



TRIGONOMETRIA

1. NIVELL1

2. NIVELL2

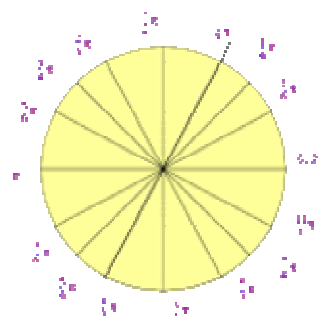
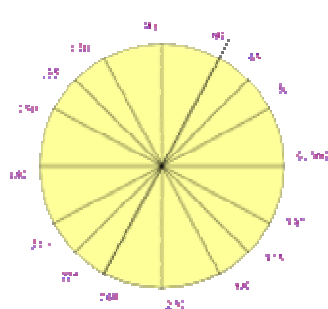
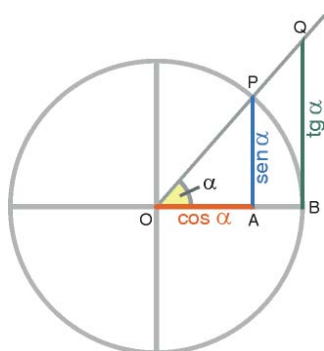
3. EQUACIONS I IDENTITATS TRIGONOMÈTRIQUES

4. SISTEMES TRIGONOMÈTRICS

NIVELL1

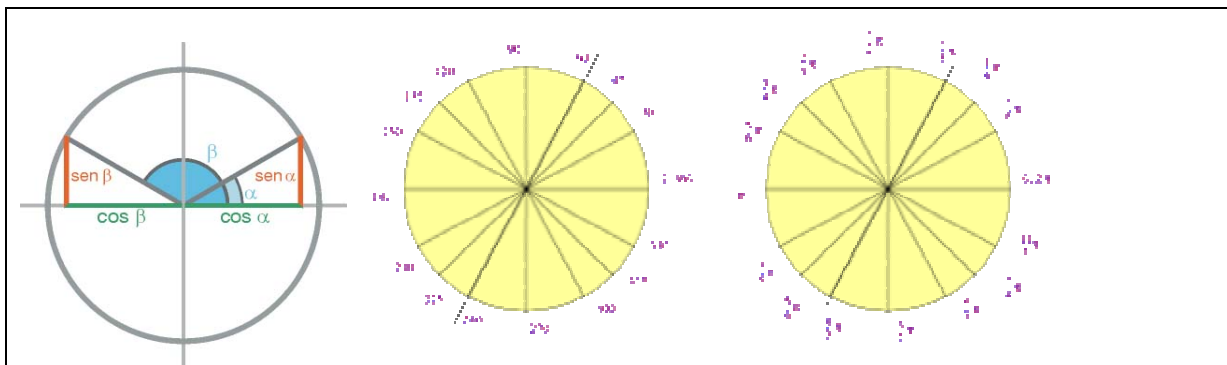
RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'ANGLES CONEGUTS

PRIMER QUADRANT



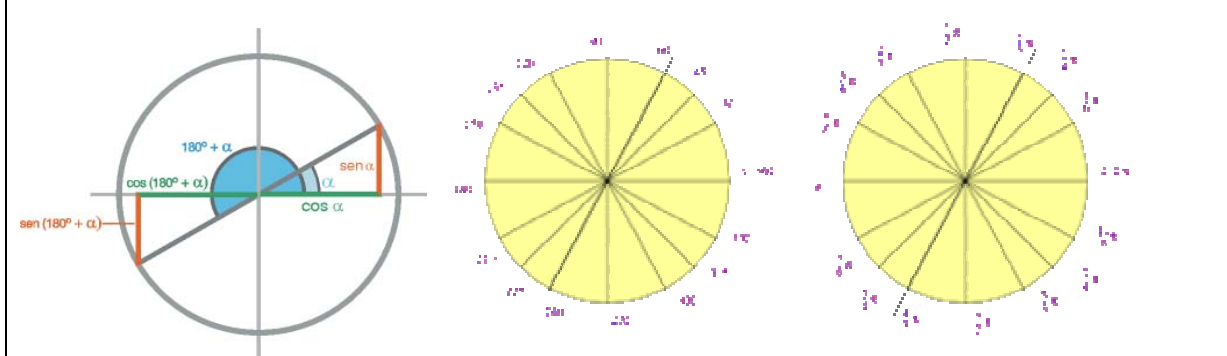
<i>graus</i>	<i>radians</i>	<i>sinus</i>	<i>cosinus</i>	<i>tangent</i>
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm \infty$

SEGON QUADRANT



<i>graus</i>	<i>radians</i>	<i>sinus</i>	<i>cosinus</i>	<i>tangent</i>
$180^\circ-0^\circ$ 180°	π	0	-1	0
$180^\circ-30^\circ$ 150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$180^\circ-45^\circ$ 135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$180^\circ-60^\circ$ 120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$180^\circ-90^\circ$ 90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm \infty$

TERCER QUADRANT

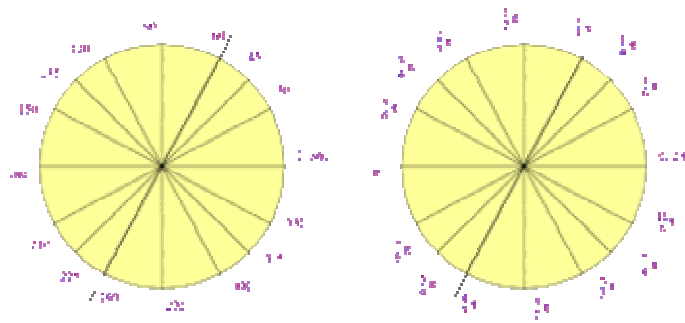
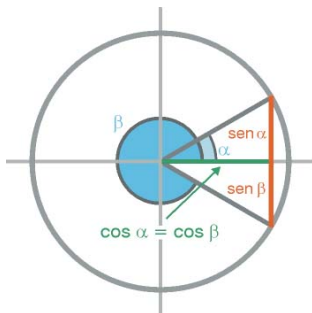


$180^\circ+0^\circ$ 180°	π	0	-1	0
$180^\circ+30^\circ$ 210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$180^\circ+45^\circ$ 225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1



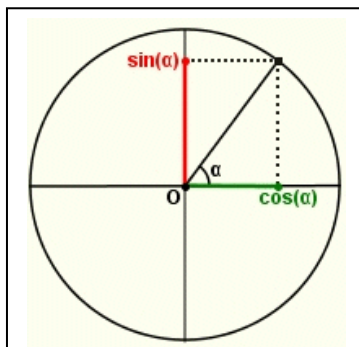
$180^\circ + 60^\circ$ 240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$180^\circ + 90^\circ$ 270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm \infty$

