MA6: Ampliació de Matemàtiques

Jaume Bartrolí, Humildad Escorihuela, Irene Gil, Manuel Rodríguez, Joan J. de Val, Josep Duran.

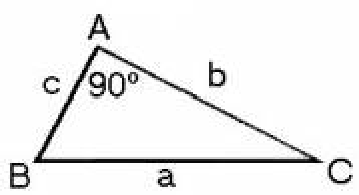
Índex

2. Geometria: espai, forma i mesura

La geometria és la branca de les matemàtiques que es dedica a l'estudi de les propietats i de les mesures de les figures en l'espai o en el pla.

2.1 La geometria dels triangles rectangles

Un triangle rectangle té un angle recte(90º), i convenim que **A = 90º**. Anomenem *hipotenusa* el costat oposat, **a**, d'aquest angle recte. Els altres dos costats, **b** i **c**, s'anomenen **catets**.



Com ja sabem, un triangle és un polígon que té tres costats. Convenim en assenyalar amb lletres majúscules **A**, **B** i **C** els angles dels vèrtexs d'un triangle i amb les mateixes lletres minúscules **a**, **b** i **c** els costats oposats corresponents a aquests angles. Si un dels angles, per exemple l'**A**, és igual a 90º el triangle s'anomena *rectangle*.

Un triangle rectangle pot ser escalé (la hipotenusa i els dos catets són tots diferents) o isòsceles (dos catets iguals).

Recordeu que si un triangle té els tres costats iguals és un triangle equilàter. És clar que quan parlem de costats iguals o desiguals ens referim a tenir la mateixa o diferent longitud. Si en té dos d'iguals i el tercer diferent, aleshores és un triangle isòsceles. Quan té els costats diferents és un triangle escalè. Per tant, un triangle rectangle pot ser escalé (la hipotenusa i els dos catets són tots diferents) o isòsceles (dos catets iguals: això només passa quan $B = C = 45^{\circ}$).

En un triangle rectangle els angles aguts sumen 90º.

!

Recordeu ara que la suma dels tres angles d'un triangle és 180º (un angle pla)

Considerem un triangle ABC. Tracem per un dels vèrtexs, per exemple l'A -on és l'angle recte-, la paral·lela al costat oposat **a=BC**. Veiem que els dos angles així formats més l'angle recte sumen un angle de 180º (angle pla).

Però com es veu a la figura, entre els dos angles formats i els dos de la base del triangle hi ha dues igualtats perquè es tracta d'angles alterns interns entre rectes paral·leles. Aleshores:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$$

Com que l'angle $\hat{A}=90°$, es dedueix que

$$\hat{B}+\hat{C}-\hat{A}=180°-90°=90°$$

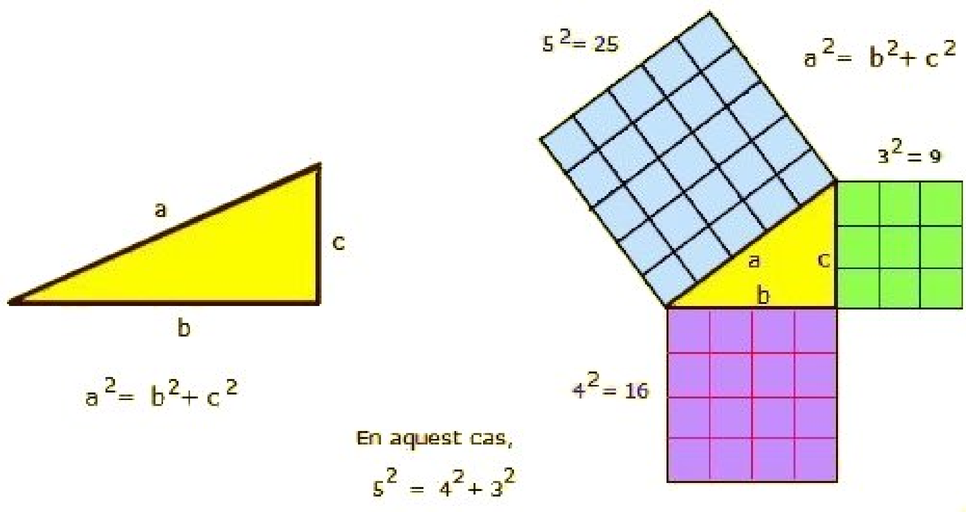
El quadrat de la longitud de la hipotenusa és la suma dels quadrats de les longituds dels catets (teorema de Pitàgores). Geomètricament, el teorema es pot interpretar dient que *L'àrea del quadrat construït sobre la hipotenusa és la suma de les àrees dels quadrats construïts sobre els catets.*

Teorema de Pitàgores

Els costats de qualsevol triangle rectangle d'hipotenusa a i catets b i c compleixen la fórmula

$$a^2=b^2+c^2$$

Aproximadament un segle després de Tales, Pitàgores va descobrir, entre altres coses, un Teorema que el va fer famós. El Teorema de Pitàgores consisteix en una regla que permet calcular un costat d'un triangle rectangle quan coneixes els altres dos (Para especial atenció a què només serveix per als triangles rectangles!). Pitàgores va anomenar així els costats del triangle rectangle: hipotenusa, el costat més gran, i catets els altres dos.



Quan s'arriba al càlcul de

$$a^2 = b^2 + c^2$$

per aïllar la a, es fa

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

També es poden plantejar:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

i

$$c^2 = a^2 - b^2$$

per calcular la longitud d'un catet quan se sap la longitud de la hipotenusa i la de l'altre catet. I fent l'arrel quadrada, tal com s'ha operat abans.

Circumcentre, incentre, ortocentre i baricentre d'un triangle rectangle.

Circumcentre és el punt on es tallen les mediatrius dels costats d'un triangle.

Mediatriu d'un costat és la recta els punts de la qual equidisten dels extrems el costat; per tant, aquesta *mediatriu* passa pel centre del costat. En un triangle rectangle, el circumcentre és el punt mitjà de la hipotenusa (**Comproveu-lo**!). És el centre de la circumferència que passa pels vèrtexs del triangle, és a dir, que és circumscrita al triangle.

Incentre és el punt on es tallen les bisectrius interiors d'un triangle.

Bisectriu és la recta que divideix un angle en dos parts iguals. Cadascun dels angles d'un triangle té una bisectriu. El punt on es tallen, incentre, és el centre de la circumferència inscrita al triangle.

