem que estan formant un polígon regular de n costats centrat en l'origen de coordenades i de radi $\sqrt[n]{r}$

## EXEMPLES :

- ***Donats els nombres complexos $z = 2_{30^\circ}$ i $w = 5_{125^\circ}$ , efectua les operacions que s'indiquen***

$z \cdot w = 2_{30^\circ} \cdot 5_{125^\circ} = (2 \cdot 5)_{30^\circ+125^\circ} = 10_{155^\circ}$

$z : w = 2_{30^\circ} : 5_{125^\circ} = (2:5)_{30^\circ-125^\circ} = \left(\frac{2}{5}\right)_{-95^\circ} = \left(\frac{2}{5}\right)_{265^\circ}$

$z^5 = \left(2_{30^\circ}\right)^5 = \left(2^5\right)_{5\cdot 30^\circ} = 32_{150^\circ}$

$z^5 \cdot w^3 = \left(2_{30^\circ}\right)^5 \cdot \left(5_{125^\circ}\right)^3 = \left(2^5\right)_{5\cdot 30^\circ} \cdot \left(5^3\right)_{3\cdot 125^\circ} = 32_{150^\circ} \cdot 125_{375^\circ} = \left(32 \cdot 125\right)_{150^\circ+375^\circ} = 4000_{525^\circ} = 4000_{165^\circ}$

$(z \cdot w)^5 =$

$\left(2_{30^\circ} \cdot 5_{125^\circ}\right)^5 = \left((2 \cdot 5)_{30^\circ+125^\circ}\right)^5 = \left(10_{155^\circ}\right)^5 = \left(10\right)^5_{5\cdot 155^\circ} = 100000_{775^\circ} = 100000_{55^\circ}$

$\sqrt[4]{z} \rightarrow$ n'hi ha quatre que són $z_0$ , $z_1$ , $z_2$ i $z_3$ , totes elles amb el mateix mòdul que val $\sqrt[4]{2}$ i els seus arguments són $\alpha_0$ , $\alpha_1$ , $\alpha_2$ i $\alpha_3$ on

$$\alpha_0 = \frac{30^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 7{,}5^\circ$$
$$\alpha_1 = \frac{30^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 97{,}5^\circ$$
$$\alpha_2 = \frac{30^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 187{,}5^\circ$$
$$\alpha_3 = \frac{30^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 277{,}5^\circ$$

Així tenim doncs les quatre arrels quartes de z que són : $z_0 = \sqrt[4]{2}_{7{,}5^\circ}$

$z_1 = \sqrt[4]{2}_{97{,}5^\circ}$

$z_2 = \sqrt[4]{2}_{187{,}5^\circ}$

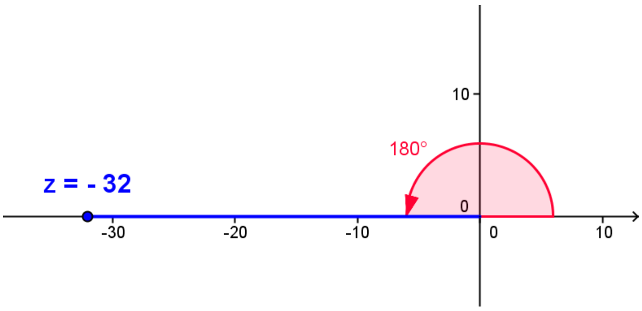
$z_3 = \sqrt[4]{2}_{277{,}5^\circ}$

- ***Troba i representa les arrels cinquenes de z = -32***

Cal trobar doncs $\sqrt[5]{-32}$. En primer lloc expressarem z en forma polar

$$z = -32 \quad \rightarrow r^2 = (-32)^2 + (0)^2 = 1024 \rightarrow r = 32$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{0}{-32}\right) = arctg\ 0 = 180° \rightarrow \alpha = 180°$$




Ara ja podem calcular les 5 arrels cinquenes de z i representar-les

$$z_0 = \sqrt[5]{32}_{\frac{180°+0\cdot360°}{5}} = 2_{36°}$$

$$z_1 = \sqrt[5]{32}_{\frac{180°+1\cdot360°}{5}} = 2_{108°}$$

$$z_2 = \sqrt[5]{32}_{\frac{180°+2\cdot360°}{5}} = 2_{180°}$$

$$z_3 = \sqrt[5]{32}_{\frac{180°+3\cdot360°}{5}} = 2_{252°}$$

$$z_4 = \sqrt[5]{32}_{\frac{180°+4\cdot360°}{5}} = 2_{324°}$$