QUART QUADRANT



<i>graus</i>	<i>radians</i>	<i>sinus</i>	<i>cosinus</i>	<i>tangent</i>
$360^\circ - 0^\circ$ 360°	2π	0	1	0
$360^\circ - 30^\circ$ 330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$360^\circ - 45^\circ$ 315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$360^\circ - 60^\circ$ 300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$360^\circ - 90^\circ$ 270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm \infty$

RELACIONS ENTRE COSTATS I ANGLES

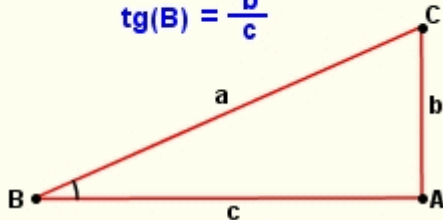




$$\sin(B) = \frac{b}{a}$$

$$\cos(B) = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg}(B) = \frac{b}{c}$$



IDENTITATS PITAGÒRIQUES

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \operatorname{cot}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

TRIPLE RELACIÓ

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cot} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

RELACIÓ ENTRE ANGLES DE DIFERENTS QUADRANTS

A) SIMETRIA RESPECTE A LA BISECTRIU DEL 1r QUADRANT

$$\sin y = \cos x \quad \cos y = \sin x \quad \operatorname{tg} y = \operatorname{cot} x$$

cas particular: angles complementaris

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cot} x$$

B) SIMETRIA RESPECTE A L'EIX VERTICAL

$$\sin y = \sin x$$

$$\cos y = -\cos x$$

$$\operatorname{tg} y = -\operatorname{tg} x$$

cas particular: angles suplementaris

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cot} x$$

C) SIMETRIA RESPECTE AL CENTRE DE LA CIRCUMFERÈNCIA

$$\sin y = -\sin x \quad \cos y = -\cos x \quad \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x$$

cas particular: angles que es diferencien en 180°



$$\sin(\pi + x) = -\sin x \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg}x$$

D) SIMETRIA RESPECTE A L'EIX HORIZONTAL

$$\sin y = -\sin x \quad \cos y = \cos x \quad \operatorname{tgy} = -\operatorname{tg}x$$

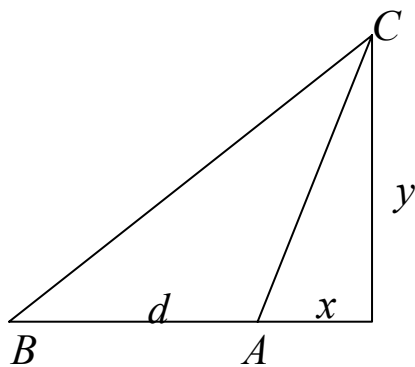
cas particular: angles oposats

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x$$

MESURA DE DISTÀNCIES

APLICACIONS

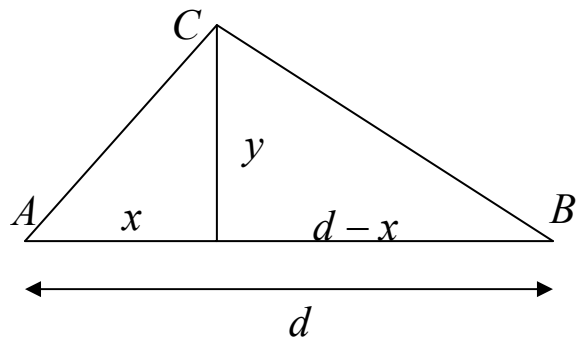
primer cas: Dues mesures des d'un mateix costat.



$$\begin{cases} \operatorname{tg}A = \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg}B = \frac{y}{d+x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d \cdot \operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B} \\ y = \frac{d \cdot \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B} \end{cases}$$

APLICACIONS

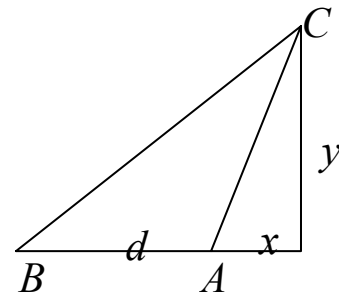
segon cas: Dues mesures alineades de diferents costats



$$\begin{cases} \operatorname{tg}A = \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg}B = \frac{y}{d-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d \cdot \operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B} \\ y = \frac{d \cdot \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B} \end{cases}$$

**EXEMPLE**

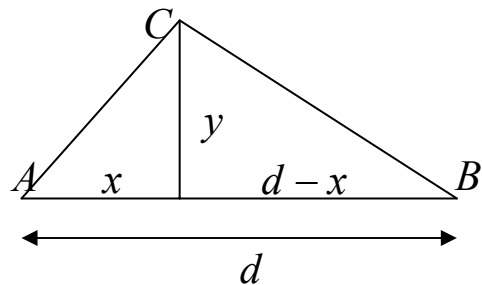
Calculeu la altura d'una torre si primer la veiem sota un angle A de 60° i si ens retirem 20m. en direcció contrària la veiem sota un angle B de 30° .

RAONAMENT

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tg } 60^\circ = \frac{y}{x} \\ \text{tg } 30^\circ = \frac{y}{20+x} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{20 \cdot \text{tg } 30^\circ}{\text{tg } 60^\circ - \text{tg } 30^\circ} = \frac{20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} = 10 \quad m \\ y = \frac{20 \cdot \text{tg } 30^\circ \cdot \text{tg } 60^\circ}{\text{tg } 60^\circ - \text{tg } 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 10\sqrt{3} \quad m \end{array} \right.$$

**EXEMPLE**

Calculeu la altura y d'una torre com indica la figura, si primer la veiem sota un angle de 60° des d'un punt A i sota un angle de 30° des d'un punt B . La distància entre els punts d'observació és de 100m .

**RAONAMENT**

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{y}{100-x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{100 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{100 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{100}{1 + \sqrt{3}} \text{ m} \\ y = \frac{100 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{100}{\sqrt{3} + 1} = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \text{ m} \end{array} \right.$$

EXERCICIS

1.1

Contesta: a) Existeix un angle " x " tal que $\sin x = 1/2$ i $\cos x = 1/4$? b) Pot valer $\sin x = 1/5$?