Ortocentre és el punt on es tallen les altures d'un triangle.

Altura respecte a un costat és la distància entre aquest costat (o perllongació d'aquest) i el vèrtex oposat. En un triangle rectangle, l'ortocentre coincideix amb el vèrtex que té l'angle de 90º(**Comproveu-lo**!).

Baricentre és el punt on es tallen les mitjanes d'un triangle.

Mitjana és el segment que uneix cada vèrtex d'un triangle amb el punt mitjà del costat oposat.

2.2 Trigonometria

2.2.1 Definicions de les raons trigonomètriques en un triangle rectangle

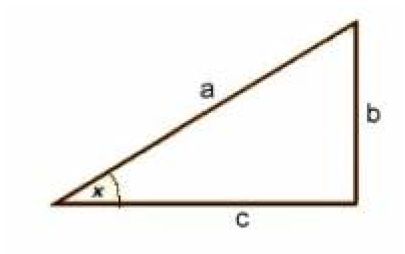
Si x és un angle agut, les seves raons trigonomètriques són els tres nombres que s'obtenen pel següent procediment:

- Es dibuixa un triangle rectangle que contingui l'anqle x.
- Es mesuren els tres costats del trianqle dibuixat.
- Es divideix cada catet per la hipotenusa, i també els dos catets entre ells (l'oposat a x, per l'adjacent a x)

Així surten tres nombres:

Els valors d'aquests quocients o raons no depenen d'haver fet el trianqle sobre x més gran o més petit, sempre que sigui rectangle; cada raó per separat té el mateix valor, independent de les mides dels costats, només depèn de l'anqle x inicialment considerat. Aquestes raons s'anomenen sinus, cosinus i tangent de l'anqle x, escrits abreujadament en la forma sin, cos i tan (o tg).

Concretament:



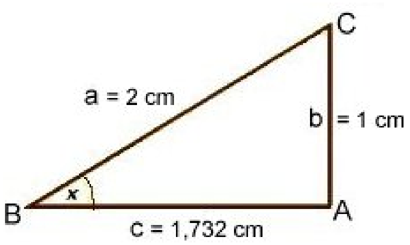
$$\sin\ x = \frac{catet\ oposat\ a\ l'angle\ x}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\ x = \frac{catet\ contigu\ o\ adjacent\ a\ l'angle\ x}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$\tan\ x = \frac{catet\ oposat\ a\ l'angle\ x}{catet\ contigu\ a\ l'angle\ x} = \frac{b}{c}$$

Exemple 1

En el triangle rectangle(A=90º) de la figura, on es donen les longituds dels costats, calculeu les raons trigonomètriques de l'angle **x**.



Observeu que les raons trigonomètriques són valors reals adimensionals -no tenen dimensió- perquè entre el numerador i el denominador se simplifica la unitat **cm**, en aquest cas.

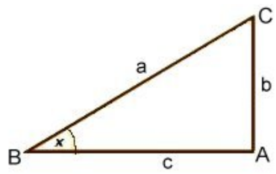
Resolució:

$\sin\ x = \frac{b}{a} = \frac{1\ cm}{2\ cm} = \frac{1}{2} = 0,5$

$\cos\ x = \frac{c}{a} = \frac{1{,}732\ cm}{2\ cm} = \frac{1{,}732}{2} = 0,866$

$\tan\ x = \frac{b}{c} = \frac{1\ cm}{1{,}732\ cm} = \frac{1}{1{,}732} = 0,577$

2.2.2 Propietats fonamentals de les raons trigonomètriques en un triangle rectangle



És un conveni anomenar els vèrtexs d'un triangle amb lletra majúscula i el costat oposat al vèrtex amb la mateixa lletra minúscula.

Per a qualsevol angle agut x és:

$$0 < \sin x < 1$$
$$0 < \cos x < 1$$

En efecte, la propietat resulta del fet que en tot triangle rectangle els catets són més petits que la hipotenusa.

Per a qualsevol angle agut x és:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

En efecte,

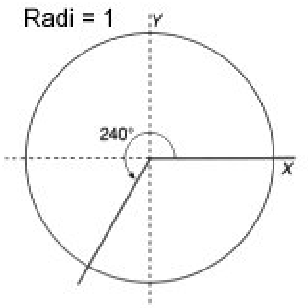
$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

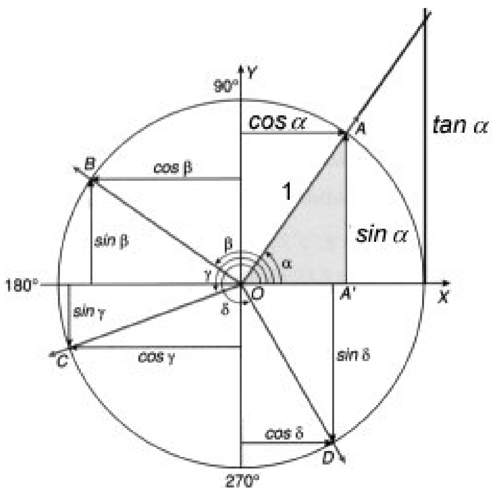
aplicant el teorema de Pitàgores en el numerador de la fracció.

Per a qualsevol angle agut x és:

$$\tan x = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ja que si dividim el numerador i denominador d'una fracció per un mateix nombre, la fracció resultant és equivalent.





Circumferència trigonomètrica o goniomètrica

Tracem una circumferència de radi 1. Prenem un sistema de coordenades amb l'origen al centre de la circumferència.

Els angles se situen sobre la circumferència de la manera següent:

- El vèrtex al centre.
- Un dels costats coincidint amb el semieix positiu de les X.
- L'altre costat se situa on correspongui, amb l'angle obert en el sentit contrari al moviment de les agulles del rellotge.

circumferència goniomètrica o **trigonomètrica**. Amb aquesta circumferència resulta molt senzill definir i visualitzar les raons trigonomètriques i les propietats fonamentals d'aquestes.