Sol: no si

1.2

Calcula la resta de raons trigonomètriques de l'angle α , sense utilitzar la calculadora, en els següents casos: a) $\sin \alpha = 1/4$ i α pertany al primer quadrant. b) $\sin \alpha = -1/3$ i α pertany al tercer quadrant.

Sol:



$$a) \cos \alpha = \sqrt{15}/4 \quad \text{tg } \alpha = 1/\sqrt{15} \qquad b) \cos \alpha = -2\sqrt{2}/3 \qquad \text{tg } \alpha = \sqrt{2}/4$$

1.3

Dibuixeu un angle en que el seu sinus sigui doble del seu cosinus.

1.4

Si x pertany al primer quadrant, i sense utilitzar la calculadora, calculeu les raons que falten en els casos següents:

a) $\sin x = \sqrt{3}/2$	b) $\cos x = 0,8$	c) $\text{tg } x = 2$
--------------------------	-------------------	-----------------------

RAONAMENT

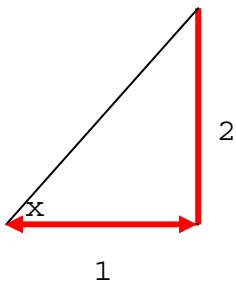
$$c) \text{tg } x = 2$$

a) MÈTODE PRIMER

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sin x = \cos x \cdot \text{tg } x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{si } x \in \text{primer quadrant} \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

b) MÈTODE SEGON



$$\text{hipotenusa} = \sqrt{5} \qquad \sin x > 0 \qquad \cos x > 0 \rightarrow$$



$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Sol:

a)

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

b)

$$\sin x = 0,6$$

$$\operatorname{tg} x = 3/4$$

c)

$$\sin x = 2/\sqrt{5}$$

$$\cos x = 1/\sqrt{5}$$

1.5

Sense utilitzar la calculadora, calculeu les raons trigonomètriques de 1110° .

Sol: $1110^\circ \approx 30^\circ$

$$\sin 1110^\circ = 1/2$$

$$\operatorname{cosec} 1110^\circ = 2$$

$$\cos 1110^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\operatorname{sec} 1110^\circ = 2/\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 1110^\circ = 1/\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} 1110^\circ = \sqrt{3}$$

1.6

Sense utilitzar la calculadora, calculeu la resta de raons trigonomètriques i els angles entre 0° i 360° que compleixen:

$$a) \sin \alpha = -1/2 \quad i \quad \operatorname{tg} \alpha > 0 \quad b) \operatorname{tg} \beta = 1 \quad i \quad \cos \beta < 0$$

Sol:

$$a) 210^\circ \quad \cos \alpha = -\sqrt{3}/2 \quad \operatorname{tg} \alpha = 1/\sqrt{3} \quad b) 225^\circ \quad \sin \alpha = -\sqrt{2}/2 \quad \cos \alpha = -\sqrt{2}/2$$

1.7

Sense utilitzar la calculadora, calculeu la resta de raons trigonomètriques, si: $\cos x = 0,6$ i $\operatorname{tg} x < 0$.

Sol:



$$\sin x = -0,8 \quad \operatorname{tg} x = -4/3 \quad \sec x = 5/3 \quad \operatorname{cosec} x = -5/4 \quad \operatorname{cotg} x = -3/4$$

1.8

Trobeu els angles entre 0° i 360° que compleixen: $\sin \alpha = -\cos \alpha$

RAONAMENT

$$\sin \alpha = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 \quad \alpha = -45^\circ + k180^\circ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 135^\circ \\ \alpha = 315^\circ \end{cases}$$

1.9

Escriu en graus sexagesimals, centesimals i en radians, l'angle que formen les agulles del rellotge quan son les: a) 6:00 b) 3:00 c) 10:00.

Sol:

$$a) 180^\circ, 200 \text{ g}, \pi \text{ rad} \quad b) 90^\circ, 100 \text{ g}, \pi/2 \text{ rad} \quad c) 60^\circ, 200/3 \text{ g}, \pi/3 \text{ rad}$$

1.10

Escriu en graus sexagesimals:

a) $\pi/4 \text{ rad}$	b) $3\pi/4 \text{ rad}$	c) $5\pi/4 \text{ rad}$	d) $4\pi/3 \text{ rad}$
------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

Sol:

$$a) 45^\circ \quad b) 135^\circ \quad c) 225^\circ \quad d) 240^\circ$$

1.11

1.11. Completeu la taula:

Rad	$\pi/3$			π		$3\pi/4$	$5\pi/4$		$\pi/2$	
-----	---------	--	--	-------	--	----------	----------	--	---------	--



Deg	30°	45°	225°	330°	270°
-----	-----	-----	------	------	------

Sol:

Fila 1 ^a	$\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/4$	$7\pi/6$	$3\pi/2$
Fila 2 ^a	60°	180°	135°	225°	90°

1.12

Trobeu, sense utilitzar la calculadora, les raons trigonomètriques de α en els següents casos:

- | | |
|---|--|
| a) $\cos \alpha = 3/5$ $\alpha \in 4r$ quadrant | b) $\cos \alpha = -1/3$ $\alpha \in 2n$ quadrant |
| c) $\operatorname{tg} \alpha = -2/5$ $\alpha \in 2n$ quadrant | d) $\sec \alpha = -3/2$ $\alpha \in 3r$ quadrant |

d) $\sec \alpha = -3/2$ $\alpha \in$ tercer quadrant

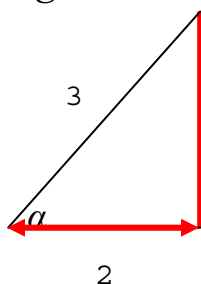
a) primer mètode

$$\cos \alpha = -2/3 \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

si α pertany al tercer quadrant \rightarrow

$$\begin{cases} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

b) segon mètode



catet oposat $\sqrt{5}$, si $\alpha \in$ tercer quadrant



$$\sin < 0, \operatorname{tg} < 0 \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Sol:

a) $\sin \alpha = -4/5$ $\operatorname{tg} \alpha = -4/3$ b) $\sin \alpha = 2\sqrt{2}/3$ $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{2}$
 c) $\sin \alpha = 2/\sqrt{29}$ $\cos \alpha = -5/\sqrt{29}$ d) $\sin \alpha = -\sqrt{5}/3$ $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5}/2$

1.13

Pot complir-se?

a) $\sin \alpha = 1/5$ i $\cos \alpha = 2/5$

b) $\sin x = 1/3$ i $\operatorname{tg} x = 1/9$

Sol: a) no b) no

1.14

Si un angle pertany al tercer quadrant. Quin signe tenen: la cotangent, la cosecant i la secant?

Sol: $\operatorname{cotg} = (+)$ $\operatorname{cosec} = (-)$ $\operatorname{sec} = (-)$

1.15

Si un angle pertany al segon o tercer quadrant analitzeu el signe de la tangent.

Sol: en el segon (-) en el tercer(+)

1.16

Si $\operatorname{tg} \alpha = 4$ i $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ calculeu sense utilitzar la calculadora : el seu sinus i el seu cosinus.



RAONAMENT

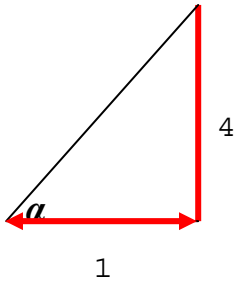
$tg \alpha = 4$

a) PRIMER MÈTODE

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \alpha}} = \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \sin \alpha = \cos \alpha \cdot tg \alpha = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$$

si $x \in$ tercer quadrant \rightarrow
$$\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

b) SEGON MÈTODE



hipotenusa = $\sqrt{17}$ $\sin \alpha < 0$ $\cos \alpha < 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$$



Si x està comprès entre 0° i 90° , utilitzeu la calculadora per resoldre:

a)	b)	c)	d)
$\sin x = 0'6018$	$\cos y = 0'6428$	$tg z = 2'7475$	$\cot \alpha = 2'1445$

Sol:

a) $x = 37^\circ$ b) $y = 50^\circ$ c) $z = 70^\circ$ d) $\alpha = 25^\circ$



1.18

Si el sinus de α es 0,8 i l'angle no pertany al primer quadrant, trobeu, sense utilitzar la calculadora, el seu cosinus i la seva tangent.

Sol: $\cos \alpha = -0,6$ $\operatorname{tg} \alpha = -4/3$

1.19

Si la tangent de α es $1/2$ i l'angle α pertany al tercer quadrant. Trobeu, sense utilitzar la calculadora, la resta de raons trigonomètriques.

Sol: $\cos \alpha = -2/\sqrt{5}$ $\sin \alpha = -1/\sqrt{5}$

1.20

Si $\sec \alpha = -2$ i α no pertany al tercer quadrant, Trobeu, sense utilitzar la calculadora, la resta de raons trigonomètriques.

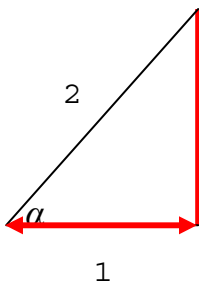
RAONAMENT

$\sec \alpha = -2$ $\alpha \in \text{segon quadrant}$

$$a) \cos \alpha = -1/2 \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{3}$$

$$\text{si } \alpha \text{ pertany al segon quadrant} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3} \end{cases}$$

b)



catet oposat $\sqrt{3}$, si $\alpha \in \text{tercer quadrant}$



$$\sin > 0, \operatorname{tg} < 0 \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3} \end{cases}$$

1.21

Si $\operatorname{tg} \alpha = 3/2$ i $\alpha \notin$ primer quadrant, Trobeu, sense utilitzar la calculadora, la resta de raons trigonomètriques.

Sol: $\sin \alpha = -3/\sqrt{13}$ $\cos \alpha = -2/\sqrt{13}$

1.22

Trobeu sense calculadora, les raons trigonomètriques de:

a) 120°	b) 135°	c) 150°	d) 180°	e) 210°	f) 225°
g) 240°	h) 270°	i) 300°	j) 315°	k) 330°	

Sol:

a) $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$ $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$ b) $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$ $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ$

c) $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$ $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$ d) $\sin 180^\circ = \sin 0^\circ$ $\cos 180^\circ = -\cos 0^\circ$

e) $\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ$ $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ$ f) $\sin 225^\circ = -\sin 45^\circ$ $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ$

g) $\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ$ $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ$ h) $\sin 270^\circ = -\sin 90^\circ$ $\cos 270^\circ = -\cos 90^\circ$

i) $\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ$ $\cos 300^\circ = \cos 60^\circ$ j) $\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ$ $\cos 315^\circ = \cos 45^\circ$

k) $\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ$ $\cos 330^\circ = \cos 30^\circ$



1.23

Trobeu sense calculadora, les raons trigonomètriques de: a) 765°
b) -240°

Sol:

$$765^\circ = 45^\circ$$

$$-240^\circ = 120^\circ$$

$$\sin 765^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\sin(-240^\circ) = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 765^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\cos(-240^\circ) = -1/2$$

1.24

Si $\sin 37^\circ = 0'6$. Calcula, sense utilitzar la calculadora, les raons trigonomètriques de 53° .

RAONAMENT

$$\sin 37^\circ = 0'6$$

$$\cos 37^\circ = \sqrt{0'64} = 0'8$$

$$\operatorname{tg} 37^\circ = 3/4$$

$$\sin 53^\circ = \cos 37^\circ = 0'8 \quad \cos 53^\circ = \sin 37^\circ = 0'6 \quad \operatorname{tg} 53^\circ = \operatorname{cot} 37^\circ = 4/3$$

1.25

Si $\cos 37^\circ = 0'8$. Calcula, sense utilitzar la calculadora, les raons trigonomètriques de 143° .

$$\text{Sol: } \sin 143^\circ = 0'6 \quad \cos 143^\circ = -0'8 \quad \operatorname{tg} 143^\circ = -3/4$$

1.26

Si $\sin 20^\circ = 0'342$. Calcula les raons trigonomètriques de 40° .

$$\text{Sol: } \sin 20^\circ = 0'342 \quad \cos 20^\circ = 0'939 \quad \sin 40^\circ = 0'642 \quad \cos 40^\circ = 0'764$$

1.27

Calcula les raons trigonomètriques de 150° , utilitzant les de 30° .



Sol: $\sin 150^\circ = 1/2$ $\cos 150^\circ = -\sqrt{3}/2$ $\operatorname{tg} 150^\circ = -\sqrt{3}/3$

1.28

Si $\sin 20^\circ = 0'342$ $\cos 20^\circ = 0'94$ $\operatorname{tg} 20^\circ = 0'364$. Calcula, sense utilitzar la calculadora, les raons trigonomètriques de 70° .

RAONAMENT

$\sin 20^\circ = 0'342$ $\cos 20^\circ = 0'94$ $\operatorname{tg} 20^\circ = 0'364$

$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ = 0'94$ $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ = 0'342$ $\operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{cotg} 20^\circ = 2'75$

1.29

Si: $\sin 53^\circ = 0'8$ $\cos 53^\circ = 0'6$ $\operatorname{tg} 53^\circ = 4/3$. Calcula, sense utilitzar la calculadora, les raons trigonomètriques de 143° .