Exemple 1

A l'exemple 1 de l'apartat 2.2.1 comproveu que es compleixen les propietats fonamentals:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

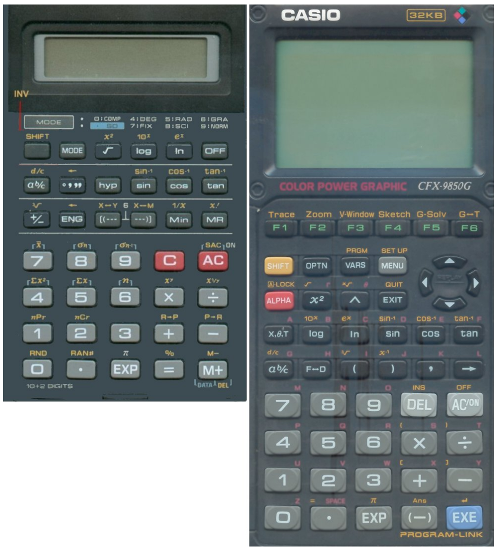
(Si no dóna exactament 1 a la primera propietat o no dóna exactament la $tan\ x$ a la segona serà perquè, possiblement, en substituir els valors del sinus i del cosinus algun d'aquests nombres és irracional -té infinites xifres decimals-, i heu fet la substitució només amb unes quantes d'aquestes xifres.)

2.2.3 Sistemes d'unitats de mesura d'angles

- Concepte matemàtic d'angle. Mesura d'angles. Algunes relacions entre parelles d'angles (imprimiu aquest fitxer PDF)

- Operacions amb angles: concepte. Càlcul i mesura d'angles quan surten decimals (imprimiu aquest fitxer PDF)

Utilitzeu la imatge de la calculadora científica per seguir les explicacions que es donen del seu ús en els enllaços anteriors, si no en disposeu de cap en el moment d'estudiar el tema. (És indispensable tenir-ne una i saber-la utilitzar.)



CALCULADORES CIENTÍFIQUES Y GRÀFIQUES

Les primeres, sobretot pel seu mòdic preu i fàcil ús, són unes eines indispensables per estudiar i calcular les raons trigonomètriques dels angles i la seva relació amb els costats dins de triangles rectangles.

Les segones, amb pantalla gràfica, permeten resoldre les qüestions de trigonometria esmentades en les científiques i també altres de més complicades , com la representació gràfica de les funcions trigonomètriques que no es troben dins dels continguts d'aquest curs.

En ambdues hi són les tecles ***sin*** , ***cos*** i ***tan*** com es pot observar. Depenent del model, les raons (també anomenades *funcions*) trigonomètriques s'introdueixen abans o després del valor de l'angle per al que s'han de cercar aquestes raons. En els últims models generalment es prem abans la raó trigonomètrica i després s'introdueix el valor de l'angle.

En introduir l'angle, però, s'ha d'anar en compte que la calculadora estigui preparada perquè li siguin introduïts angles en el sistema DEG (graus sexagesimals) o RAD (radians, SI).

Molt importants són les funcions inverses del *sin*, *cos* i *tan*.

Serveixen per obtenir el valor de l'angle quan s'introdueix el valor de la raó trigonomètrica donada. Es troben damunt les tecles de les respectives funcions.

Del *sinus* és *arcsinus*, $sin^{-1}(valor\ sinus)$

Del *cosinus* és *arccosinus*, $cos^{-1}(valor\ cosinus)$

De la *tangent* és *arctangent*, $tan^{-1}(valor\ tangent)$

!

Així,

$sin^{-1}(valor\ sinus)$

$cos^{-1}(valor\ cosinus)$

$tan^{-1}(valor\ tangent)$

Donen el valor de l'angle quan s'introdueix el valor de la raó trigonomètrica corresponent.

S'activen en prémer la tecla auxiliar de la calculadora, *INV* o *SHIFT*, prèviament a la de la funció.

Sistema sexagesimal

El sistema sexagesimal és un dels sistemes que s'empra per mesurar angles: es divideix l'angle recte en 90 parts, cada una de les quals rep el nom de grau. El grau es divideix en 60 parts, cada una de les quals s'anomena minut, i cada minut es divideix en 60 parts, cada una de les quals es diu segon:

1 recte = 90 graus = 90º

1º = 60 minuts = 60'

1' = 60 segons = 60"

En el sistema sexagesimal l'angle recte fa 90º, l'angle pla (igual a dos rectes) mesura 180º i la circumferència fa 360°.

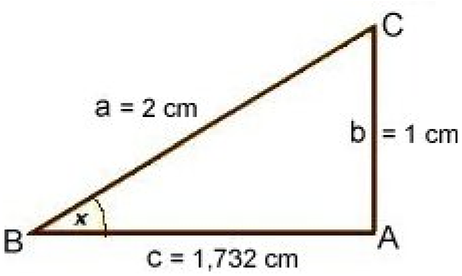
Formes complexa i incomplexa d'expressar el valor d'un angle

Donar un angle, mesurat en el sistema sexagesimal, en forma incomplexa és donar el seu valor expressat en graus(º) i amb xifres decimals si en té. Donar-lo en la forma complexa és expressar el seu valor en graus, minuts i segons(º, ', ") -els decimals, si n'hi ha, apareixeran en els segons-.

Per exemple, l'angle de 48°15’20”, en forma complexa, seria 48,255556º en forma incomplexa.

Exemple 1

En el triangle de l'exemple 1 estudiat a l'apartat 2.2.1,



i amb les raons trigonomètriques calculades, trobeu l'angle **x** utilitzant les inverses de les tres raons trigonomètriques.

Resolució:

$x = sin^{-1}(0,5) = 30^o$

$x = cos^{-1}(0,866) = 30,0029...^o \approx 30^o$

$x = tan^{-1}(0,577) = 29,9849...^o \approx 30^o$

Exemple 2

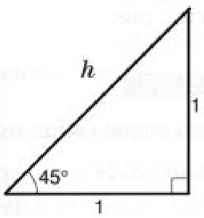
Dibuixeu un triangle rectangle isòsceles. Cada catet mesura 1. Trobeu les raons trigonomètriques de l'angle de 45º.

Dibuixeu un triangle equilàter, amb costat que mesuri 1. En traçar l'altura sobre qualsevol dels costats, s'obtenen dos triangles rectangles, amb angles aguts de 30º i 60º. Trobeu les raons trigonomètriques d'aquests dos angles.

Resolució:

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DE 30°, 45° I 60°

Raons trigonomètriques de 45°

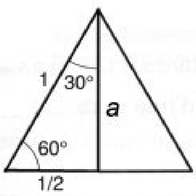


La hipotenusa d'aquest triangle rectangle isòsceles és:

$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Per tant:

$$sin\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad tg\ 45° = 1$$

Raons trigonomètriques de 30° i de 60°



Calculem l'altura d'aquest triangle equilàter:

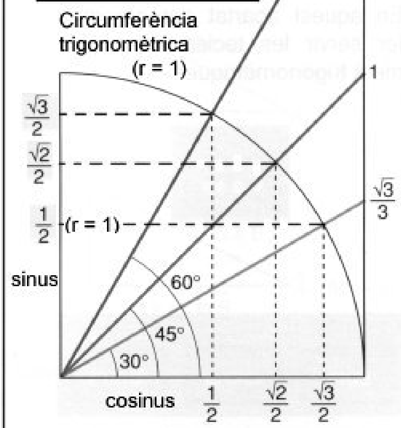
$$a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Per tant:

$$sin\ 30° = \frac{1}{2} \qquad cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\ 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{1}{2} \qquad tg\ 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Representació en la circumferència trigonomètrica de les tres raons dels angles més coneguts: 30º, 45º i 60º

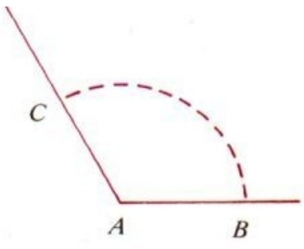


	sin	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

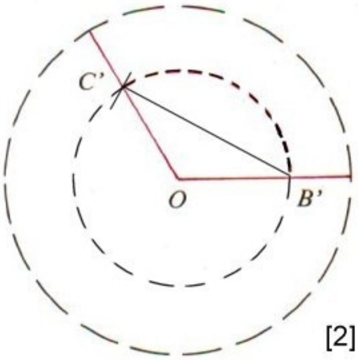
Sistema Internacional (SI)

Definirem en aquest curs una nova unitat per mesurar angles, el radian, en el Sistema Internacional i veurem com cal efectuar el canvi d'un sistema d'unitats a l'altre.

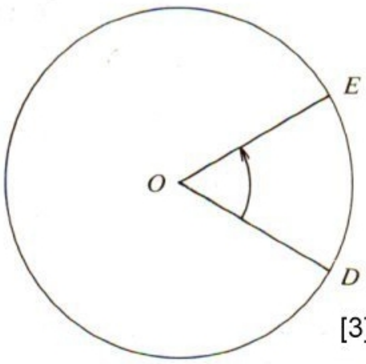
Considerem una circumferència C de radi r: hi ha una correspondència bijectiva entre els angles i els arcs de la circumferència C; amb altres paraules, a tot arc de circumferència se li pot associar un angle i, recíprocament, a tot angle se li pot associar un arc de la circumferència C. Vegem com (fig.[1]).



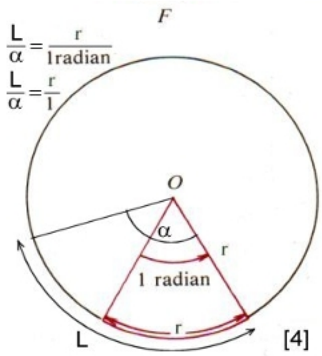
[1]



[2]



[3]



[4]

L'arc determinat pels extrems dels radis OB' i OC' sobre la circumferència és el que associem a l'angle

Recíprocament, si $\widehat{DE}$ és un arc de la circumferència F, unint D i E amb O obtindrem un angle $D\hat{O}E$ que és el que associem a l'arc (fig.[3]).

Es diu que DOE és l'angle central de l'arc DE.

Donat un angle amb vèrtex A (fig.[2]), tracem un arc de circumferència, que determinarà sobre els seus costats dos punts B i C. Tracem ara un arc de circumferència amb centre O i radi AB. Seguidament, tracem un altre arc amb centre B' i radi BC, que tallarà l'anterior en un punt C'. En el quadre ressaltem la correspondència entre angles i arcs.

Basant-nos en l'anterior correspondència, parlarem indistintament d'arcs o d'angles segons convingui. Definim ja la nova unitat de mesura:

El radian és l'angle central de l'arc de circumferència que té longitud igual al radi (s'escriu *rad*) (fig.[4]).

En una circumferència tenim la correspondència esmentada entre la longitud d'un arc qualsevol i l'angle corresponent. Ara comparem amb l'arc que mesura la longitud del radi i l'angle corresponent que mesura 1 radian (fig.[4]).

Aïllem L. Obtenim la fórmula fonamental que relaciona la longitud d'un arc amb la mesura de l'angle corresponent mesurat en radians:

$$\frac{arc}{angle(radian)} = constant \Rightarrow \frac{L}{\alpha(radian)} = \frac{r}{1} \Rightarrow L = r \cdot \alpha$$

Fórmula que relaciona la longitud de l'arc, corresponent a un angle, amb aquest angle i amb el radi de la circumferència

Donat el radi de la circumferència **r** i l'angle , expressat en radians, la longitud de l'arc **L** corresponent a aquest angle es calcula amb la fórmula deduïda de l'anterior raonament del radian (fig. [4]):

$$L = r \cdot \alpha$$

Factors de conversió

Què són els factors de conversió?

[Factors de converió]

Què vol dir que el radian no té dimensió?

Si en la fórmula que relaciona la longitud de l'arc, l'angle i el radi, aïllem l'angle

$$\alpha = \frac{L}{r}\left(\frac{m}{m}\right)$$

i posem quines són les dimensions en el S.I. de la longitud de l'arc(m) i del radi(m), dóna una fracció que val 1(adimensional, sense dimensions).

Quant mesura l'angle central d'una circumferència, és a dir, 360º?

Fem

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Aleshores,

$$2 \cdot \pi \cdot r = r \cdot \alpha$$

En simplificar el radi, queda

$$2 \cdot \pi = \alpha$$

O, canviant de lloc els membres,

$$\alpha = 2 \cdot \pi$$

Ara bé, com l'angle que estem tractant

$$\alpha$$

correspon a 360º, expressem

$$360^{\text{o}} = 2 \cdot \pi$$

Canviem els membres de la igualtat i simplifiquem, dividint per 2 els dos membres:

$$2 \cdot \pi = 360^{\text{o}}$$

$$\pi = 180^{\text{o}}$$

Les dues igualtats ens donen una equivalència entre els dos sistemes d'unitats per a la mesura d'angles.