Sol: $\sin 143^\circ = 0'6$ $\cos 143^\circ = -0'8$ $\operatorname{tg} 143^\circ = -3/4$

1.30

Calcula, sense utilitzar la calculadora, les raons trigonomètriques de 215° si $\operatorname{tg} 35^\circ = 0'7$.

Sol: $\sin 215^\circ = -0'57$ $\cos 215^\circ = -0'82$ $\operatorname{tg} 215^\circ = 0'7$

1.31

Calcula, sense utilitzar la calculadora, les raons trigonomètriques de:

a) 150° b) -225° c) 480° d) -660° e) -1770° f) 1440°

Sol:

a) $\sin 150^\circ = 1/2$

b) $\sin(-225^\circ) = \sqrt{2}/2$

$\cos 150^\circ = -\sqrt{3}/2$

$\cos(-225^\circ) = -\sqrt{2}/2$

c) $\sin 480^\circ = \sqrt{3}/2$

d) $\sin(-660^\circ) = \sqrt{3}/2$



$$\cos 480^\circ = -1/2$$

$$e) \sin(-1770^\circ) = 1/2$$

$$\cos(-1770^\circ) = \sqrt{3}/2$$

$$\cos(-660^\circ) = 1/2$$

$$f) \sin 1440^\circ = 0$$

$$\cos 1440^\circ = 1$$

$$a) (\pi - \alpha) \text{ rad}$$

$$b) (\pi + \alpha) \text{ rad}$$

$$c) -\alpha \text{ rad}$$

1.32

Si α pertany al segon quadrant i $\sin \alpha = 3/5$. Calculeu, sense utilitzar la calculadora, el sinus de:

$$a) (\pi - \alpha) \text{ rad}$$

$$b) (\pi + \alpha) \text{ rad}$$

$$c) -\alpha \text{ rad}$$

RAONAMENT

$$\sin \alpha = 3/5 \quad \cos \alpha = -4/5 \quad \text{tg } \alpha = -3/4$$

$$a) \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = 3/5 \quad b) \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha = -3/5$$

$$c) \sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -3/5$$

1.33

Demostreu les identitats següents:

$$a) \text{tga} + \text{tgb} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b}$$

$$b) \frac{2\text{tga}}{1 + \text{tg}^2 a} = 2 \cos a \sin a$$

$$c) \frac{1 - \text{tg}^2 a}{1 + \text{tg}^2 a} = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$d) \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

1.34

Calculeu l'altura d'una torre si des de 20m. de la seva base, es divisa el punt més alt sota un angle de 45° .

Sol: 20 m



1.35

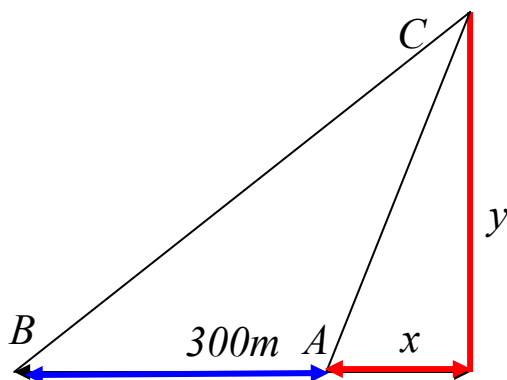
L'angle d'elevació d'una torre és de 45° situats a una distància de 20m del seu peu. si l'observador es troba situat a un metre per sobre del peu de la torre, calculeu l'altura de la torre.

Sol: 21m.

1.36

Es vol mesurar l'altura d'una muntanya des d'un terreny horitzontal i la primera mesura de la seva altura és d'un angle de 30° . si avancem cap a la muntanya 300m i tornem a mesurar la seva alçada, ara ens dona un angle de 45° . Calculeu l'altura d'aquesta muntanya.

RAONAMENT



$$B = 30^\circ \quad A = 45^\circ$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{y}{300 + x} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{300 + y} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ y = \frac{300}{\sqrt{3} - 1} = 150(\sqrt{3} + 1)m \end{array} \right.$$

$$y = 409'8 m$$



1.37

A 100m d'un arbre es divideix la seva copa sota un angle de 30° . Una altra persona el divideix sota un angle de 60° , calculeu la seva distància al peu de l'arbre.

Sol: $100/3$ m.

1.38

A certa distància es veu una torreta sota un angle de 60° ; calculeu l'angle en que es veurà a doble i triple distància.

Sol: $40,9^\circ$ 30° .

1.39

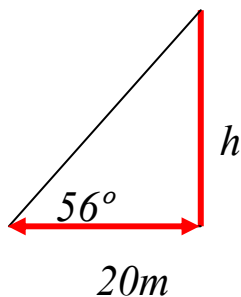
Una persona que mesura 180cm projecta una ombra de 135cm. calculeu l'angle que forma un raig de llum amb l'horitzontal.

Sol: $53'13''$.

1.40

Calcula l'altura d'una casa si projecta una ombra de 20m quan el sol té una inclinació de 56° respecte de la línia de l'horitzó.

RAONAMENT



$$h = 20 \operatorname{tg} 56^\circ = 29'65''$$



1.41

Des d'una altura de 3000m. un pilot veu la llum de la torre de control sota un angle de 30° respecte de l'horitzontal. Calcula la distància horitzontal de l'avió a la torre de control.

Sol: $3000\sqrt{3}$ m.

1.42

Un avió vola en direcció NO a 200Km/h. Calculeu la distància projectada cap al nord i cap a l'oest al cap de 2 hores.

Sol: $x = y = 200\sqrt{2}$ km.

1.43

Calculeu la altura d'una torre si primer la veiem sota un angle de 60° i si ens retirem 20m. en direcció contrària la veiem sota un angle de 30° .

Sol: $h=10\sqrt{3}$ m $x=10$ m

NIVELL2

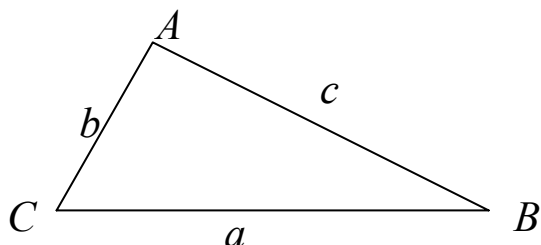


TEOREMA DEL SINUS

En un triangle : el quocient entre un costat i el sinus de l'angle oposat és constant

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

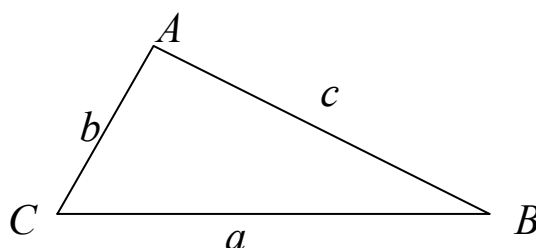
R = radi de la circumferència circumscripta



TEOREMA DEL COSINUS

En un triangle : un costat al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels altres dos menys el doble del producte d'aquests dos costats pel cosinus de l'angle oposat al primer.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



SUMA I DIFERÈNCIA D'ANGLES

$$\sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos (x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tag} (x \pm y) = \frac{\operatorname{tag}(x) \pm \operatorname{tag}(y)}{1 \mp \operatorname{tag}(x) \cdot \operatorname{tag}(y)}$$

ANGLE DOBLE EN FUNCIO DE L'ANGLE MEITAT

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tag} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tag}(x)}{1 - \operatorname{tag}^2(x)}$$



ANGLE MEITAT EN FUNCIO DE L'ANGLE DOBLE

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \operatorname{tag}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

SUMA I RESTA DE RAONS TRIGONOMETRIQUES

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \pm \cos y = \sin x \pm \sin (90^\circ - y)$$

PRODUCTE DE RAONS TRIGONOMETRIQUES

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos (x-y) - \cos (x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x-y) + \cos (x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin (x-y) + \sin (x+y)]$$



$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin (x + y) - \sin (x - y)]$$

EXERCICIS:

2.1

Si: $\sin 12^\circ = 0'2$ i $\sin 37^\circ = 0'6$ calcula:

a) $\sin 49^\circ$ $\cos 49^\circ$ $\text{tg} 49^\circ$	b) $\sin 25^\circ$ $\cos 25^\circ$ $\text{tg} 25^\circ$
---	---

RAONAMENT

b)

$$\sin 12^\circ = 0'2 \quad \cos 12^\circ = 0'98 \quad \sin 37^\circ = 0'6 \quad \cos 37^\circ = 0'8$$

$$\sin 25^\circ = \sin(37^\circ - 12^\circ) = 0'6 \cdot 0'98 - 0'8 \cdot 0'2 = 0'428$$

$$\cos 25^\circ = \cos(37^\circ - 12^\circ) = 0'8 \cdot 0'98 + 0'6 \cdot 0'2 = 0'904$$

$$\text{tg} 25^\circ = 0'428 / 0'904 = 0'473$$

Sol:

a)

$$\sin 49^\circ = 0'74$$

$$\cos 49^\circ = 0'656$$

$$\text{tg} 49^\circ = 1'15$$

b)

$$\sin 25^\circ = 0'42$$

$$\cos 25^\circ = 0'9$$

$$\text{tg} 25^\circ = 0'47$$

2.2

Un terreny en forma triangular, dos dels seus costats mesuren 6 i 10m respectivament, i l'angle comprés és de 30° . Calculeu la seva àrea.

Sol: 15m^2

2.3

En un terreny triangular, de costats 20, 22 i 30m respectivament, calculeu els seus angles.

Sol: $41'8^\circ$ $47'16^\circ$ i $91'04^\circ$



2.4

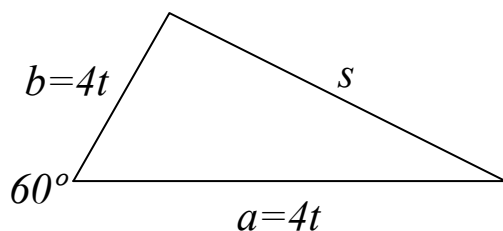
Tres pobles ABC formen triangle: $AB=10\text{km}$, $BC=12\text{km}$ i l'angle format per AB i AC és de 120° . Calculeu la distància AC.

Sol: 30'30km o 13'7km.

2.5

Dues persones surten d'un mateix punt enfilant dos camins que formen entre si un angle de 60° . si les dues caminen a una velocitat de 4Km/h , Quina és la distància que els separarà quan hagi passat una hora?

RAONAMENT



$$s^2 = 16t^2 + 16t^2 - 2 \cdot 4t \cdot 4t \cdot \cos 60^\circ$$

$$s^2 = t^2 (16 + 16 - 16) = 16t^2$$

$$s = 4t \quad \text{si } t = 1\text{h} \quad s = 4\text{Km}$$

2.6

Dos mòbils surten d'un mateix punt seguint trajectòries rectilínies que formen entre si un angle de 135° amb velocitats de 10 m/s i 20 m/s . Trobeu la distància que els separa quan han passat 5 minuts.

Sol: 8394 m

3. EQUACIONS



$\sin x = a$	$\begin{cases} x = x_0 + k360^\circ \\ x = (180^\circ - x_0) + k360^\circ \end{cases}$
$\sin f(x) = a$	$\begin{cases} f(x) = t_0 + 2k\pi \\ f(x) = (\pi - t_0) + 2k\pi \end{cases}$
$\cos x = a$	$\begin{cases} x = x_0 + k360^\circ \\ x = 360^\circ - x_0 + k360^\circ \end{cases}$
$\cos f(x) = a$	$\begin{cases} f(x) = t_0 + 2k\pi \\ x = -t_0 + 2k\pi \end{cases}$
$\operatorname{tg}x = a$	$x = x_0 + k180^\circ$
$\operatorname{tg}f(x) = a$	$f(x) = t_0 + k\pi$
$\sin x = \sin y$	$\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} = 0 \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0 \end{cases}$
$\sin x = -\sin y$	$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0 \\ \sin \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$
$\cos x = \cos y$	$\begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} = 0 \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0 \end{cases}$
$\cos x = -\cos y$	$\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} = 0 \\ \cos \frac{x-y}{2} = 0 \end{cases}$
$\operatorname{tg}x = \operatorname{tgy}$	$y = x + k \cdot 180^\circ$
$\operatorname{tg}x = -\operatorname{tgy}$	$y = -x + k \cdot 180^\circ$



$\sin x = \cos y \Leftrightarrow \sin x = \sin(90^\circ - y)$	$\begin{cases} \cos \frac{x + 90^\circ - y}{2} = 0 \\ \sin \frac{x - 90^\circ + y}{2} = 0 \end{cases}$
---	--