Per expressar **1 radian** en **graus**, **minuts** i **segons**, podem utilitzar qualsevol de les igualtats. Amb la segona, per exemple, establim:

Si

$$\pi \; rad \rightarrow 180^{\text{o}}$$

aleshores

$$1 \; rad \rightarrow x^{\text{o}}$$

Així,

$$x^{\text{o}} = \frac{180^{\text{o}} \cdot 1 \; rad}{\pi \; rad}$$

En simplificar els radians,

$$x^{\text{o}} = \frac{180^{\text{o}}}{\pi} = 57^{\text{o}}17'44,81''(57^{\text{o}}17'45'')$$

Observeu que durant el càlcul anterior ha resultat la fracció

$$\frac{180^{\circ}}{\pi}$$

Direm, com veurem més endavant, que aquesta fracció és el factor de conversió que emprarem per passar de radians a graus sexagesimals.

Abans d'entrar en el canvi d'unitats angulars, farem un exemple d'aplicació de la fórmula que és conseqüència directa de la definició de radian $L = r \cdot \alpha$

Exemple 3

Calculeu la longitud de l'arc que té un angle central de $\frac{\pi}{2}$ rad en una circumferència d'1 dm de radi.

Resolució:

Passarem 1 dm = 10 cm per poder treballar amb un regle i compàs més còmodament, ja que és aconsellable comprovar el càlcul i el resultat amb un dibuix semblant al de la figura [4].

$$\text{Ŀ} = 10\ cm \cdot \frac{\pi}{2} rad = 5\ cm \cdot \pi = 15,7\ cm$$

Fixeu-vos que el radian no té dimensió (nota !! al marge), per la qual cosa no apareix en el resultat final, que dóna centímetres.

Abordem ara el problema del canvi d'unitats: com es pot passar de radians al sistema sexagesimal i viceversa?

Utilitzarem els factors de conversió següents:

- Per passar el valor d'un angle expressat en radians a graus, multiplicarem el valor per

$$\frac{180^{\circ}}{\pi}$$

- Per passar el valor d'un angle expressat en graus a radians, multiplicarem el valor per

$$\frac{\pi}{180^{\circ}}$$

Exemple 4

Expresseu en radians l'angle de 135º.

Resolució:

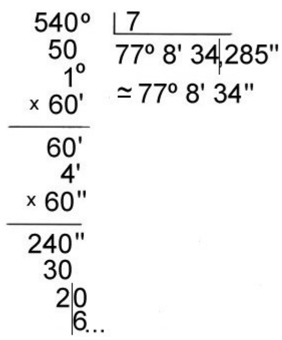
$$135^{o} = 135^{o} \cdot \frac{\pi}{180^{o}} = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{\frac{135}{45} \cdot \pi}{\frac{180}{45}} = \frac{3\pi}{4}\ rad$$

Hem dividit el numerador i el denominador de la penúltima fracció pel m.c.d.(135,180)=45 per obtenir la fracció simplificada.

> Deixem el factor π sense operar perquè, convencionalment, quan es dóna el valor d'un angle amb aquest factor multiplicant en el numerador és clar que està expressat en radians.

Exemple 5

Expresseu en el sistema sexagesimal un angle de $\frac{3\pi}{7}$ rad.



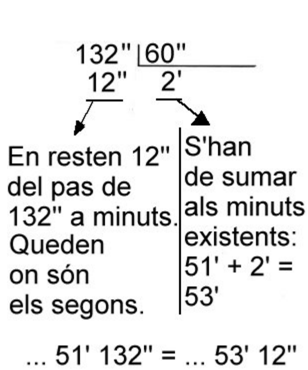
Resolució:

$$\frac{3\pi}{7}\ rad = \frac{3\pi}{7} \cdot \frac{180^{o}}{\pi} = \frac{540^{o}}{7} = 77^{o}8'34''$$

Amb la calculadora científica podeu fer aquests càlculs fàcilment.

Exemple 6

Expresseu en el sistema sexagesimal un angle de 3 rad.



Resolució:

Com que

$$1\ rad = \frac{180^{\text{O}}}{\pi} = 57^{\text{o}}17'45''$$

$$3\ rad = 3 \cdot (57^{\text{o}}17'45'') = 171^{\text{o}}51'132'' = 171^{\text{o}}53'12''$$

En l'expressió complexa d'un angle en el sistema sexagesimal, els minuts i segons no han de superar les 60 unitats. Si això passa, la unitat considerada s'ha de convertir a la de magnitud superior dividint per 60. Si hi ha un residu, queda en el lloc de la unitat considerada i el quocient resultant(magnitud superior) s'afegeix al terme de la magnitud superior en l'expressió complexe.

2.3 Vectors en el pla

Prenent com a sistema de referència en el pla dos eixos perpendiculars amb una unitat donada, el vector $\overrightarrow{v}$ es pot representar mitjançant una fletxa i un parell de punts anomenats origen(d'on surt la fletxa) i extrem(on acaba la fletxa), respectivament, del vector.

Si designem per a i b, respectivament, les diferències

$$a = x_2\text{-x}_1$$

$$b = y_2\text{-y}_1$$

entre les coordenades de l'extrem i les de l'origen del vector (fig. [1]), podem donar la definició:

Un vector del pla és un parell ordenat (**a**, **b**) de nombres reals, on **a** i **b** són el primer i el segon components, respectivament, obtinguts amb

$$a = x_2\text{-x}_1$$

$$b = y_2\text{-y}_1$$

(fig. [1])

on (x_1,y_1) i (x_2,y_2) són l'origen i l'extrem donats.

Si considerem el seu origen i el seu extrem, aleshores parlarem del **representant fix** de $\overrightarrow{v}$ que té aquest origen i aquest extrem.

El vector representat a la figura [2] té

- per origen el punt (2, 2)
- per extrem el punt (5, 4)
- per components el parell (3, 2)
- per tant, és un representant fix de $\overrightarrow{v}$=(3, 2)

VECTORS FIXOS EQUIPOL·LENTS

Sempre que no es digui el contrari agafarem com a representant d'un vector la fletxa que té per origen el punt(0, 0).

Observeu que es poden dibuixar infinites fletxes diferents, amb origens diferents, per representar un mateix vector. *Totes aquestes fletxes es diuen vectors fixos equipol·lents.* Cadascun d'aquests vectors és un representant fix d'un mateix vector que tot seguit, en l'explicació que segueix a les figures, anomenarem ***vector lliure*** .

Si per representar un vector

escollim el **representant** amb origen en el punt (0, 0), aleshores les coordenades de l'extrem coincideixen amb els components de :

$$a = a_1$$

$$b = b_1$$

Fixeu-vos també en la figura [4], on

$$a = a_1 = 3$$

$$b = b_1 = 2$$

Vectors del pla (Vectors lliures del pla)

Tal com s'ha dit al començament, un vector del pla és un parell ordenat (**a**, **b**) de nombres reals on **a** i **b** són el primer i el segon components, respectivament, del vector.

$$\vec{v}$$

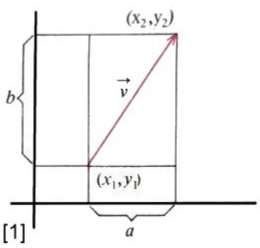
(figs. [1] i [4])

Aquests components són els que s'obtenen en fer les diferències

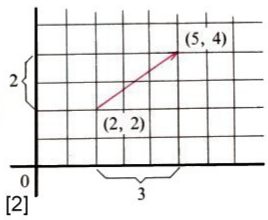
$$a = x_2 - x_1$$

$$b = y_2 - y_1$$

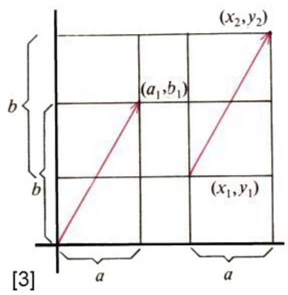
entre les coordenades de l'extrem i de l'origen de cadascun dels vectors representants fixos.



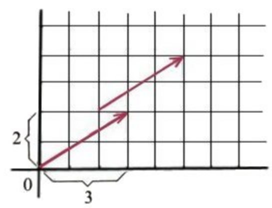
[1]



[2]



[3]



[4]

2.3.1 Mòdul, direcció i sentit d'un vector

Mòdul

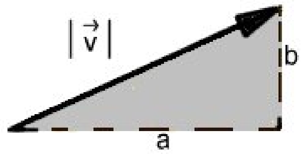
A la longitud del vector

$$\overrightarrow{v}$$

li direm mòdul de $\overrightarrow{v}$ i el designarem per $|\overrightarrow{v}|$.

En general, si $\overrightarrow{v}$ = (a, b) és

$$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{a^2+b^2}$$



Exemple 1

Trobeu el mòdul del vector $\overrightarrow{v}$ = (3, 4)

Resolució:

Un vector es diu **unitari** si el seu mòdul és igual a 1.

Pel teorema de Pitàgores és fàcil de trobar el mòdul de $\vec{v}$.

$$|\overrightarrow{v}|$$

$$=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

Exemple 2

El vector $\overrightarrow{v}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, és unitari?

Resolució:

Sí que és unitari perquè el seu mòdul és igual a 1. Calculem-lo:

$$|\overrightarrow{v}|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}}=1$$

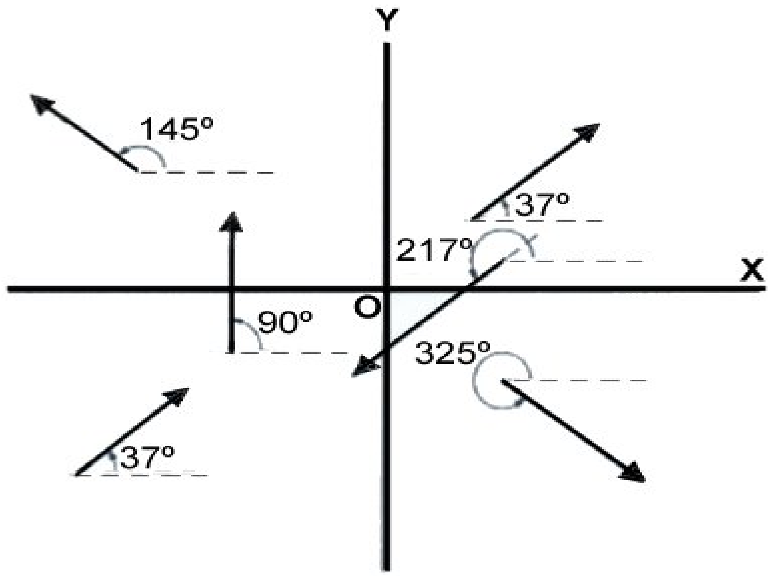
Direcció i sentit

* Si el vector $\overrightarrow{v}$ = (a, b) forma un angle x, positiu, amb la semirecta +OX, quan es calcula

$$\tan x = \frac{b}{a}$$

s'obté la *direcció* del vector.

* Els signes dels components del vector determinen el seu *sentit*.



L'angle que aquests vectors formen amb la semirecta +0X és el que formen amb la semirecta paral·lela a+0X, traçada per l'origen de cada vector.

El coneixement d'aquest angle ens permet decidir quan dos vectors tenen la mateixa direcció i quan no; i entre els que tenen la mateixa direcció, quins tenen el mateix sentit.

A la figura anterior tenim exemples de com comparar les direccions i sentits d'alguns vectors

1. Tots els vectors que formen un angle de 37º amb +OX tenen igual direcció i igual sentit.

2. Els vectors que formen amb +0X angles de 37° i 217° tenen igual direcció i sentit oposat (és 217° = 37°+180°). Aixi mateix, els vectors que formen amb +OX angles de 145° i 325° tenen la mateixa direcció i sentit oposat.

3. Els vectors que formen angles de 37° i 90° tenen diferent direcció.

2.3.2 Suma de vectors

Donats dos vectors del pla mitjançant els seus components

$$\overrightarrow{v} = (a, b)$$

$$\overrightarrow{w} = (c, d)$$

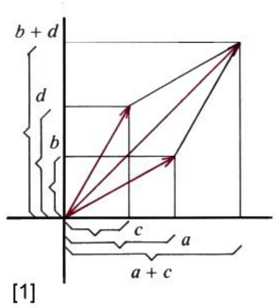
definim com a **vector suma**

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

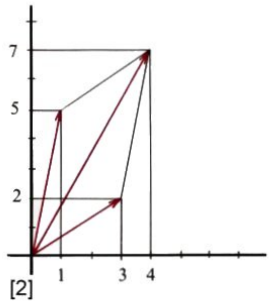
el vector que té per components la suma dels components dels vectors donats

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (a + c, b + d)$$

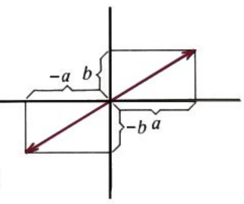
(fig. [1])



[1]



[2]



[3]

La suma de vectors satisfà les següents propietats:

- Associativa:

$$(\overrightarrow{t} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{t} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$$

- Commutativa:

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$$

- L'element neutre de la suma de vectors és el vector nul.

$$\overrightarrow{0} = (0, 0)$$

- El vector oposat: Per a cada vector $\overrightarrow{v} = (a, b)$ existeix un oposat, $\overrightarrow{-v} = (-a, -b)$, és a dir, un vector que sumat amb el primer dóna com a resultat l'element neutre (fig. [3]). Evidentment $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{-v}$ tenen igual mòdul, igual direcció i sentits oposats.