EXERCICIS

3.1

Resoleu:

a) $\sin 2x = -1/2$	$x = 105^\circ + 180^\circ k$ $x = 165^\circ + 180^\circ k$
b) $\cos x = \sqrt{3}/2$	$x = 30^\circ + 360^\circ k$ $x = 330^\circ + 360^\circ k$
c) $\operatorname{tg} x = 1$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$
d) $\sin 3x = \sqrt{3}/2$	$x = 20^\circ + 120^\circ k$ $x = 40^\circ + 120^\circ k$

RAONAMENT

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} 3x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 3x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 20^\circ + k120^\circ \\ x = 40^\circ + k120^\circ \end{cases}$$

3.2

Resoleu:

a) $\sin(x - (\pi/3)) = \sin(2x + (\pi/3))$	$x = 60^\circ + 120^\circ k$ $x = 240^\circ + 360^\circ k$
b) $\cos 2x = \cos(x + \pi/2)$	$x = 90^\circ + k360^\circ$ $x = 210^\circ + k360^\circ$ $x = 330^\circ + k360^\circ$
c) $\cos 2x = \cos x$	$x = 0^\circ + k180^\circ$ $x = 120^\circ + k360^\circ$ $x = 240^\circ + k360^\circ$
d) $\sin 2x = \cos x$	$x = 90^\circ + k180^\circ$ $x = 30^\circ + k360^\circ$ $x = 150^\circ + k360^\circ$

RAONAMENT



$$\begin{array}{l} \sin 2x = \cos x \quad \rightarrow \quad 2 \sin x \cos x = \cos x \quad \rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = 1/2 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 90^\circ + k180^\circ \\ x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 150^\circ + k360^\circ \end{array} \right. \end{array}$$

3.3

Resoleu:

a) $\log(\sin x) - \log(\cos x) = 0$	$x = 45^\circ + 360^\circ k$
b) $\cos x - 2 \sin x \cdot \cos x = 0$	$x = 90^\circ + 360^\circ k$ $x = 30^\circ + 360^\circ k$ $x = 150^\circ + 360^\circ k$
c) $\sin^2 x + \cos 2x = 1/4$	$x = 60^\circ + 180^\circ k$ $x = 120^\circ + 180^\circ k$
d) $\operatorname{tg}^2 x + 2 = 3 \operatorname{tg} x$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$ $x = 63,43^\circ + 180^\circ k$
e) $\sin^2 x + \cos^2 x = 2 - \cos^2 x$	$x = 0^\circ + 180^\circ k$

RAONAMENT

$$\begin{array}{l} \sin^2 x + \cos^2 x = 2 - \cos^2 x \quad \rightarrow \\ \cos^2 x = 1 \quad \rightarrow \quad \cos x = \pm 1 \quad \rightarrow \quad x = 0^\circ + k180^\circ \end{array}$$

3.4

Resoleu:

a) $\cos^2 x = \sin^2 x$	$x = 45^\circ + 90^\circ k$
b) $\sin x = -\cos x$	$x = 135^\circ + 180^\circ k$
c) $\sin(2x - 15^\circ) = \cos(x + 15^\circ)$	$x = 30^\circ + 45^\circ k$

**RAONAMENT**

$$\begin{aligned} \sin(2x-15^\circ) &= \cos(x+15^\circ) \quad \rightarrow \sin(2x-15^\circ) = \sin[90^\circ-(2x-15^\circ)] \\ \rightarrow \sin(2x-15^\circ) - \sin(105^\circ-2x) &= 0 \quad \rightarrow 2\cos(45^\circ)\sin(4x-120^\circ) = 0 \\ \rightarrow \sin(4x-120^\circ) &= 0 \quad \rightarrow 4x-120^\circ = 0^\circ + k180^\circ \quad \rightarrow x = 30^\circ + k \cdot 45^\circ \end{aligned}$$

3.5

Resoleu:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha$	$\alpha = 60^\circ + 360^\circ k$ $\alpha = 300^\circ + 360^\circ k$ $\alpha = 360^\circ k$
b) $2\sin^2 x + \cos^2 x - 32\sin x = 0$	$x = 45^\circ + 360^\circ k$ $x = 135^\circ + 360^\circ k$
c) $\sin^2 x - \sin x + 1/4 = 0$	$x = 30^\circ + 360^\circ k$ $x = 150^\circ + 360^\circ k$
d) $\cos^2 x = (\cos x) / 2$	$x = 90^\circ + 180^\circ k$ $x = 60^\circ + 360^\circ k$ $x = 300^\circ + 360^\circ k$

RAONAMENT

$$\cos^2 x = \frac{\cos x}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 1/2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 90^\circ + k180^\circ \\ x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = 300^\circ + k360^\circ \end{cases}$$

3.6

Resoleu:

a) $\cos x + 3 \sin x = 2$	$x = 60^\circ + 360^\circ k$
b) $4 \sin(x/2) + 2 \cos x = 2$	$x = 180^\circ + 360^\circ k$
c) $2 \sin(x+30^\circ) \cdot \cos(x-30^\circ) = 3$	$x = 60^\circ + 180^\circ k$ $x = 30^\circ + 180^\circ k$
d) $\sin(x/2) = \operatorname{tg}(x/4)$	$x = 180^\circ k$
e) $\log(\operatorname{tg} x) + \log(\cos x) = \log(1/2)$	$x = 30^\circ + 360^\circ k$



$f) 6 \operatorname{tg} x = 3/\cos x$	$x = 30^\circ + 360^\circ k$ $x = 150^\circ + 360^\circ k$
RAONAMENT	
$6 \operatorname{tg} x = \frac{3}{\cos x} \quad (\cos x \neq 0) \rightarrow \sin x = 1/2 \rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 150^\circ + k360^\circ \end{cases}$	

3.7	
<i>Resoleu:</i>	
$a) \cos^2 x = \sin^2 x$	$x = 45^\circ + 90^\circ k$

3.8	
<i>Resoleu:</i>	
$a) \sin \alpha = \sin \beta$	$\alpha^\circ = \beta^\circ$ $\alpha^\circ = 180^\circ - \beta^\circ$
$b) \cos \alpha = \cos \beta$	$\alpha^\circ = \beta^\circ$ $\alpha^\circ = -\beta^\circ$
$c) \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$	$\alpha^\circ = \beta^\circ$ $\alpha^\circ = 180^\circ + \beta^\circ$
$d) \sin \alpha = \cos \beta$	$\alpha^\circ = 90 - \beta^\circ$ $\alpha^\circ = \beta^\circ - 90^\circ$
$e) \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$	$\alpha^\circ = 90^\circ - \beta^\circ$