Gràficament és fàcil veure que el vector suma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ coincideix en mòdul, direcció i sentit amb el vector traçat sobre la diagonal del paral·lelogram, construït a partir dels dos vectors sumands (Regla del paral·lelogram, fig. [1]).

(A cada propietat es poden plantejar i resoldre exercicis per verificar-les, tal com ho hem fet en els exemples següents.)

Exemple 1

Sumeu els vectors $\overrightarrow{v} = (3,2)$ i $\overrightarrow{w} = (1,5)$

Resolució:

Si volem sumar els vectors $\overrightarrow{v} = (3,2)$ i $\overrightarrow{w} = (1,5)$, aleshores tenim que:

$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (3+1, 2+5) = (4,7)$(fig. [2])

Exemple 2

Trobeu el vector oposat a $\overrightarrow{v} = (3,2)$

Resolució:

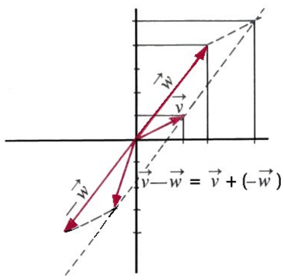
Per a $\overrightarrow{v} = (3,2)$ és $\overrightarrow{-v}$ = (-3,-2)ja que (3, 2)+ (—3,—2) = (0,0) (fig. [3])

Exemple 3

Si $\overrightarrow{v} = (2,1)$ i $\overrightarrow{w} = (3,4)$, trobeu el vector diferència $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$

Resolució:

Si volem calcular la diferència dels vectors $\overrightarrow{v}$ = (2,1) i $\overrightarrow{w}$ = (3,4
aleshores tenim que:



$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (2-3, 1-4) = (-1, -3)$

Gràficament, el vector diferència coincideix en mòdul, direcció i sentit amb el vector construït a partir dels dos vectors sumands

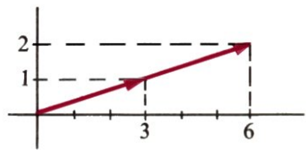
$$\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{-w})$$

que es forma sobre la diagonal menor del paral·lelogram (Regla del paral·lelogram).

2.3.3 Producte d'un vector per un nombre

Per a tot nombre real **m** i tot vector $\overrightarrow{v} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ definim el producte **m**· $\overrightarrow{v}$ com el vector que té com a 1r i 2n components els resultats de multiplicar els de $\overrightarrow{v}$, 1r i 2n components respectivament, per **m**:

$\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{v} = (\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}, \mathbf{m}\cdot\mathbf{b})$



Això equival a la suma de **m** vectors iguals a $\overrightarrow{v}$.

(El símbol · es fa servir per a aquesta operació, el producte d'un nombre per un vector que estem estudiant, per distingir-lo del producte entre dos nombres reals).

El producte d'un vector per un nombre real se'l coneix també com a **producte d'un vector per un escalar**.

Exemple 1

Si $\overrightarrow{v} = (3, 1)$, calculeu: 2· $\overrightarrow{v}$

Resolució:

Si $\overrightarrow{v} = (3, 1)$, el producte de $\overrightarrow{v}$ per 2 serà:

2· $\overrightarrow{v}$ = 2·(3,1) = (2·3,2·1) = (6,2)

2.4 Geometria amb coordenades

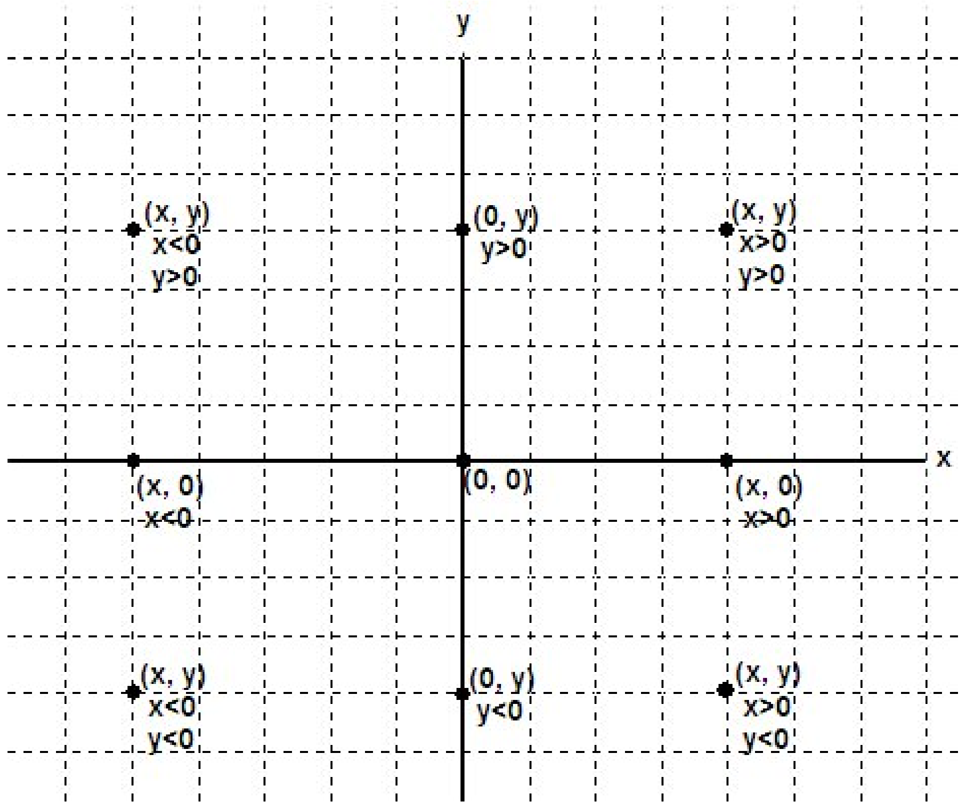
En un pla tracem dues rectes perpendiculars (eixos) —que, per conveni, es tracen de manera que una d'elles sigui horitzontal i l'altra vertical—, i cada punt del pla queda unívocament determinat per les distàncies d'aquest punt a cadascun dels eixos, sempre que es doni també un *criteri per determinar sobre quin semiplà determinat per cadascuna de les rectes cal prendre aquesta distància, criteri que ve donat per un signe i que expliquem a continuació* en el quadre ressaltat següent: Aquest parell de nombres, les coordenades, quedarà representat per un parell ordenat (**x**,**y**), sent **x** la distància a un dels eixos (per conveni serà la distància a l'eix vertical) i **y** la distància a l'altre eix (a l'horitzontal). El conjunt 'aquests parells ordenats (**x**,**y**) s'anomena *pla de coordenades* o, si ens referim als eixos horitzontal i vertical amb què posicionem els punts, *eixos de coordenades* o també *eixos cartesians*.