3.9	
------------	--

3.9. Resoleu:

$a) \sin x = \sin (x + (\pi/2))$	$x = \pi/4 + k \pi$
$b) \sin x = -\sin (x + (\pi/2))$	$x = -\pi/4 + k \pi$



c) $\cos(2x) = \cos(x + 90^\circ)$	$x = \pi/6 + 2k\pi/3$ $x = \pi/2 + 2k\pi$
d) $\sin 3x = \cos(2x + (\pi/3))$	$x = \pi/30 + 2k\pi/5$
e) $\sin x = \cos 2x$	$x = \pi/6 + 2k\pi/3$
f) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(2x + \pi)$	$x = k\pi$

3.10

Resoleu:

a) $\sin(2x + (\pi/6)) = \cos((\pi/4 - x))$	$x = \pi/12 + 2k\pi$
---	----------------------

3.11

Resoleu:

a) $\sin x \cdot \cos x = 1/2$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$
b) $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sqrt{3}/2$	$x = 60^\circ + 360^\circ k$ $x = 120^\circ + 360^\circ k$
c) $\sin 2x = \sin x$	$x = 180^\circ k$ $x = 60^\circ + 360^\circ k$ $x = 300^\circ + 360^\circ k$
d) $\sqrt{3} + 2 \cos x = 0$	$x = 150^\circ + 180^\circ k$
e) $\cos 2x = \sin(x + 180^\circ)$	$x = 90^\circ + 360^\circ k$ $x = 210^\circ + 360^\circ k$ $x = 330^\circ + 360^\circ k$

3.12

Resoleu:

a) $\cos(2x) - 2 \cos x + 1 = 0$	$x = \pi/2 + 2k\pi$ $x = 0 + 2k\pi$
----------------------------------	-------------------------------------



3.13

Resoleu:

a) $2 = 2 \operatorname{arctg} (x/4)$	$x = \pi$	$x = 5\pi$
b) $1 = \sqrt{2} \operatorname{arccos} (1/x)$	$x = 4/\pi$	$x = 4/(7\pi)$

3.14

Calcula el valor de:

a) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arccotg} (1/\sqrt{3})$	$x = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$
--	--------------------------------------

3.15

Resoleu:

a) $\sin (x - 30^\circ) = 1/2$	$x = 60^\circ + 360^\circ k$ $x = 180^\circ + 360^\circ k$
b) $\cos (2x - 30^\circ) = 1/2$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$ $x = 165^\circ + 180^\circ k$
c) $\sin (3x - 30^\circ) = \sqrt{3}/2$	$x = 30^\circ + 120^\circ k$ $x = 50^\circ + 120^\circ k$
d) $\cos (3x - 15^\circ) = \sqrt{3}/2$	$x = 15^\circ + 120^\circ k$ $x = 115^\circ + 120^\circ k$
e) $\operatorname{tg} (x - 45^\circ) = -1$	$x = 180^\circ k$

3.16

Resoleu:

a) $\sin 2x \cdot \cos x = 6 \sin^3 x$	$x = 180^\circ k$ $x = 30^\circ + 180^\circ k$ $x = 150^\circ + 180^\circ k$
--	---



b) $\cos x = (2 \operatorname{tg} x) / (1 + \operatorname{tg}^2 x)$	$x = 30^\circ + 360^\circ k$ $x = 150^\circ + 360^\circ k$
c) $\sin^2 x - \cos^2 x = -1/2$	$x = 30^\circ + 180^\circ k$ $x = 150^\circ + 180^\circ k$
d) $\operatorname{cosec} x \cdot \cos x = 1$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$
e) $\operatorname{tg} x \cdot \sec x = 2$	$x = 60^\circ + 360^\circ k$ $x = 300^\circ + 360^\circ k$
f) $\cos 2x = -2 \cos^2 x$	$x = 60^\circ + 180^\circ k$ $x = 120^\circ + 180^\circ k$

3.17

Resoleu:

a) $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$	$x = 180^\circ k$ $x = 60^\circ + 360^\circ k$ $x = 300^\circ + 360^\circ k$
b) $2 \operatorname{tg} x = 1 / \cos^2 x$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$ $x = 135^\circ + 180^\circ k$
c) $\sec(3x) = 2 / \sqrt{3}$	$x = 10^\circ + 120^\circ k$ $x = 110^\circ + 120^\circ k$

3.18

Resoleu:

a) $(4 \operatorname{tg} x) / (1 - \operatorname{tg}^2 x) = 2 / \operatorname{tg} x$	$x = 30^\circ + 180^\circ k$
b) $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$	$x = 60^\circ + 360^\circ k$ $x = 120^\circ + 360^\circ k$
c) $\cos 2x + \sin x = \cos x$	$x = 0^\circ + 90^\circ k$ $x = 45^\circ + 180^\circ k$



3.19

Aïlla el valor de x de la funció:

a) $y = (1/a) \cdot \sec(2-x)$	$x = 2 - \arccos [1 / (a y)]$
--------------------------------	-------------------------------

3.20

Resoleu:

a) $\sin 4x + \sin 2x = 0$	$x = 0^\circ + 60^\circ k$ $x = 90^\circ + 180^\circ k$
----------------------------	---

4. SISTEMES TRIGONOMÈTRICS

EXERCICIS

4.1

Si x i y pertanyen al primer quadrant, resoleu:

a) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$	$x = 90^\circ, y = 0$ $x = 0^\circ, y = 90^\circ$
--	--

b) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \\ \cos(x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$	$x = 45^\circ, y = 0$ $x = 0, y = 45^\circ$
--	--

4.2

Resoleu en la primera volta de circumferència els següents sistemes:



a) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos(x - y) = 1 \end{cases}$	$x = 30^\circ, y = 30^\circ$ $x = 150^\circ, y = 150^\circ$
b) $\begin{cases} \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x + y) = 1 \end{cases}$	$x = 60^\circ, y = 30^\circ$ $x = 120^\circ, y = 330^\circ$
c) $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$	$x = 30^\circ, y = 30^\circ$ $x = 150^\circ, y = 150^\circ$

4.3

Resoleu en la primera volta de circumferència els següents sistemes:

a) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ 2x + 2y = 120 \end{cases}$	$x = 30^\circ, y = 30^\circ$
b) $\begin{cases} \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x + y) = 1 \end{cases}$	$x = 60^\circ, y = 30^\circ$ $x = 120^\circ, y = 330^\circ$
c) $\begin{cases} \cos(x + y) = 0 \\ \cos(x - y) = 0 \end{cases}$	$x = 90^\circ, y = 0$ $x = 270^\circ, y = 0$