!

En la coordenada **x**, el signe positiu (que sol ometre's) significa que la distància es pren cap a la dreta de l'eix horitzontal (eix de les abscisses), i el signe negatiu (mai s'omet) indica que la distància es pren cap a l'esquerra. Per a la coordenada **y**, el signe positiu (també se sol ometre) indica que la distància es pren cap amunt de l'eix vertical (eix d'ordenades), prenent-se cap avall si el signe és negatiu (tampoc s'omet mai en aquest cas). A la coordenada **x** se l'anomena *abscissa* del punt, mentre que a la **y** se l'anomena *ordenada* del punt.

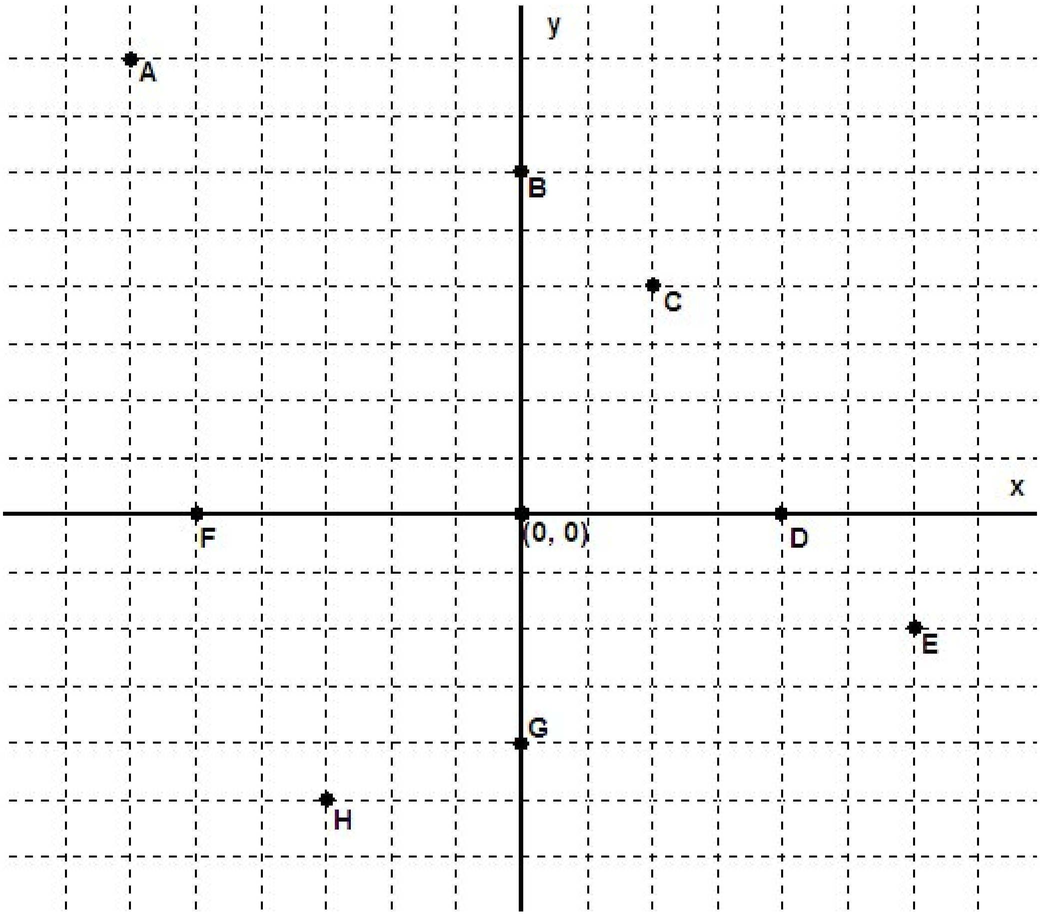
Els punts de l'eix d'abscisses tenen, per tant, ordenada igual a **0**, així que seran de la forma (**x**,**0**); d'altra banda, els de l'eix d'ordenades tindran abscissa igual a **0**, per tant, seran de la forma (**0**,**y**).

El punt on ambdós eixos es creuen tindrà per tant distancia **0** a cadascun dels eixos, ja que la seva abscissa serà **0** i la seva ordenada també serà **0**. A aquest punt —el (**0**,**0**)— se'l denomina *origen de coordenades*.



Exemple 1

Poseu raonadament les coordenades dels punts **A**, **B**, **C**,..., **H** situats en el pla de coordenades següent:



Resolució:

a) A(-6, 8): Des de l'origen de coordenades (0, 0) ens desplacem horitzontalment sobre l'eix X, cap a l'esquerra, és a dir, en la zona de valors negatius, fins arribar a la línia vertical on és el punt A: som al **- 6**, és a dir, a l'abscissa **-6**.

Igualment, des de l'origen de coordenades ens desplacem verticalment cap amunt sobre 'eix Y, en la zona positiva, fins arribar a la línia horitzontal on és el punt A: som al **+8**, és a dir, a l'ordenada **8**.

b) B(0, 6): Des de l'origen de coordenades ens desplacem verticalment cap amunt sobre l'eix Y, en la zona de valors positius, fins arribar a la línia horitzontal on és el punt B: som al **+6**, és a dir, a l'ordenada **6**. Com el punt B és sobre l'eix Y, no es possible desplaçar-se ni cap a la dreta ni cap a l'esquerra sobre l'eix X; per tant, l'abscissa val x=0.

Amb raonaments semblants situarem les coordenades de la resta de punts, com es veu en el següent pla de coordenades: