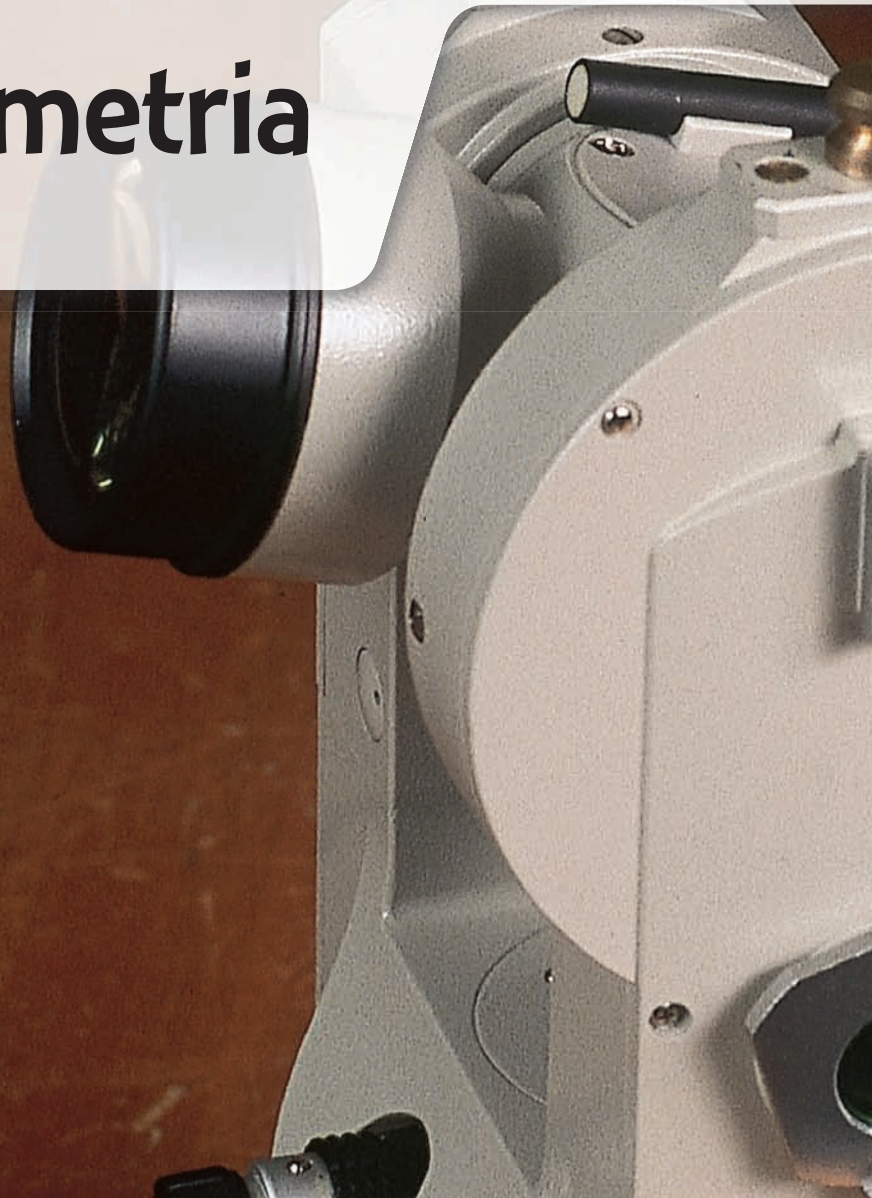
5 Trigonometria



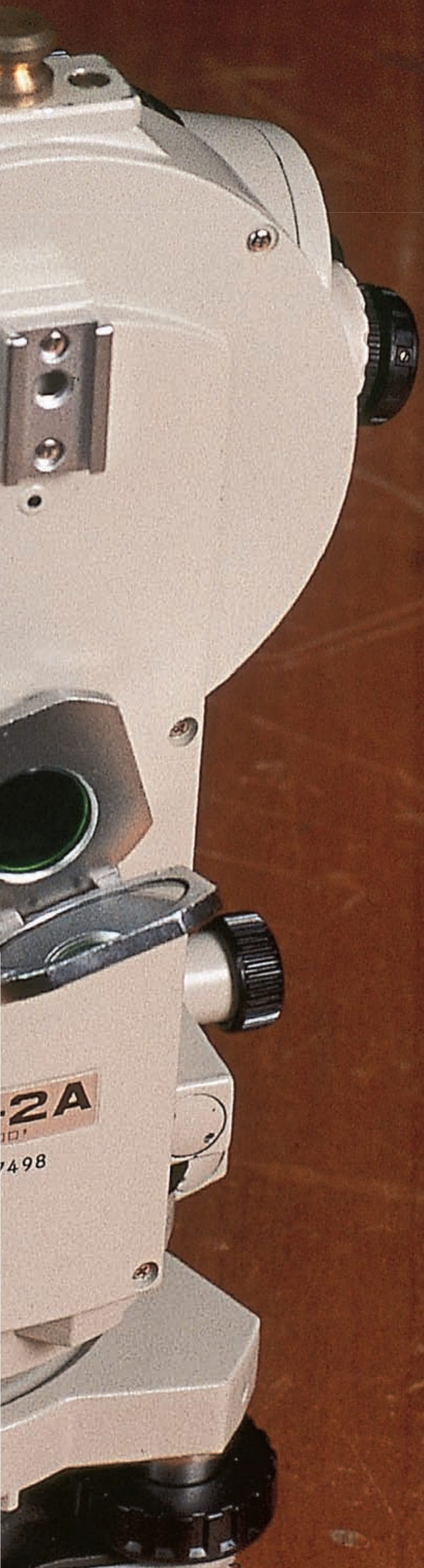
La topografia és la ciència que estudia i descriu amb detall la superfície d'un indret. Té com a objectiu mesurar extensions de terra, distàncies horitzontals i verticals entre punts, i objectes de la superfície de la Terra. En línies generals, sol ser més senzill mesurar angles que mesurar longituds i, per això, es tracta de determinar alguna longitud de fàcil accés i els angles necessaris per després poder calcular de manera indirecta les mesures que es vulguin.

L'aparell que s'utilitza per mesurar angles, tant en el pla horitzontal com en el vertical, s'anomena **teodolit**.

Un teodolit consta d'una ullera que pot girar al voltant d'un eix perpendicular. En llançar la visual a un cert punt, el gir efectuat per la ullera es mesura en un cercle graduat i, d'aquesta manera, es poden mesurar els angles situats en el pla vertical.

D'altra banda, la ullera també es recolza sobre un suport que pot girar al voltant d'un eix vertical. Perpendicular a aquest eix, hi ha un altre cercle graduat que permet mesurar angles sobre el pla horitzontal.

En aquesta unitat coneixerem què és la **trigonometria,** una part de les matemàtiques que tracta de relacionar i fer càlculs amb les mesures dels costats i els angles d'un triangle, i que utilitza com a eines els teodolits i altres estris de mesura.



ACTIVITATS PRÈVIES

- Un dels angles aguts d'un triangle rectangle mesura 23°. Quina és la mesura dels altres dos angles d'aquest triangle?
- Dibuixa un triangle equilàter de 12 cm de perímetre i fes-ne la descomposició en dos triangles rectangles iguals. Indica la mesura dels catets i dels angles aguts de cadascun d'aquests dos triangles.
- La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura $2\sqrt{5}$ cm. Calcula l'àrea d'aquest triangle sabent que un catet és el doble que l'altre.
- El més petit dels angles aguts d'un triangle rectangle mesura 34°, i el més gran dels angles aguts d'un altre triangle rectangle mesura 56°. Són semblants els dos triangles? Per què?

OBJECTIUS DE LA UNITAT

- Observar la relació existent entre angles i costats en els triangles rectangles semblants.
- Conèixer les raons trigonomètriques d'un angle agut i relacionar-les entre elles.
- Trobar les raons trigonomètriques d'un angle agut per mètodes gràfics i utilitzant la calculadora.
- Trobar les raons trigonomètriques d'un angle obtús i relacionar-les entre elles.
- Conèixer el teorema del sinus i del cosinus, i saber aplicar-los en el moment adequat.
- Aplicar la trigonometria a la resolució de problemes de la vida real.

Cb COMPETÈNCIES BÀSIQUES

A banda de la competència matemàtica, en aquesta unitat treballaràs també les competències següents:

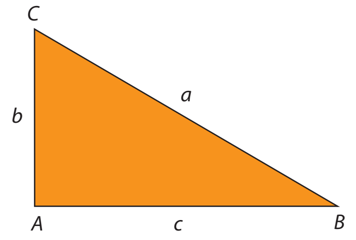
1. Competència comunicativa lingüística i audiovisual.

7. Competència en el coneixement i la interacció amb el món físic.

1. Els triangles rectangles. Resolució de triangles rectangles

En cursos anteriors has tingut ocasió de comprovar que els triangles rectangles mereixen una atenció especial, ja que els seus elements verifiquen tota una sèrie de propietats i relacions que no es verifiquen en els altres tipus de triangles.

D'aquesta manera:



- Un dels angles sempre és conegut: mesura 90°. Per tant, els altres dos angles són complementaris, és a dir, sumen 90°.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \text{ i } \hat{A} = 90° \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90°$$

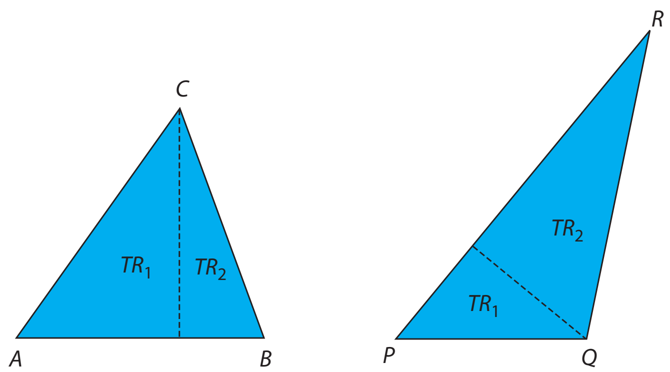
- Les longituds dels costats estan relacionades entre elles mitjançant el teorema de Pitàgores:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

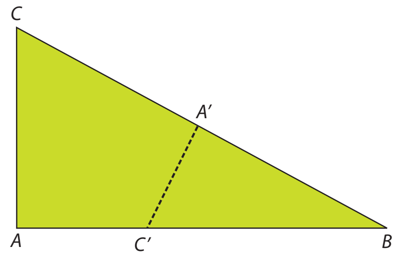
- Per calcular-ne l'àrea, podem prendre indistintament un dels dos catets com la base del triangle i l'altre catet com l'altura, ja que són perpendiculars:

$$A = \frac{bc}{2}$$

D'altra banda, qualsevol triangle sempre es pot descompondre en dos triangles rectangles. Per aconseguir-ho, n'hi ha prou que tracem qualsevol de les tres altures:



Pel que fa referència a la semblança, el fet que els triangles rectangles tinguin un angle conegut, també en simplifica els criteris. Recordem-los:

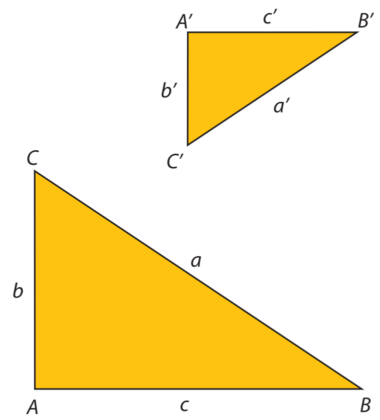


- Dos triangles rectangles són semblants si tenen igual un dels angles aguts.

  Els triangles rectangles *ABC* i *A'BC'* de la figura tenen un angle agut igual, l'angle $\hat{B}$, que és comú als dos triangles. A més, pel fet de ser rectangles, tenen tots dos un angle recte: $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$. Per tant, l'altre angle també és igual: $\hat{C} = \hat{C}'$.

  Els dos triangles rectangles són semblants, ja que tenen els tres angles iguals.

- Dos triangles rectangles són semblants si tenen dos parells de costats proporcionals.



Imaginem que els dos triangles rectangles de la figura tenen els dos catets proporcionals:

$$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k \;\rightarrow\;$$ en què k és la raó de semblança entre els dos triangles.

De la qual cosa es dedueix que $b = kb'$ i $c = kc'$.

Vegem que aquesta proporcionalitat també es manté en considerar les hipotenuses, és a dir, també es compleix que $\frac{a}{a'}=k$, d'on podem escriure $a = ka'$.

En efecte, d'acord amb el teorema de Pitàgores, podem escriure:

$$a=\sqrt{b^2+c^2} \;\text{ i }\; a'=\sqrt{b'^2+c'^2}$$

Per tant:

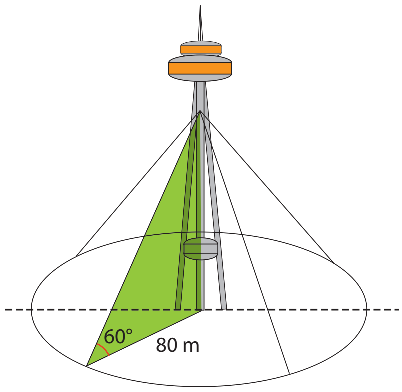
$$\frac{a}{a'}=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b'^2+c'^2}}$$

Ara bé, si tenim en compte que $b = kb'$ i $c = kc'$, es compleix:

$$\frac{a}{a'}=\frac{\sqrt{k^2b'^2+k^2c'^2}}{\sqrt{b'^2+c'^2}}=\frac{\sqrt{k^2\left(b'^2+c'^2\right)}}{\sqrt{b'^2+c'^2}}=\frac{\sqrt{k^2}\sqrt{b'^2+c'^2}}{\sqrt{b'^2+c'^2}}=\sqrt{k^2}=k$$

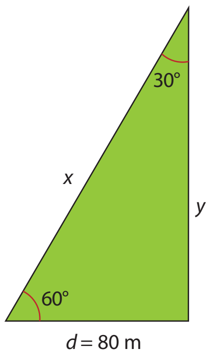
En definitiva, els dos triangles rectangles tenen els tres costats proporcionals i, en conseqüència, són semblants.

Analitzem-ne un cas concret:



Una torre de comunicacions és subjectada per quatre cables. Cadascun dels cables forma amb el terra un angle de 60°, i la distància entre el punt de subjecció al terra i el peu de la torre és de 80 m. Quina és la longitud de cada cable? Si els cables surten de la torre a una distància respecte del terra igual a les dues terceres parts de l'altura de la torre, quant mesura aquesta altura?

Ja saps, de cursos anteriors, que localitzar triangles rectangles en una figura ens pot ajudar a resoldre força problemes geomètrics. En la figura hem assenyalat un triangle rectangle. Fixa't que, com aquest, n'hi ha tres més. El dibuixem fora del seu context real:

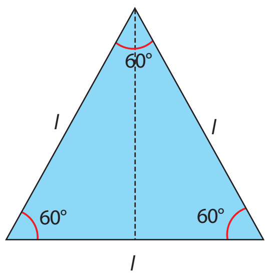


Observa que coneixem la mesura dels seus tres angles, 60°, 30° i 90°, i la d'un dels catets, 80 m. Desconeixem la longitud de l'altre catet, que representem per y, i la de la hipotenusa, que representem per x.

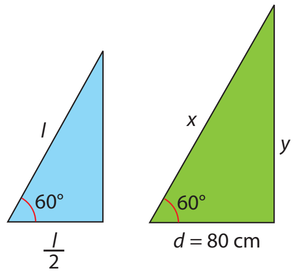
El problema ens demana la longitud del cable, per tant, si som capaços de determinar x, ja en tenim la solució.

D'entrada, l'aplicació del teorema de Pitàgores al triangle rectangle no ens permet calcular x, ja que planteja una equació amb dues incògnites:

$$(80\text{ m})^2+y^2=x^2$$



I la semblança? Es tractaria de buscar un triangle rectangle semblant al de la figura, del qual poguéssim conèixer els costats o, si més no, la raó existent entre aquests costats. La solució la podem trobar si considerem un triangle equilàter i tracem una qualsevol de les seves altures: es descompon en dos triangles rectangles iguals, cadascun dels quals és semblant al triangle rectangle anterior, ja que els angles aguts d'aquests triangles mesuren el mateix: 60° i 30°.



Observa que en els dos triangles rectangles semblants de la figura podem establir la proporcionalitat següent:

$$\frac{x}{l}=\frac{d}{\frac{l}{2}}\rightarrow\frac{x}{l}=\frac{2d}{l}$$

Si hi aïllem x, tenim:

$$x=\frac{2dl}{l}=2d=2\cdot 80\text{ m}=160\text{ m}$$

Cadascun dels cables de la torre mesura 160 m.

Fixa't que el resultat que hem obtingut és independent de la longitud l del triangle equilàter que hem utilitzat com a element auxiliar per resoldre el problema.

Ara ens falta trobar l'altura de la torre. Observa que ja estem en condicions de trobar y aplicant el teorema de Pitàgores.

$$(160\text{ m})^2=(80\text{ m})^2+y^2\rightarrow y=\sqrt{(160\text{ m})^2-(80\text{ m})^2}=\sqrt{25\ 600\text{ m}^2-6\ 400\text{ m}^2}=$$

$$=\sqrt{19\ 200\text{ m}^2}\approx 138{,}56\text{ m}$$

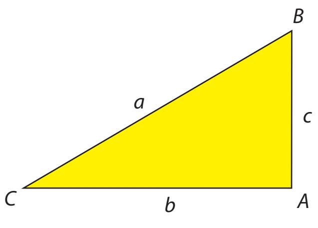
Si $y=\frac{2}{3}h\rightarrow h=\frac{3}{2}y\approx\frac{3}{2}\cdot 138{,}56\text{ m}=207{,}84\text{ m}$

L'altura de la torre és de 207,84 m aproximadament.

Observa que hem expressat els resultats arrodonint a les dues primeres xifres decimals.

Resolució de triangles rectangles

Resoldre un triangle rectangle significa determinar-ne la mesura dels costats i dels angles.



Perquè això sigui possible, cal conèixer les dades mínimes que determinen el triangle, és a dir, que permeten fer-ne el dibuix. A més, hem de tenir en compte les dues eines bàsiques que, en el cas dels triangles rectangles, tenim a la nostra disposició: la relació entre els costats del triangle i la relació entre els seus angles aguts.

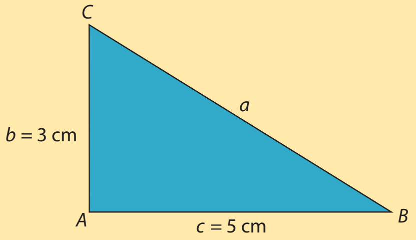
Recordem quines són les dades mínimes necessàries perquè un triangle rectangle quedi perfectament determinat.

- Un triangle rectangle queda determinat si en coneixem dos dels costats.
- Un triangle rectangle queda determinat si en coneixem un costat i un angle agut.

Tingues sempre a mà dos instruments de mesura: el regle i el transportador d'angles.

activitats resoltes

1. **Els catets d'un triangle rectangle mesuren 3 cm i 5 cm. Determina'n la longitud de la hipotenusa i la mesura dels angles aguts.**



Ara veurem com un triangle rectangle queda determinat si en coneixem dos dels seus costats.

Primer, dibuixem el triangle i anomenem els seus elements. Podem determinar-ne la longitud aproximada de la hipotenusa per mesura directa, però també podem calcular-la exactament per mesura indirecta, aplicant el teorema de Pitàgores:

$$a = \sqrt{(3\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2} = \sqrt{9\text{ cm}^2 + 25\text{ cm}^2} = \sqrt{34\text{ cm}^2} = \sqrt{34}\text{ cm}$$

Si aproximem el resultat a les centèsimes, obtenim:

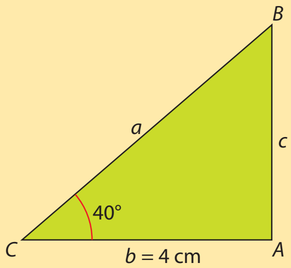
$$a \approx 5{,}83\text{ cm.}$$

Amb l'ajut del transportador, podem mesurar de manera aproximada un dels dos angles aguts del triangle, per exemple, l'angle $\hat{B}$.

S'obté $\hat{B} \approx 31°$ i, per tant, $\hat{C} = 90° - \hat{B} \rightarrow \hat{C} \approx 59°$.

Podem conèixer amb exactitud la mesura de la hipotenusa del triangle rectangle, però ens hem de conformar amb valors aproximats per a les mesures dels angles aguts $\hat{B}$ i $\hat{C}$.

2. **Un dels angles aguts d'un triangle rectangle mesura 40° i el costat contigu a aquest angle, 4 cm. Resol el triangle.**



En aquest exemple veurem com un triangle rectangle queda determinat si en coneixem un costat i un angle agut.

Dibuixem el triangle rectangle. Es verifica que:

$$\hat{B} = 90° - \hat{C} = 90° - 40° = 50°.$$

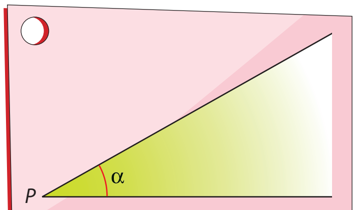
Amb el regle podem conèixer les longituds aproximades del catet c i la hipotenusa a. S'obté: $c \approx 3{,}4$ cm i $a \approx 5{,}3$ cm.

En aquest cas, podem conèixer amb exactitud l'altre angle agut, però ens trobem limitats pel que fa a les longituds dels costats c i a.

2. Relació entre angles i costats: la trigonometria. Raons trigonomètriques d'un angle agut

En el moment en què es relacionen mesures d'angles amb longituds de costats, s'entra en l'estudi de la **trigonometria**. La paraula *trigonometria* significa textualment "mesura de triangles". Es tracta de relacionar i fer càlculs amb les mesures dels costats i els angles d'un triangle rectangle, de manera que sigui possible resoldre qualsevol d'aquests triangles i, per extensió, qualsevol altre tipus de triangle.

Donat un triangle rectangle i fixat un dels seus angles aguts α, establim per a aquest angle tres raons entre les longituds dels seus costats i la mesura d'aquest angle. Cadascuna d'aquesta raons es coneix amb el nom de **raó trigonomètrica** de l'angle α.

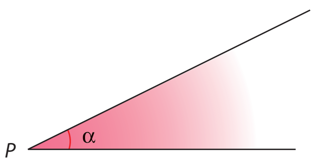


Els angles se solen anomenar per la lletra del vèrtex amb el símbol corresponent ($\hat{A}, \hat{B}$...), o també utilitzant lletres de l'alfabet grec: α, β, γ, δ, ε...

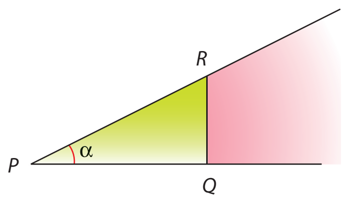
En la figura, $\hat{P} = \alpha$.

Sinus d'un angle agut

Dibuixem un angle agut de vèrtex el punt P i l'anomenem α.



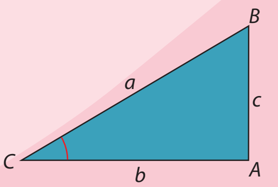
Podem dibuixar un triangle rectangle un dels angles aguts del qual sigui igual a l'angle α. Ho podem fer considerant un punt R en un dels dos costats de l'angle i traçant, a partir d'aquest punt, una perpendicular a l'altre costat.



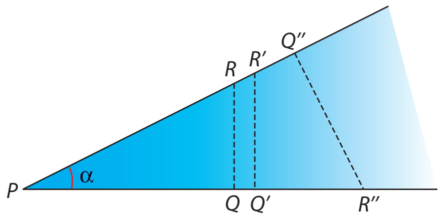
Anomenem **sinus de l'angle** α, i escrivim **sin** α, la raó existent entre la longitud del catet oposat a l'angle i la longitud de la hipotenusa.

$$\sin\alpha = \frac{QR}{PR}$$

Cal plantejar-se si el valor de sin α depèn o no depèn del triangle rectangle que hàgim dibuixat. Vegem-ho:



$AB = c \rightarrow$ catet oposat a l'angle $\hat{C}$.
$AC = b \rightarrow$ catet contigu o adjacent a l'angle $\hat{C}$.



En la figura hem dibuixat tres triangles rectangles que tenen un angle agut comú: l'angle α. Es tracta, per tant, de tres triangles rectangles semblants.

Si apliquem la definició de sinus de l'angle α a cadascun dels triangles rectangles, tenim:

$$\text{Triangle } QRP \rightarrow \sin\alpha = \frac{QR}{PR}$$

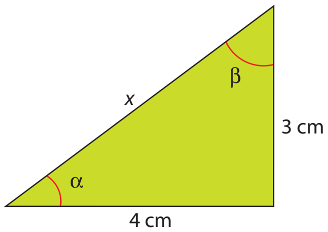
$$\text{Triangle } Q'R'P \rightarrow \sin\alpha = \frac{Q'R'}{PR'}$$

$$\text{Triangle } Q''R''P \rightarrow \sin\alpha = \frac{Q''R''}{PR''}$$

Però, atès que els tres triangles són semblants, es verifica que:

$$\frac{QR}{PR} = \frac{Q'R'}{PR'} = \frac{Q''R''}{PR''}$$

En definitiva, doncs, el valor de sin α és independent del triangle rectangle que es dibuixi. Dit d'una altra manera, en tots els triangles rectangles que tenen igual un angle agut, la raó existent entre el catet oposat a aquest angle i la hipotenusa és sempre la mateixa.



Observa com, donat el triangle rectangle de l'esquerra, podem calcular-ne el valor de sin α i el de sin β.

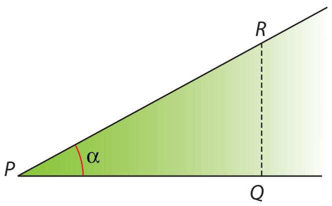
Calculem primer la longitud *x* de la hipotenusa del triangle i hi apliquem després la definició de la raó trigonomètrica sinus a cadascun dels dos angles aguts:

$$x = \sqrt{(3\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2} = \sqrt{9\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2} = \sqrt{25\text{ cm}^2} = 5\text{ cm}$$

Aleshores, $\sin\alpha = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{3}{5}$ i $\sin\beta = \frac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{4}{5}$.

Cosinus d'un angle agut

Procedim com en el cas anterior i construïm un triangle rectangle que té un angle agut que anomenem α.



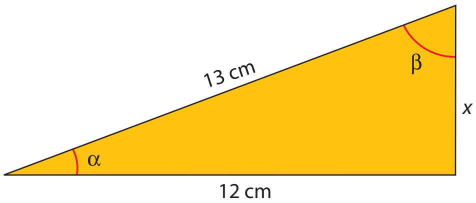
Anomenem **cosinus de l'angle** α, i escrivim **cos** α, la raó entre la longitud del catet contigu a l'angle i la longitud de la hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{QP}{PR}$$

El valor de cos α depèn del triangle rectangle que es dibuixi? Segueix un raonament similar al que hem utilitzat en el cas de la raó trigonomètrica sinus, i podràs demostrar que no.

Per tant, en tots els triangles rectangles que tenen igual un angle agut, la raó que existeix entre el catet contigu a l'angle i la hipotenusa és sempre la mateixa.

Observa com determinem cos α i cos β en el triangle rectangle següent.



Si hi apliquem directament la definició de cosinus d'un angle, podem determinar-ne el valor del cosinus de l'angle α:

$$\cos \alpha = \frac{12\text{ cm}}{13\text{ cm}} = \frac{12}{13}$$

Per calcular cos β, cal conèixer el valor de *x*. El trobem aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle:

$$x = \sqrt{(13\text{ cm})^2 - (12\text{ cm})^2} = \sqrt{169\text{ cm}^2 - 144\text{ cm}^2} = \sqrt{25\text{ cm}^2} = 5\text{ cm}$$

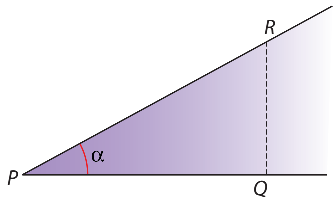
Per tant, $\cos \beta = \frac{5\text{ cm}}{13\text{ cm}} = \frac{5}{13}$

Tangent d'un angle agut

El sinus i el cosinus d'un angle agut relacionen els catets d'un triangle rectangle amb la hipotenusa. Sembla lògic definir una nova raó trigonomètrica que relacioni els dos catets entre ells. Aquesta raó s'anomena **tangent** de l'angle.

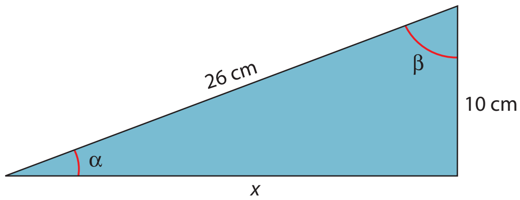
La **tangent de l'angle** α, abreujadament **tg α,** és la raó entre la longitud del catet oposat a l'angle i la longitud del catet contigu.

$$\text{tg } \alpha = \frac{QR}{QP}$$



Tal com passa en el cas del sinus i del cosinus, el valor de tg α no depèn del triangle rectangle que hàgim dibuixat. Es pot afirmar, doncs, que en tots els triangles rectangles que tenen un angle agut igual, la raó entre el catet oposat i el catet contigu a aquest angle és sempre la mateixa.

Fixa't com trobem tg α i tg β en el triangle rectangle de la figura.



Determinem primer el valor de *x*, aplicant el teorema de Pitàgores:

$$x = \sqrt{(26\text{ cm})^2 - (10\text{ cm})^2} = \sqrt{676\text{ cm}^2 - 100\text{ cm}^2} = \sqrt{576\text{ cm}^2} = 24\text{ cm}$$

Si apliquem la definició de tangent d'un angle, tenim:

$$\text{tg } \alpha = \frac{10\text{ cm}}{24\text{ cm}} = \frac{5}{12} \quad \text{i tg } \beta = \frac{24\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \frac{12}{5}$$

És important que tinguis en compte les consideracions següents:

- Les raons trigonomètriques d'un angle són adimensionals, és a dir, no tenen unitats. Cal, doncs, que, en calcular-les, t'asseguris primer que totes les longituds dels costats del triangle rectangle s'expressin en la mateixa unitat.
- El sinus i el cosinus d'un angle agut són sempre nombres reals positius més petits que 1.

$$\sin \alpha = \frac{b}{a} < 1, \text{ perquè } b < a$$

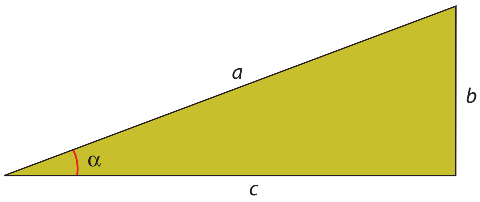
$$\cos \alpha = \frac{c}{a} < 1, \text{ perquè } c < a$$

- La tangent d'un angle agut és un nombre que pot prendre qualsevol valor real positiu.

  Fixa't en el triangle rectangle de la figura i, tenint en compte que tg $= \frac{b}{c}$, observa que:

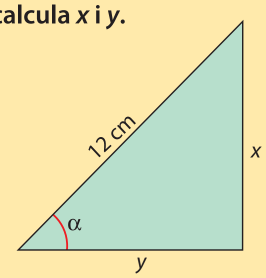
  – Per a un valor petit de l'angle α, proper a 0°, tg α també és un nombre petit, proper a 0.

  – Per a un valor gran de l'angle α, proper a 90°, tg α també és un nombre gran.



activitats resoltes

3. Si $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, calcula x i y.



En el triangle rectangle de la figura es verifica:

$$\sin \alpha = \frac{x}{12 \text{ cm}}$$

D'altra banda, sabem que $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Com que ens referim al mateix angle α, podem escriure la igualtat següent:

$$\frac{x}{12 \text{ cm}} = \frac{2}{3}$$

Resolem l'equació:

$$3x = 24 \text{ cm} \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

El catet x mesura 8 cm.

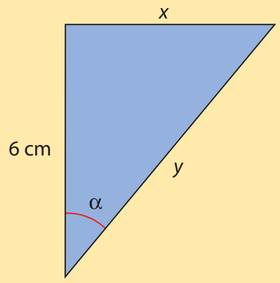
Per trobar el valor de y, apliquem el teorema de Pitàgores:

$$y = \sqrt{(12 \text{ cm})^2 - (8 \text{ cm})^2} = \sqrt{144 \text{ cm}^2 - 64 \text{ cm}^2}$$

$$= \sqrt{80 \text{ cm}^2} = \sqrt{2^4 \cdot 5 \text{ cm}^2} = 2^2\sqrt{5} \text{ cm} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

El catet y mesura $4\sqrt{5}$ cm, és a dir, 8,94 cm aproximadament.

4. Si $\cos \alpha = 0{,}75$, calcula x i y.



En el triangle rectangle de la figura es verifica:

$$\cos \alpha = \frac{6 \text{ cm}}{y}.$$

D'altra banda, l'enunciat ens indica que $\cos \alpha = 0{,}75$.

Per tant, $\frac{6 \text{ cm}}{y} = 0{,}75 \rightarrow y = \frac{6 \text{ cm}}{0{,}75} = 8 \text{ cm}$.

La hipotenusa y mesura 8 cm.

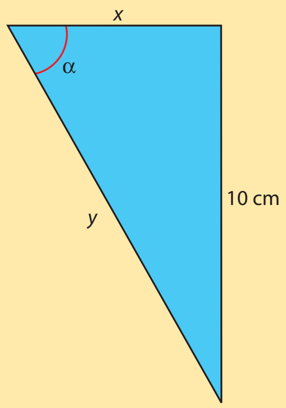
Apliquem el teorema de Pitàgores per calcular x:

$$x = \sqrt{(8 \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2} = \sqrt{64 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2} =$$

$$= \sqrt{28 \text{ cm}^2} = \sqrt{2^2 \cdot 7 \text{ cm}^2} = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

El catet x mesura $2\sqrt{7}$ cm, és a dir, 5,29 cm aproximadament.

5. **Si $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$, calcula x i y.**



En el triangle rectangle dibuixat es verifica que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{x}$$

Per tant, es compleix:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{x} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$$

En conseqüència:

$$\frac{10}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$$

El catet x mesura 6 cm.

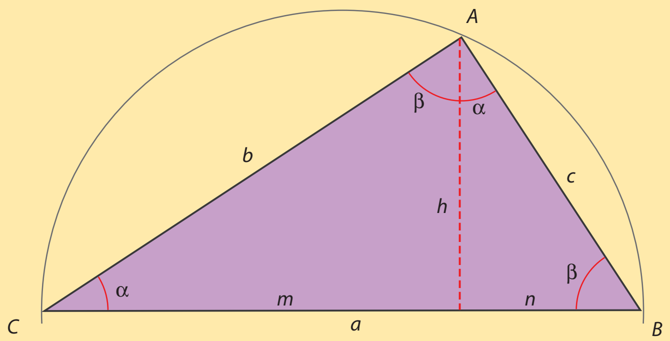
El valor de y el calculem aplicant el teorema de Pitàgores:

$$y = \sqrt{(10\text{ cm})^2 + (6\text{ cm})^2} = \sqrt{100\text{ cm}^2 + 36\text{ cm}^2} =$$

$$= \sqrt{136\text{ cm}^2} = \sqrt{2^3 \cdot 17\text{ cm}^2} = 2\sqrt{34}\text{ cm}$$

La hipotenusa y mesura $2\sqrt{34}$ cm, és a dir, 11,66 cm aproximadament.

6. **Utilitza la trigonometria per demostrar el teorema del catet i el teorema de l'altura.**



El triangle ABC de la figura és rectangle: l'angle $\hat{A}$ mesura 90°, ja que es tracta d'un angle inscrit en una circumferència que abraça un arc de 180°.

Si tracem l'altura h corresponent a la hipotenusa, el triangle rectangle ABC es descompon en dos triangles que també són rectangles. D'altra banda, aquesta altura divideix la hipotenusa a del triangle rectangle ABC en dos segments que anomenem m i n.

Observa que en la figura es poden diferenciar tres triangles rectangles que, pel fet de tenir els dos angles aguts α i β iguals, són semblants dos a dos. Per distingir aquests tres triangles, els anomenarem gran, mitjà i petit.

Fixa't que es compleix:

– Triangle rectangle mitjà $\rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{m}$.

– Triangle rectangle petit $\rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{h}$.

Per tant $\quad \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \rightarrow h^2 = mn.$

Aquesta expressió correspon al teorema de l'altura. Recorda que, en qualsevol triangle rectangle, l'altura h relativa a la hipotenusa és la mitjana proporcional entre els dos segments m i n en què la descompon, que són les dues projeccions ortogonals dels catets sobre la hipotenusa.

D'altra banda:

– Triangle rectangle mitjà $\rightarrow \cos\alpha = \frac{m}{b}$.

– Triangle rectangle gran $\rightarrow \cos\alpha = \frac{b}{a}$.

Aleshores $\quad \frac{m}{b} = \frac{b}{a} \rightarrow b^2 = am.$

De la mateixa manera:

– Triangle rectangle petit $\rightarrow \cos\beta = \frac{n}{c}$.

– Triangle rectangle gran $\rightarrow \cos\beta = \frac{c}{a}$.

És a dir:

$$\frac{n}{c} = \frac{c}{a} \rightarrow c^2 = an.$$

Les expressions $b^2 = am$ i $c^2 = an$ corresponen al teorema del catet. Recorda que, en qualsevol triangle rectangle, un catet és la mitjana proporcional entre la hipotenusa i la projecció ortogonal del catet sobre la hipotenusa.

3. Triangles rectangles amb angles aguts que mesuren 30°, 60° o 45°

En activitats resoltes anteriors hem comprovat que les mesures que es poden determinar per mètodes indirectes són exactes:

- Relació entre costats: $a^2 = b^2 + c^2$.
- Relació entre angles: $\hat{B} + \hat{C} = 90°$.

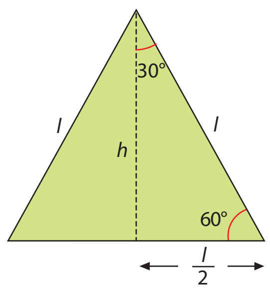
En canvi, les mesures que s'obtenen mesurant directament sobre el triangle dibuixat són aproximades. Incideixen en aquesta aproximació els errors que es cometen en dibuixar el triangle, els errors en fer la lectura de la seva mesura i les limitacions pròpies de qualsevol aparell de mesura.

Tanmateix, no hem de menystenir els resultats aproximats, ja que moltes vegades ens poden ser de gran utilitat per fer una primera valoració del problema que es planteja.

Si un dels angles aguts d'un triangle rectangle mesura 30°, 60° o 45°, podem resoldre el triangle sense necessitat de recórrer a cap instrument de mesura. Per aconseguir-ho, ens basarem en la semblança de triangles rectangles. Com sempre, el triangle haurà d'estar determinat, és a dir, ens caldrà conèixer-ne també un dels costats.

Si un dels angles aguts d'un triangle rectangle mesura 30°, l'altre angle agut mesura 60°.

Angles de 30° i 60°



Per a angles de 30° i 60°, prenem com a referència un triangle equilàter. Observa en la figura que es verifica:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}l}{2} \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Si tracem l'altura h d'un triangle equilàter de costat l qualsevol, obtenim dos triangles rectangles iguals, els angles aguts dels quals mesuren 30° i 60°.

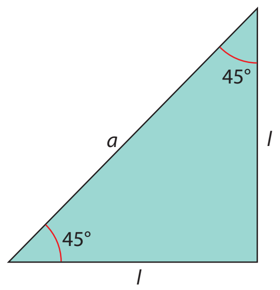
La hipotenusa de cadascun d'aquests triangles és l, i els catets són $\frac{l}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}l$.

Aquesta conclusió és important, ja que ens permet expressar les longituds dels tres costats de qualsevol triangle rectangle els angles aguts del qual mesurin 30° i 60° en funció de la longitud l de la hipotenusa.

Angle de 45°

Si un dels angles aguts d'un triangle rectangle mesura 45°, el triangle és isòsceles i es pot resoldre sense necessitat d'utilitzar, com en el cas anterior, cap altra figura auxiliar. En tenim prou amb el teorema de Pitàgores.

Observa la figura.



Si anomenem a la hipotenusa i l els dos catets del triangle rectangle i hi apliquem el teorema de Pitàgores obtenim:

$$a = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}\, l$$

Així, els catets de cadascun d'aquest triangle rectangle són l, i la hipotenusa és $\sqrt{2}\, l$.

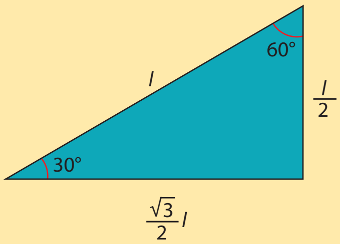
activitats resoltes

7. **Determina les raons trigonomètriques d'un angle de 30°, 60° i 45°. Ajuda't de dues de les figures de la dreta.**

Recuperem els angles de l'apartat anterior i hi apliquem les respectives definicions de sinus, cosinus i tangent d'un angle agut.

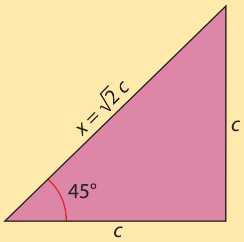
Angle de 30°

$$\sin 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}l}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{2l}{2\sqrt{3}l} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Angle de 60°

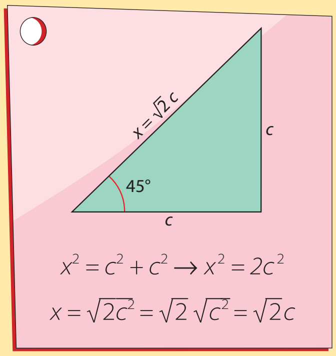
$$\sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}l}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{\frac{l}{2}} = \frac{2\sqrt{3}l}{2l} = \sqrt{3}$$



Angle de 45°

Procedim com en l'activitat anterior: apliquem la definició de sinus, cosinus i tangent d'un angle agut.

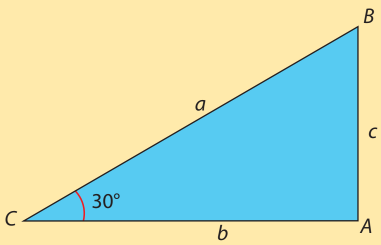
$$\sin 45° = \frac{c}{\sqrt{2}c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{c}{\sqrt{2}c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{tg } 45° = \frac{c}{c} = 1$$



Com pots comprovar, en els triangles rectangles que tenen un angle agut de 30°, 60° o 45°, es pot determinar el valor de la raó entre les longituds de dos qualssevol dels seus costats. Els resultats que s'obtenen depenen de l'angle que es considera, però no depenen de la mesura dels costats del triangle rectangle corresponent.

D'aquesta manera, per exemple, en qualsevol triangle rectangle que té un angle agut de 30°, es verifica que la longitud de la hipotenusa és el doble que la longitud del catet oposat a l'angle de 30°.

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = 2c$$



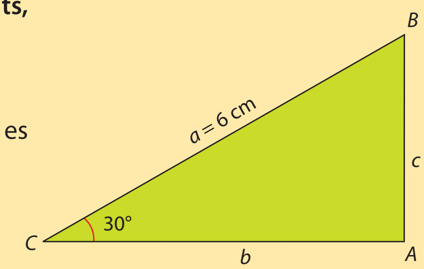
8. **La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 6 cm i un dels seus angles aguts, 30°. Resol el triangle.**

Evidentment, $\hat{B} = 90° - \hat{C} = 90° - 30° = 60°$.

D'altra banda, els dos triangles rectangles de la figura són semblants. Per tant, es verifica que :

$$\sin 30° = \frac{c}{6 \text{ cm}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{6 \text{ cm}} \rightarrow c = 3 \text{ cm}$$

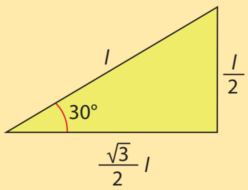
$$\cos 30° = \frac{b}{6 \text{ cm}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{6 \text{ cm}} \rightarrow 2b = 6\sqrt{3} \text{ cm} \rightarrow b = \frac{6\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

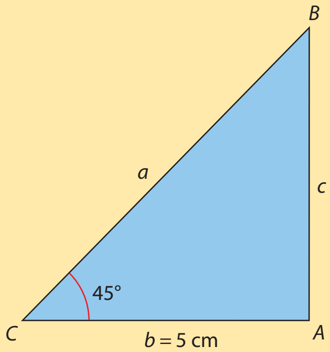


El catet c mesura 3 cm i el catet b, $3\sqrt{3}$ cm.

Si volem un valor aproximat per a la mesura del catet b, utilitzem la calculadora:

$$b = 3\sqrt{3} \text{ cm} \approx 5{,}20 \text{ cm}$$





9. **Un catet d'un triangle rectangle mesura 5 cm i un dels angles aguts, 45°. Resol el triangle.**

Es verifica: $\hat{B} = \hat{C} = 45°$ i $c = b = 5$ cm.

Només resta calcular-ne la hipotenusa a:

$$a = \sqrt{(5\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2} = \sqrt{25\text{ cm}^2 + 25\text{ cm}^2} = \sqrt{50\text{ cm}^2} = \sqrt{2 \cdot 5^2\text{ cm}^2} = 5\sqrt{2}\text{ cm}$$

També la podem trobar fàcilment, utilitzant el sinus de 45° o el cosinus de 45°. Observa:

$$\sin 45° = \frac{5\text{ cm}}{a} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\text{ cm}}{a} \rightarrow \sqrt{2}a = 10\text{ cm} \rightarrow a = \frac{10\text{ cm}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}\text{ cm}}{2} = 5\sqrt{2}\text{ cm}$$

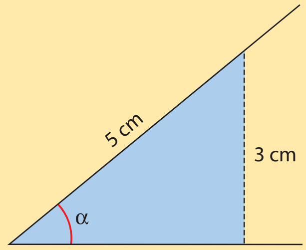
Si volem un valor aproximat per a la mesura de la hipotenusa a, utilitzem la calculadora:

$$a = 5\sqrt{2}\text{ cm} \approx 7{,}07\text{ cm}$$

10. **Dibuixa l'angle agut α tal que sin α = 0,6. Quant mesura aquest angle? Comprova-ho amb la calculadora.**

El problema queda resolt si dibuixem un triangle rectangle amb un angle agut α que verifiqui:

El quocient entre el catet oposat a l'angle i la hipotenusa sigui 0,6.



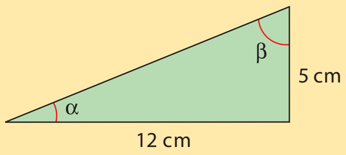
Així, per exemple, el catet oposat pot mesurar 6 unitats de longitud i la hipotenusa, 10, o bé, el catet oposat pot mesurar 3 unitats de longitud i la hipotenusa, 5.

Fixa't que es compleix:

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Un cop dibuixat el triangle la mesura de l'angle es pot mesurar directament en el dibuix.

La calculadora científica ens proporciona una bona aproximació de la mesura de l'angle α: $\alpha \approx 36{,}87°$.



11. **Quant mesuren els angles aguts del triangle rectangle de la figura?**

Per conèixer un dels angles del triangle rectangle, en tenim prou amb el valor d'una qualsevol de les seves raons trigonomètriques. Ens fixem, per exemple, en la tangent de l'angle α: $\text{tg } \alpha = \frac{5}{12}$.

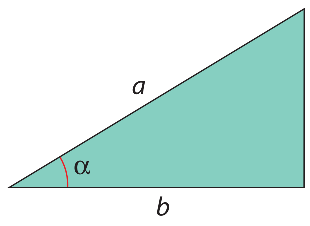
Si utilitzem la calculadora, obtenim: $\alpha \approx 22{,}62°$.

Per tant,

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 22{,}62° = 67{,}38°$$

Els dos angles aguts mesuren 22,62° i 67,38°, aproximadament.

4. Relació entre les raons trigonomètriques d'un mateix angle agut



Dibuixem un triangle rectangle qualsevol i ens fixem en un dels seus angles aguts, l'angle α.

Sabem que: $\sin\alpha = \dfrac{c}{a}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{a}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{c}{b}$

Observa que es verifica:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2+b^2}{a^2}$$

Ara bé, segons el teorema de Pitàgores, $c^2 + b^2 = a^2$, per tant:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{c^2+b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

En definitiva, per a qualsevol angle agut α es verifica: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i es coneix amb el nom d'**igualtat fonamental** de la trigonometria.

Habitualment, i per tal de simplificar-ne la notació, aquesta igualtat s'escriu: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

D'altra banda, en dividir l'expressió corresponent a sin α entre la que correspon a cos α, s'obté:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{c}{a} : \frac{b}{a} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

És a dir, qualsevol angle agut α verifica: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Amb aquestes dues igualtats que acabem de veure, si coneixem el valor d'una qualsevol de les tres raons trigonomètriques d'un angle agut, podem determinar-ne fàcilment el valor de les altres dues.

activitats resoltes

12. Si sin α = 0,8, calcula cos α i tg α.

Calculem primer cos α substituint en la fórmula fonamental sin α per 0,8:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; 0{,}8^2 + \cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; 0{,}64 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36 \;\rightarrow\; \cos\alpha = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6 = \frac{3}{5}$$

Si coneixem sin α i cos α, és senzill determinar el valor de tg α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}$$

Així: $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$

13. Sabent que tg α = 3, calcula sin α i cos α.

En aquest cas, necessitem treballar amb les dues igualtats alhora. En escriure-les i substituir-hi tg α per 3, s'obté el sistema de dues equacions amb dues incògnites:

$$\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3 \end{cases}$$

Resolem el sistema per substitució, aïllant sin α en la segona equació i substituint-ne l'expressió obtinguda en la primera:

$$\sin\alpha = 3\cos\alpha \;\rightarrow\; 9\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; 10\cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{10} \;\rightarrow\; \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Per tant, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ i $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

5. Resolució de triangles rectangles. Aplicació a la resolució de problemes

Reprenem altre cop el fil de la resolució de triangles rectangles.

La trigonometria ens proporciona les eines que ens mancaven a l'inici de la unitat per millorar aquesta resolució, sense necessitat d'estar sotmesos a les limitacions associades al procés d'haver de mesurar les magnituds desconegudes en cada cas. És clar que en situacions reals pot resultar difícil prendre mesures i, de vegades, pot ser fins i tot impossible.

Finalment, atès que tots els triangles es poden descompondre en triangles rectangles, també ens trobem en condicions d'ampliar el camp d'aplicació de la trigonometria a la resolució de qualsevol tipus de triangle.

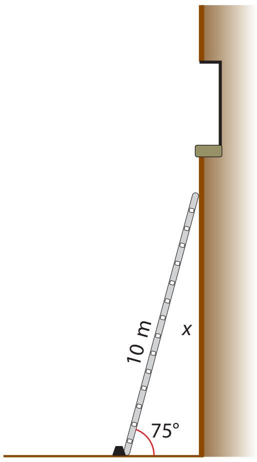
Tot seguit veurem com aplicar el que acabem d'aprendre per resoldre problemes matemàtics. En tots els casos el procediment de resolució que s'utilitza consta, essencialment, dels mateixos passos:

- Fer un esquema gràfic de la situació que planteja el problema.
- Buscar-hi triangles rectangles.
- Aplicar la trigonometria per resoldre aquests triangles.

Vegem-ho.

Una finestra es troba a 10 m del terra. Disposem d'una escala que també mesura 10 m de llargària. Si per motius de seguretat s'aconsella que l'escala formi amb l'horitzontal un angle màxim de 75°, a quina distància de la finestra arribarà l'escala?

Si dibuixem un esquema de la situació, és molt senzill identificar-hi el triangle rectangle que ens ha de permetre resoldre el problema.



Suposant que esgotem al màxim les condicions de seguretat, es tracta de calcular quina altura sobre la paret assoleix l'escala quan forma un angle de 75° amb l'horitzontal. En la figura, hem representat mitjançant la lletra *x* aquesta altura.

Amb quina raó trigonomètrica de l'angle cal treballar? Això depèn en cada cas de les dades del problema i del que s'hagi de calcular. Fixa't que, en aquest cas, convé treballar amb el sinus de l'angle de 75°, ja que coneixem la hipotenusa del triangle rectangle i ens interessa determinar-ne el catet oposat.

$$\sin 75° = \frac{x}{10\text{m}}$$

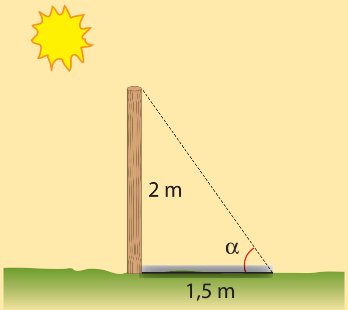
$$x = 10 \text{ m} \cdot \sin 75° \simeq 9{,}66 \text{ m}$$

Aproximant el resultat fins a les centèsimes, l'altura *x* és de 9,66 m.

Naturalment, si l'escala pot arribar fins a aquesta altura màxima, se situarà a uns 30 cm de la finestra.

activitats resoltes

14. Quin angle formen els raigs del sol amb l'horitzontal en el moment en què un pal de 2 m, col·locat en posició vertical, projecta una ombra d'1,5 m?

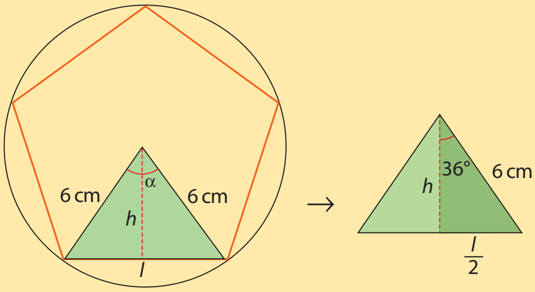


Un cop s'ha identificat el triangle rectangle, es tracta de calcular la mesura de l'angle α de la figura. Observa que les dades del problema ens permeten conèixer-ne directament la tangent:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{2\text{ m}}{1{,}5\text{ m}} = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha \approx 53,13°$$

En el moment considerat, els raigs del sol formen amb l'horitzontal un angle de poc més de 53°.

15. Calcula l'àrea d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de 6 cm de radi.



Fixa't que el pentàgon es pot descompondre en cinc triangles iguals al triangle que hem ombrejat en la figura. Per tant, si som capaços de calcular l'àrea d'aquest triangle, tenim el problema resolt.

Com pots comprovar, es tracta d'un triangle isòsceles en què l'angle α mesura:

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$$

L'altura *h* divideix aquest triangle isòsceles en dos triangles rectangles iguals. Si considerem un qualsevol d'aquests triangles rectangles, es verifica que:

$$\sin 36° = \frac{\frac{l}{2}}{6\text{ cm}} \rightarrow \sin 36° = \frac{l}{12\text{cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow l = 12\text{ cm} \cdot \sin 36° \approx 7{,}05\text{ cm}$$

$$\cos 36° = \frac{h}{6\text{ cm}} \rightarrow h = 6\text{ cm} \cdot \cos 36° \approx 4{,}85\text{ cm}$$

La longitud *l* mesura aproximadament 7,05 cm i *h* mesura aproximadament 4,85 cm.

Per tant, l'àrea del triangle isòsceles és:

$$A_t = \frac{lh}{2} \approx \frac{7{,}05\text{ cm} \cdot 4{,}85\text{ cm}}{2} = 17{,}10\text{ cm}^2$$

Fixa't que és més precís calcular:

$$A_t = \frac{lh}{2} \approx \frac{12\text{ cm} \cdot \sin 36° \cdot 6\text{ cm} \cdot \cos 36°}{2} \approx 17{,}12\text{ cm}^2$$

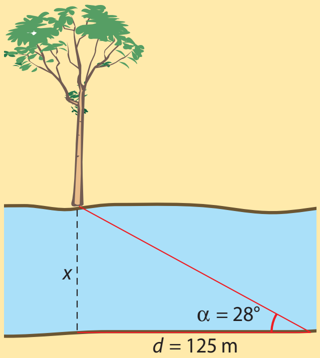
L'àrea del triangle isòsceles mesura 17,12 cm² aproximadament.

I l'àrea del pentàgon regular serà:

$$A_p = 5 \cdot A_t \approx 5 \cdot 17{,}12\text{ cm}^2 = 85{,}60\text{ cm}^2$$

L'àrea del pentàgon regular mesura 85,60 cm², aproximadament.

16. Volem determinar l'amplària d'un riu i disposem d'un teodolit i d'una cinta mètrica. Com ho podem fer?



Ja saps que un teodolit és un instrument de precisió que serveix per mesurar angles que estiguin situats tant en un pla vertical com en un pla horitzontal.

Ens situem en una de les dues ribes del riu i procurem col·locar-nos davant d'algun objecte ben visible que es trobi situat a l'altra riba, per exemple, un arbre. Ens desplacem per la riba en un dels dos sentits possibles una distància *d*, que podem mesurar amb la cinta mètrica i, tot seguit, mesurem amb el teodolit l'angle α que formen.

Suposa't que en una experiència concreta s'obtenen aquestes dades:

$d = 125$ m i $\alpha = 28°$. Quina és l'amplària del riu?

Si observes el triangle rectangle que hem dibuixat en la figura, t'adonaràs que per determinar l'amplària *x* del riu ens interessa treballar amb la tangent de l'angle α.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{x}{d} \rightarrow \text{tg}\,28° = \frac{x}{125\text{ m}} \rightarrow$$

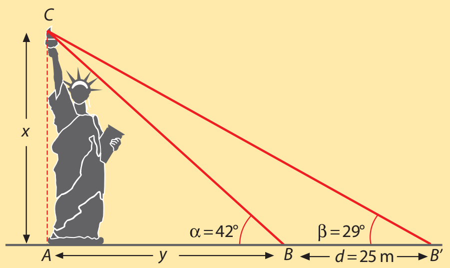
$$\rightarrow x = 125\text{ m} \cdot \text{tg}\,28° \approx 66{,}46\text{ m}$$

L'amplària del riu és de 66,46 m, aproximadament.

Cal dir que aquest procediment pot resultar força imprecís. Fonamentalment, el problema és situar-se enfront de l'objecte escollit de l'altra riba. En general, com més ample és el riu, més gran és l'error que es pot cometre.

L'aproximació es pot millorar si fem que la distància *d* mesurada sobre la riba on ens situem sigui força més gran que l'amplària del riu que volem determinar.

17. Es tracta de determinar l'alçària d'una estàtua el peu de la qual no és accessible. Com en el cas del riu, es disposa d'una cinta mètrica i d'un teodolit.



Ens situem davant de l'estàtua i mesurem l'angle que forma amb l'horitzontal la visual dirigida al seu punt més alt: l'angle α de la figura.

Tot seguit, procurant mantenir l'alineació amb l'estàtua i el punt en què ens situem inicialment, reculem una distància *d*, que mesurem, i repetim l'operació de mesurar l'angle sota el qual es veu l'estàtua des d'aquest darrer punt: l'angle β de la figura.

Si en una experiència concreta s'ha mesurat: $\alpha = 42°$, $\beta = 29°$ i $d = 25$ m, quina és l'alçària de l'estàtua?

Cal observar amb atenció la figura i buscar-hi triangles rectangles. Pots comprovar que són rectangles els triangles *ABC* i *AB'C*. De cadascun d'aquests triangles, només coneixem un dels seus angles aguts. Aquesta circumstància ens obliga a treballar simultàniament amb els dos triangles, utilitzant, en principi, les raons trigonomètriques en què intervingui l'alçària *x* que hem de calcular. Atès que *x* és el catet oposat als angles α i β, podem descartar d'entrada la raó cosinus i analitzar què succeeix amb cadascuna de les altres dues raons trigonomètriques:

$$\sin 42° = \frac{x}{CB} \qquad \text{tg } 42° = \frac{x}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\sin 29° = \frac{x}{CB'} \qquad \text{tg } 29° = \frac{x}{AB'} = \frac{x}{AB + BB'} = \frac{x}{y + 25}$$

Fixa't que, si utilitzem la raó sinus, obtenim un sistema constituït per dues equacions amb tres incògnites: *x*, *CB* i *CB'*. En canvi, amb la raó tangent, el sistema és format per dues equacions amb dues incògnites: *x* i *AB*; per tant, sabem com resoldre'l. Ho podem fer aplicant-hi el mètode d'igualació:

$$\begin{cases} \text{tg } 42° = \dfrac{x}{y} \\ \text{tg } 29° = \dfrac{x}{y+25} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \text{ tg } 42° \\ x = (y + 25) \text{ tg } 29° \end{cases}$$

$$y \text{ tg } 42° = (y + 25) \text{ tg } 29° \rightarrow y \text{ tg } 42° = y \text{ tg } 29° + 25 \text{ tg } 29° \rightarrow$$
$$\rightarrow y \text{ tg } 42° - y \text{ tg } 29° = 25 \text{ tg } 29°$$

$$y\,(\text{tg } 42° - \text{tg } 29°) = 25 \text{ tg } 29° \rightarrow y = \frac{25 \text{ tg } 29°}{\text{tg } 42° - \text{tg } 29°} = 40{,}04$$

La distància *y* és de 40,04 m aproximadament.

Llavors, $x = y \text{ tg } 42° \rightarrow y \approx 36{,}05$.

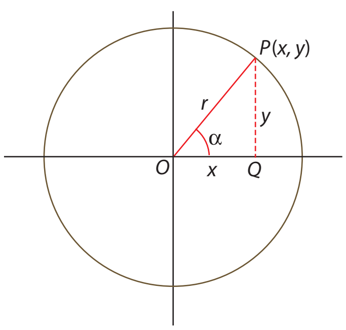
L'estàtua mesura al voltant de 36,05 m d'alçària.

Observa que, en el procés de resolució del sistema, no hem substituït fins al final el valor de tg 42°, ni el de tg 29°. A banda de resultar més còmode, ens permet obtenir una millor aproximació en el resultat.

6. Determinació de les raons trigonomètriques d'un angle del segon quadrant

Per resoldre triangles rectangles hem utilitzat les raons trigonomètriques d'un angle agut d'un triangle rectangle. En aquest apartat, veurem com definir les raons trigonomètriques d'un angle α, tal que $180° < \alpha < 0°$.

Situem uns eixos de coordenades cartesianes amb l'origen en el centre d'una circumferència de radi *r*.



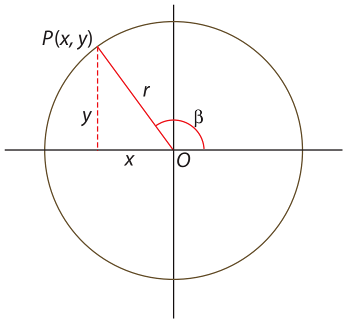
- Considerem un punt *P* de la circumferència del **primer quadrant** de coordenades *P*(*x*,*y*) i unim aquest punt amb el centre de la circumferència.

  Fixa't en el triangle rectangle *OPQ*, en l'angle agut α; podem observar que els catets verifiquen $PQ = y$, $OQ = x$, i la hipotenusa $OP = r > 0$.

  Així, les raons trigonomètriques de l'angle α són:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r} \qquad \text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$$

Observa que, fins ara no hem vist res de nou, ja que l'angle α és un angle agut d'un triangle rectangle.



- Si situem el punt P de la circumferència en el segon quadrant, l'angle $90° < \beta < 180°$. També podem definir les seves raons trigonomètriques, i ampliar així la definició anterior per a l'angle agut α.

  D'aquesta manera:

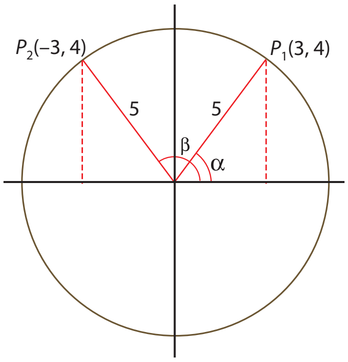
  $$\sin\beta = \frac{y}{r} \qquad \cos\beta = \frac{x}{r} \qquad \text{tg}\,\beta = \frac{y}{x}$$

  Atès que l'abscissa x del punt P és negativa, $x < 0$, llavors:

  $$\cos\beta < 0 \quad \text{i} \quad \text{tg}\,\beta < 0$$

  Observa que l'angle β es mesura a partir del semieix OX en el sentit positiu de la mesura d'angles.

  Dibuixem una circumferència de 5 unitats de longitud de radi i hi tracem uns eixos de coordenades cartesianes. Hi situem els punts $P_1(3,4)$ i $P_2(-3,4)$.



Observa

$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\sin\beta = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{-3}{5} \qquad \text{tg}\,\beta = \frac{-4}{3}$$

Si et fixes bé en la figura, veuràs que els angles α i β són suplementaris, és a dir, que $\alpha + \beta = 180°$.

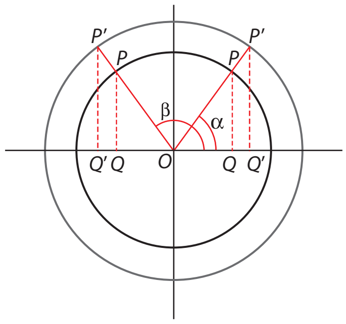
També podem afirmar que:

$$\sin\alpha = \sin\beta \qquad \cos\alpha = -\cos\beta \quad \text{i} \quad \text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,\beta$$

En un angle del segon quadrant hi ha raons trigonomètriques negatives. Això no succeeix si els angles són aguts, és a dir, del primer quadrant.

Observa que les raons trigonomètriques definides no depenen del radi de la circumferència en què les hem situades.

Dibuixem dues circumferències concèntriques i marquem els angles α i β en el primer i el segon quadrant, respectivament.



Fixa't que els triangles OPQ i $OP'Q'$ són semblants, ja que estan en posició de Tales. Els seus costats són proporcionals, per tant, podem escriure que:

$$\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'} \qquad \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'} \qquad \frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$$

D'altra banda:

$\sin\alpha = \dfrac{PQ}{OP}$, en considerar el triangle OPQ i

$\sin\alpha = \dfrac{P'Q'}{OP'}$, en considerar el triangle $QP'Q'$.

Aquestes dues expressions són iguals, per tant $\sin\alpha$ no depèn del radi de la circumferència que hàgim dibuixat.

El mateix succeeix per a les altres raons trigonomètriques.

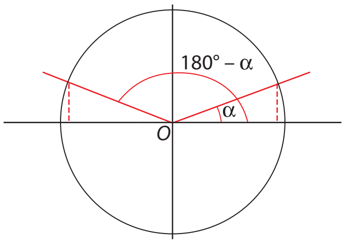
Aquesta conclusió ens permet representar les raons trigonomètriques dels angles en una circumferència de radi una unitat de longitud.

Així, si $r = 1$, llavors: $\quad \sin\alpha = \dfrac{y}{r} \rightarrow \sin\alpha = y \quad$ i $\quad \cos\alpha = \dfrac{x}{r} \rightarrow \sin\alpha = x$

En definitiva, l'ordenada del punt *P* és sin α i l'abscissa del punt *P* és el cos α.

De manera semblant, es poden representar les raons trigonomètriques d'angles del segon quadrant.

Reducció al primer quadrant



Les raons trigonomètriques de qualsevol angle del segon quadrant es relacionen amb les d'un altre del primer quadrant.

Si α és un angle del primer quadrant, 180° – α és un angle del segon quadrant.

Fixa't en la figura. Es pot apreciar que es formen dos triangles rectangles iguals, en els quals pots observar les relacions següents:

$$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) \qquad \cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$$

La relació entre les tangents es pot obtenir com el quocient entre els dos membres d'aquestes igualtats:

$$\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,(180° - \alpha)$$

activitats resoltes

18. Troba les raons trigonomètriques d'un angle de 150°.

Atès que l'angle suplementari de 150° és 30°, podem esbrinar les raons trigonomètriques d'un angle de 150° conegudes les raons d'un angle de 30°.

Sinus: $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$

Cosinus: $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tangent: $\text{tg}\,150° = -\text{tg}\,30° - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

19. Utilitza la calculadora per esbrinar quin angle β del segon quadrant verifica que:

a) **sin β = 0,6** ***b)*** **cos β = –0,91**

a) Sabem que hi ha un angle α del primer quadrant tal que sin α = 0,6. Podem determinar α utilitzant la calculadora. Observa que aquesta fa automàticament la reducció al primer quadrant. Així, ens dóna α ≈ 36,87°.

L'angle del segon quadrant β que té un sinus de 0,6 és el suplementari de α:

$$\beta = 180° - \alpha \approx 180° - 36{,}87° = 143{,}13°$$

b) En el cas del cosinus, la situació és diferent, atès que el cosinus d'un angle del primer quadrant té sempre signe positiu i el cosinus d'un angle del segon quadrant és sempre negatiu.

Si introduïm a la calculadora la informació, aquesta ja ens troba directament l'angle β del segon quadrant:

$$\beta \approx 155{,}51°$$

20. Troba cos α i tg α, a partir del sin α, sabent que sin α = $\frac{3}{5}$ i que l'angle α pertany al segon quadrant.

Tenim que:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Atès que, en aquest cas, α és un angle del segon quadrant, $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.

Hi substituïm sin α per $\frac{3}{5}$. Així:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Pel que fa a la tangent, aquesta també serà negativa, ja que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

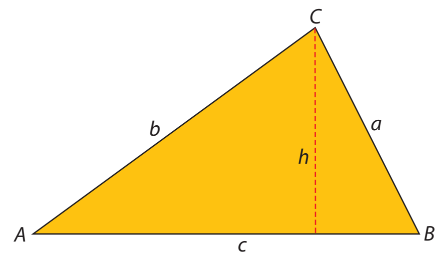
Com has pogut veure, la determinació de l'amplitud d'un angle o el càlcul de les seves raons trigonomètriques, utilitzant la calculadora, ens dóna valors aproximats. Els valors exactes s'obtenen si hi apliquem les relacions anteriors i expressem algunes raons mitjançant arrels quadrades, com hem fet en altres activitats resoltes anteriors.

7. Resolució d'un triangle qualsevol. Teorema del sinus Teorema del cosinus

Mitjançant els triangles rectangles estudiats fins ara, podrem obtenir relacions entre els costats i els angles d'un triangle qualsevol. Aquestes relacions ens permeten resoldre qualsevol tipus de triangle, és a dir, calcular-ne el tres costats i els tres angles, sempre que en coneguem tres d'aquests sis elements i que una de les dades sigui, com a mínim, un costat.

Teorema del sinus

- En el triangle acutangle *ABC* tracem l'altura *h* i tenim dos triangles rectangles. L'altura es pot expressar de dues maneres diferents, segons la considerem com un catet d'un o d'un altre triangle.



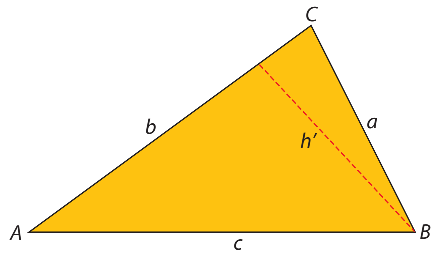
$$\sin \hat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \sin \hat{A} \quad \text{o bé} \quad \sin \hat{B} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \sin \hat{B}$$

Donat que l'altura *h* és la mateixa en tots dos casos podem igualar les dues expressions. Així: $b \sin \hat{A} = a \sin \hat{B}$.

Podem escriure aquesta igualtat en forma de proporció:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

Si en el mateix triangle dibuixem una altra de les tres altures, per exemple *h'*, podem fer el mateix raonament.



$$h' = c \sin \hat{A} \quad \text{o bé} \quad h' = a \sin \hat{C}$$

Igualem les dues expressions: $c \sin \hat{A} = a \sin \hat{C}$.

I n'obtenim la proporció:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Si comparem aquesta proporció amb l'anterior, podem escriure que:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

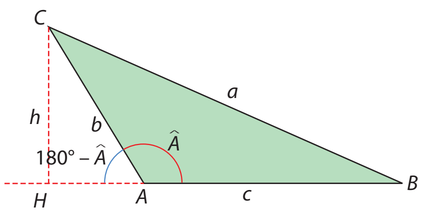
Aquestes igualtats posen de manifest el **teorema del sinus.**

> **Teorema del sinus:** Els costats d'un triangle són proporcionals als sinus dels angles respectivament oposats.

- En un triangle obtusangle també es verifica el teorema del sinus.

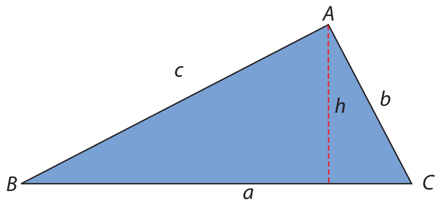
Triangle rectangle *BCH*: $\sin \hat{B} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \sin \hat{B}$

Triangle rectangle *ACH*: $\sin (180° - \hat{A}) = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \sin (180° - \hat{A})$



Atès que $\sin (180° - \hat{A}) = \sin \hat{A}$, perquè dos angles suplementaris tenen els sinus iguals, podem escriure aquesta segona igualtat de la manera següent:

$$h = b \sin \hat{A}$$



Igualem $h = a \sin \hat{B}$ i $h = b \sin \hat{A}$ i n'obtenim $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}}$ de la mateixa manera que en el cas del triangle acutangle.

- En cas que el triangle sigui rectangle, atès que l'angle $\hat{A}$ és recte, tenim que:

  $\sin \hat{A} = 1$ i per aquest motiu les igualtats corresponents són:

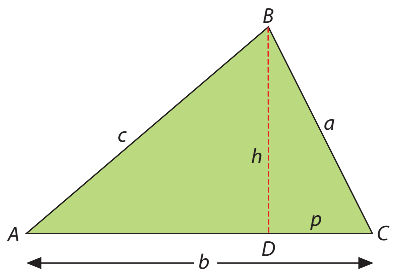
$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

D'aquí obtenim que $\sin \hat{B} = \dfrac{b}{a}$ i $\sin \hat{C} = \dfrac{c}{a}$.

Igualtats que hem obtingut al principi de la unitat per als triangles rectangles. Per tant, el teorema del sinus també és vàlid per a qualsevol triangle, tant si és rectangle com si no ho és.

Teorema del cosinus

- Observa el triangle acutangle *ABC* de la figura. Si hi tracem una de les seves altures *h*, n'obtenim dos triangles rectangles: *ABD* i *DBC*. En cadascun d'ells podem establir les relacions que ja coneixem.



En el triangle *ABD*: $c^2 = h^2 + (b-p)^2$

En el triangle *DBC:* $h^2 = a^2 - p^2$

$$\cos \hat{C} = \frac{p}{a} \rightarrow p = a \cos \hat{C}$$

Si substituïm h^2 de la segona igualtat en la primera:

$$c^2 = a^2 - p^2 + (b-p)^2 = a^2 - p^2 + b^2 - 2bp + p^2 = a^2 + b^2 - 2bp$$

Hi substituïm *p* per $a \cos \hat{C}$ i n'obtenim:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

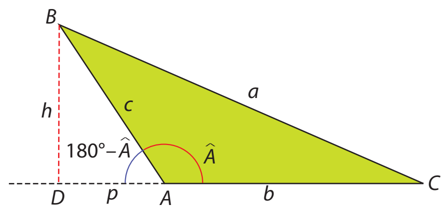
Aquesta igualtat es coneix com a **teorema del cosinus.**

De manera semblant, dibuixant les altres dues altures, obtindríem les relacions equivalents:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

Teorema del cosinus: El quadrat d'un costat és igual a la suma dels quadrats dels altres dos, menys el doble producte d'aquests pel cosinus de l'angle que formen.

- Aquest teorema és vàlid també per als triangles obtusangles.



En el triangle *DBC*: $a^2 = h^2 + (b+p)^2$

En el triangle *ABD*: $h^2 = c^2 - p^2$

$$\cos (180° - \hat{A}) = \frac{p}{c} \quad \rightarrow \quad p = c \cos (180° - \hat{A})$$

Donat que l'angle $180° - \hat{A}$ és obtús, per tant, pertany al segon quadrant, llavors el $\cos\ (180° - \hat{A})$ és negatiu. Així:

$$p = c \cos (180° - \hat{A}) = -c \cos \hat{A}$$

Si substituïm h^2 de la segona igualtat en la primera:

$$a^2 = c^2 - p^2 + (b+p)^2 = c^2 - p^2 + b^2 + 2bp + p^2 = c^2 + b^2 + 2bp$$

Finalment, hi substituïm p per $-c\cos\hat{A}$ i n'obtenim l'expressió del teorema del cosinus:

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2bp = b^2 + c^2 + 2b\,(-c\cos\hat{A})$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\hat{A}$$

- En cas que el triangle sigui rectangle, atès que l'angle $\hat{A}$ és recte, la igualtat corresponent a aquest angle quedaria així:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos 90° \rightarrow a^2 - b^2 + c^2$$

Ja que cos 90° = 0. Fixa't que aquesta igualtat és certa, perquè es tracta precisament del teorema de Pitàgores.

Per tant, podem afirmar que el teorema del cosinus es pot aplicar a qualsevol triangle, tant si és rectangle com si no ho és.

activitats resoltes

21. Resol un triangle sabent que els seus tres costats mesuren $a = 12$ cm, $b = 6$ cm i $c = 8$ cm, respectivament.

Hem de trobar els tres angles, per tant cal aplicar-hi el teorema del cosinus. Així:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\hat{A}$$

Aïllem el cosinus de l'angle: $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Hi substituïm els valors de a, b i c:

$$\cos\hat{A} = \frac{(6\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2 - (12\text{ cm})^2}{2\cdot 6\text{ cm}\cdot 8\text{ cm}} = \frac{-44\text{ cm}^2}{96\text{ cm}^2}$$
$$= -0{,}458\overset{\frown}{3} \rightarrow \hat{A} \approx 117{,}28°$$

Fixa't que el cosinus de $\hat{A}$ és negatiu. L'angle $\hat{A}$ és obtús. Es tracta d'un triangle obtusangle.

Procedim de la mateixa manera per obtenir un altre angle:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\hat{B}$$

Hi aïllem el cosinus de l'angle: $\cos\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$\cos\hat{B} = \frac{(8\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2 - (6\text{ cm})^2}{2\cdot 12\text{ cm}\cdot 8\text{ cm}} = \frac{172\text{ cm}^2}{192\text{ cm}^2} =$$
$$= 0{,}8958\overset{\frown}{3} \rightarrow \hat{B} \approx 26{,}38°$$

En trobem l'angle $\hat{C}$:

$$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow$$
$$\rightarrow \hat{C} \approx 180° - (117{,}28° + 26{,}38°) = 36{,}34°$$

Els angles mesuren:

$$\hat{A} \approx 117{,}28°,\ \hat{B} \approx 26{,}38° \text{ i } \hat{C} \approx 36{,}34°$$

22. Resol un triangle sabent que $a = 80$ cm, $b = 50$ cm i $\hat{C} = 60°$.

Segons el teorema del cosinus: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$.

Hi substituïm els valors coneguts:

$$c^2 = (80\text{ cm})^2 + (50\text{ cm})^2 - 2\cdot 80\text{ cm}\cdot 50\text{ cm}\cdot\cos 60°$$
$$= 4\,900\text{ cm}^2 \rightarrow c = \sqrt{4\,900}\text{ cm} = 70\text{ cm}$$

El costat c mesura 70 cm.

Ara ja en coneixem els tres costats. Per trobar un dels altres dos angles, hi podem aplicar el teorema del cosinus com hem fet en l'activitat resolta anterior, o bé aplicar-hi el teorema del sinus.

Hi apliquem el teorema del sinus. Observa:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Hi substituïm els valors coneguts:

$$\frac{80\text{ cm}}{\sin\hat{A}} = \frac{70\text{ cm}}{\sin 60°} \rightarrow \sin\hat{A} = \frac{80\text{ cm}\cdot\sin 60°}{70\text{ cm}} \rightarrow \hat{A} \approx 81{,}79°$$
$$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \rightarrow \hat{B} \approx 180° - (81{,}79° + 60°) = 38{,}21°$$

El costat c mesura 70 cm, $\hat{A} \approx 81{,}79°$ i $\hat{B} \approx 38{,}21°$.

23. Resol un triangle sabent que $\hat{A} = 75°$, $\hat{B} = 45°$ i $a = 10$ m.

Podem esbrinar-ne el tercer angle fàcilment:

$$\hat{C} = 180° - (75° + 45°) = 60°.$$

Hi podem aplicar el teorema del sinus, ja que si substituïm les dades de l'enunciat en l'expressió:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}},$$

obtenim:

$$\frac{10\text{ cm}}{\sin 75°} = \frac{b}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 60°}$$
$$\frac{10\text{ m}}{\sin 75°} = \frac{b}{\sin 45°} \rightarrow b = \frac{10\text{m}\sin 45°}{\sin 75°} \approx 7{,}32\text{m}$$
$$\frac{10\text{ m}}{\sin 75°} = \frac{c}{\sin 60°} \rightarrow c = \frac{10\text{m}\sin 60°}{\sin 75°} \approx 8{,}97\text{m}$$

L'angle $C = 60°$, b mesura 7,32 m i c mesura 8,97 m,

8. Resolució de problemes

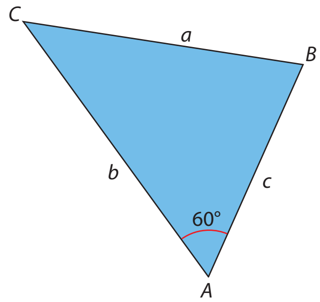
En moltes situacions de la vida quotidiana se'ns plantegen problemes en què intervé un triangle del qual es coneixen només algunes dades. En aquest apartat, veurem com els teoremes del sinus i del cosinus ens poden ajudar a resoldre aquestes situacions.

Com sempre, primer cal fer un esquema de la situació, identificar el triangle, posar-hi les dades i representar per lletres les incògnites i, finalment, veure quin és el procediment més apropiat que relacioni les dades que tenim amb les incògnites que busquem.

Vegem-ho.

Dos vaixells surten d'un mateix punt del port de Cadaqués amb direccions que formen un angle de 60°, amb velocitats constants de 50 km/h i 40 km/h, respectivament. Quina distància els separarà després de transcorreguda mitja hora?

Fem un esquema gràfic de la situació que planteja el problema.



Hem de calcular els costats *b* i *c* del triangle *ABC*, és a dir, les distàncies recorregudes pels vaixells en aquests 30 min.

$$b = \frac{50\,\text{km}}{1\,\text{h}} \cdot \frac{1\,\text{h}}{60\,\text{min}} \cdot 30\,\text{min} = 25\,\text{km}$$

$$c = \frac{40\,\text{km}}{1\,\text{h}} \cdot \frac{1\,\text{h}}{60\,\text{min}} \cdot 30\,\text{min} = 20\,\text{km}$$

Coneixem els dos costats i l'angle que formen. Per trobar el costat oposat a aquest angle podem aplicar-hi el teorema del cosinus.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \;\rightarrow$$

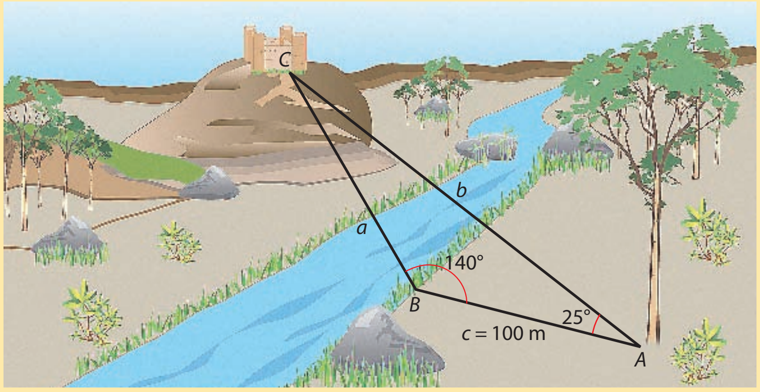
$$\rightarrow a^2 = (25\,\text{km})^2 + (20\,\text{km})^2 - 2 \cdot 25\,\text{km} \cdot 20\,\text{km} \cdot \cos 60° = 525\,\text{km}^2$$

$$a = \sqrt{525\,\text{km}^2} \approx 22{,}91\,\text{km}$$

La distància que separa els dos vaixells al cap de mitja hora és de 22,91 km aproximadament.

activitats resoltes

24. **En Josep vol conèixer a quina distància es troba un castell que és a l'altra riba d'un riu. Per saber-ho disposa d'un teodolit i una cinta mètrica. Pren les mesures indicades en la figura. A quina distància de *B* es troba el castell? I de *A*?**



Trobem $\hat{C}$: $\hat{C} = 180° - 140° - 25° = 15°$

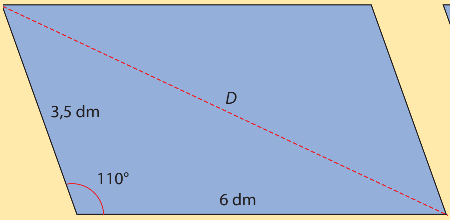
Amb les dades de què disposem, hi hem d'aplicar el teorema del sinus:

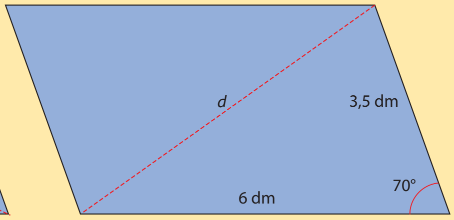
$$\frac{100\text{ m}}{\sin 15°} = \frac{a}{\sin 25°} \rightarrow a = \frac{100\text{m} \cdot \sin 25°}{\sin 15°} \approx 163{,}29\text{ m}$$

$$\frac{100\text{ m}}{\sin 15°} = \frac{b}{\sin 140°} \rightarrow b = \frac{100\text{m} \cdot \sin 140°}{\sin 15°} \approx 248{,}35\text{ m}$$

El castell es troba aproximadament a 163,29 m de *B* i a 248,35 m de *A*.

25. **Els dos costats d'un paral·lelogram mesuren 6 dm i 3,5 dm, i l'angle que formen és de 110°. Quant mesuren les diagonals d'aquest quadrilàter?**





Les respectives diagonals formen amb els costats del paral·lelogram dos triangles. En la primera figura, la diagonal *D* és el costat oposat a l'angle de 110°. En la segona, la diagonal *d* és el costat oposat a l'angle suplementari de 110°, és a dir, 70°.

Podem aplicar el teorema del cosinus en cada cas:

$D^2 = (6\text{ dm})^2 + (3{,}5\text{ dm})^2 - 2 \cdot 6\text{ dm} \cdot 3{,}5\text{ dm} \cdot \cos 110° \approx 62{,}61\text{ dm}^2 \rightarrow D \approx 7{,}91\text{ dm}$

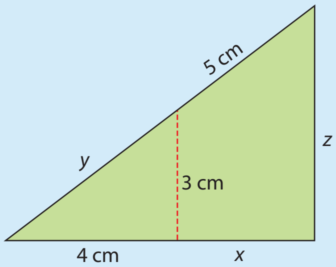
$d^2 = (6\text{ dm})^2 + (3{,}5\text{ dm})^2 - 2 \cdot 6\text{ dm} \cdot 3{,}5\text{ dm} \cdot \cos 70° \approx 33{,}89\text{ dm}^2 \rightarrow d \approx 5{,}82\text{ dm}$

Les diagonals del quadrilàter mesuren 7,91 dm i 5,82 dm, aproximadament.

Activitats

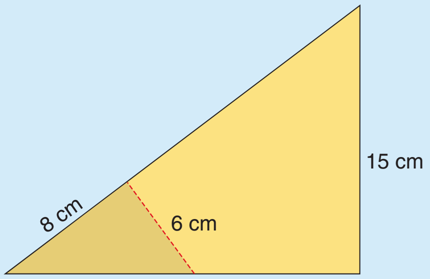
Proposades

1. Calcula el valor de *x*, *y* i *z* en el triangle rectangle de la figura.

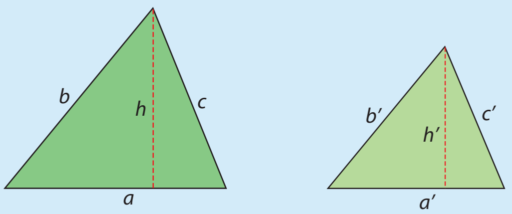


2. Dos triangles rectangles són semblants. Els catets d'un dels triangles rectangles mesuren 12 cm i 5 cm, i la hipotenusa de l'altre, 39 cm. Determina la raó de semblança i la mesura dels catets del segon triangle.

3. Són semblants els dos triangles rectangles de la figura? Per què? Calcula l'àrea de cada triangle.



4. Els dos triangles rectangles següents són semblants. Si es verifica $\frac{c}{c'} = k$, quina és la relació entre *h* i *h'*?



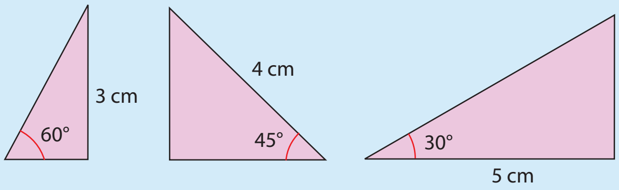
5. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 10 cm i un dels catets, 5 cm. Determina la mesura de l'altre catet i la dels angles aguts d'aquest triangle.

6. Un dels angles aguts d'un triangle rectangle mesura 25° i la hipotenusa, 7 cm. Resol el triangle.

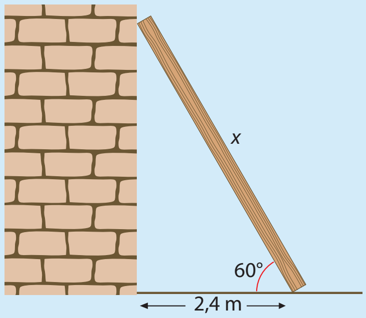
7. El perímetre d'un triangle rectangle mesura 24 cm i la hipotenusa, 10 cm. Resol el triangle sabent que els seus catets es diferencien en 2 cm.

8. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 4 cm i un dels angles aguts és la quarta part de l'altre. Resol el triangle.

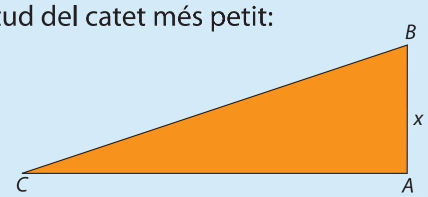
9. Resol els triangles rectangles següents:



10. L'escala de la figura forma un angle de 60° amb el terra, i el seu peu es troba situat a 2,4 m de la paret. Quina és la longitud *x* de l'escala?



11. En el triangle rectangle *ABC* de la figura, un catet és el triple que l'altre. Si hi representem per *x* la longitud del catet més petit:



a) Expressa en funció de *x* la mesura de l'altre catet i la de la hipotenusa.

b) Determina, en cada cas, el nombre real que resulta d'establir les raons següents:

$$\frac{AB}{CB'}, \frac{AC}{CB'}, \frac{AB}{AC}.$$

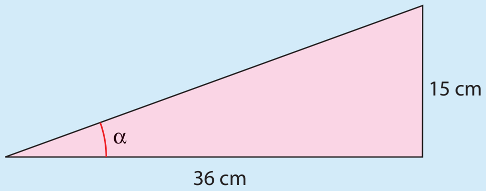
c) Racionalitza, si cal, els nombres reals que has obtingut en l'apartat anterior.

12. La raó entre els dos catets *b* i *c* d'un triangle rectangle és $\frac{b}{c} = 2$.

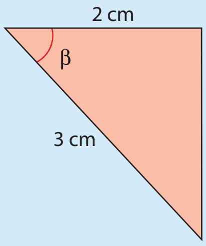
a) Expressa en funció del catet de menys longitud la mesura de l'altre catet i la de la hipotenusa.

b) Estableix la raó que hi ha entre cadascun dels dos catets i la hipotenusa.

13. Troba les raons trigonomètriques de l'angle α del triangle rectangle de la figura.

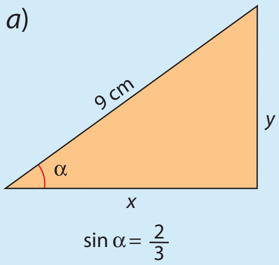


14. Determina les raons trigonomètriques de l'angle β del triangle rectangle de la figura.

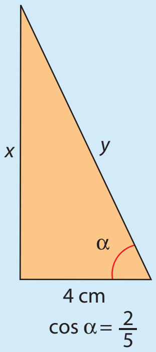


15. Calcula el valor de *x* i de *y* en cadascun dels triangles rectangles següents:

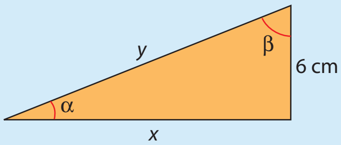
a)



b)



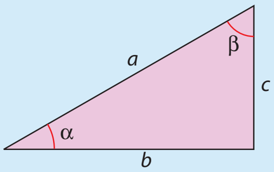
16. En el triangle rectangle de la figura, sabem que tg α = 0,3. Determina'n *x* i *y* i les raons trigonomètriques de l'angle β.



17. Els dos angles aguts α i β de qualsevol triangle rectangle són complementaris: α + β = 90°. Demostra que en aquest cas es verifiquen les igualtats:

$$\sin\alpha = \cos\beta; \quad \cos\alpha = \sin\beta; \quad \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta = 1$$

N'hi ha prou que apliquis les definicions de les diferents raons trigonomètriques als angles α i β del triangle rectangle de la figura.



18. Indica si són certes o falses les relacions següents:

a) $\sin 40° = \cos 50°$ *b)* $\sin 20° = \cos 20°$

c) $\sin 45° = \cos 45°$ *d)* $\mathrm{tg}\,30° = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,60°}$

e) $\sin 30° > 1$ *f)* $\cos 65° < 1$

19. En un triangle rectangle, l'altura corresponent a la hipotenusa la divideix en dos segments que mesuren 9 cm i 4 cm. Determina:

a) La longitud d'aquesta altura.

b) Els catets del triangle.

c) L'àrea del triangle, tenint en compte dues bases diferents i les altures corresponents.

20. Si $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, calcula sin α i tg α.

21. Se sap que $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ i que α és un angle del segon quadrant. Quin és el valor de cos α i el de tg α?

22. Si tg α = 1, determina sin α i cos α.

23. Sabem que $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Si α és un angle agut tal que $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{4}$, és possible que sin α = 3 i cos α = 4? Per què?

24. Demostra que, per a qualsevol angle agut α, es compleix la igualtat:

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Suggeriment: divideix per $\cos^2\alpha$ els dos membres de la fórmula fonamental de la trigonometria.

25. Determina de manera experimental les raons trigonomètriques d'un angle de 25°. Compara els resultats que obtinguis amb els que et proporciona la calculadora.

26. Dibuixa l'angle agut α tal que $\cos\alpha = \dfrac{3}{7}$. Quant mesura aquest angle?

27. Determina la mesura de l'angle β que verifica que tg β = 1,2. Dibuixa l'angle.

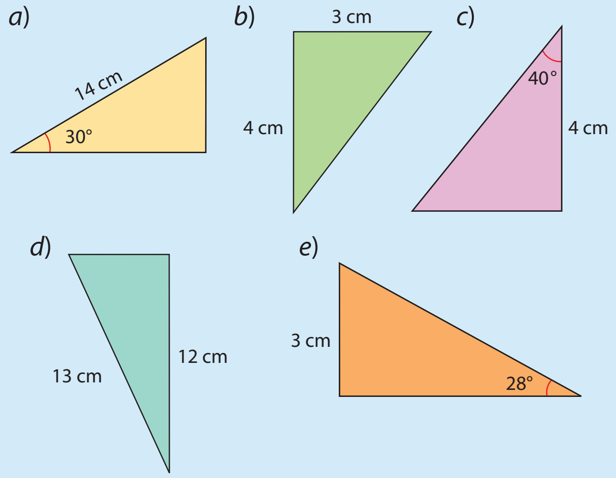
28. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 7 cm i un dels catets, 4 cm. Quant mesuren els angles aguts d'aquest triangle?

29. Quant mesuren els angles aguts del triangle rectangle de l'activitat 19?

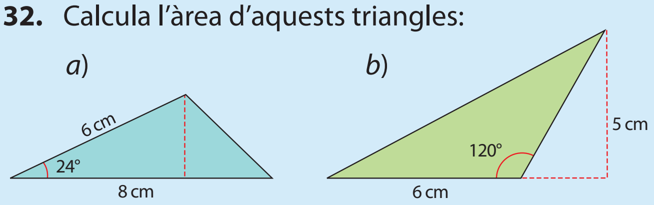
30. Completa la taula següent sense utilitzar la calculadora:

	30°	60°	45°	150°	120°	135°
sinus						
cosinus						
tangent						

31. Resol els triangles rectangles següents:



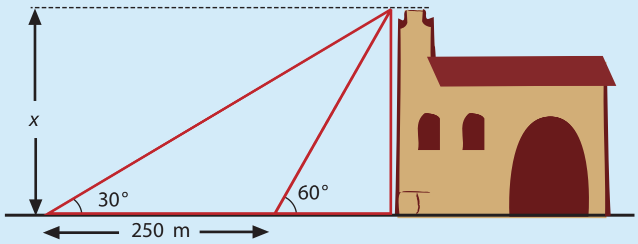
32. Calcula l'àrea d'aquests triangles:



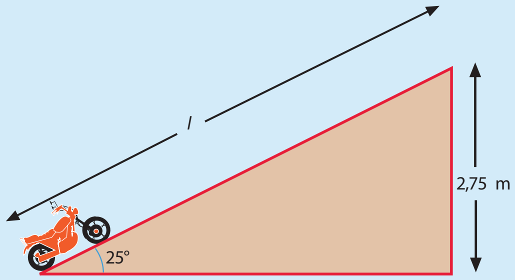
33. Un arbre de 25 m d'altura projecta una ombra de 20 m. Quina és la inclinació dels raigs del sol respecte de l'horitzontal en aquest moment?

34. Calcula l'àrea d'un octàgon regular inscrit en una circumferència de 4 cm de radi.

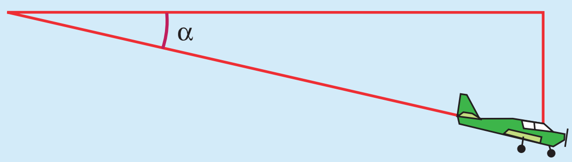
35. Des d'un cert punt s'observa la part més alta de la xemeneia d'una masia sota un angle de 60°. Endarrerint la posició 250 m en la direcció adient, l'angle esdevé de 30°. Quina és l'altura d'aquesta xemeneia?



36. La figura representa una rampa de salts d'exhibició per a motocicletes. Si es vol que en el moment de sortir de la rampa les motocicletes es trobin a 2,75 m del terra, quina longitud ha de tenir aquesta rampa?

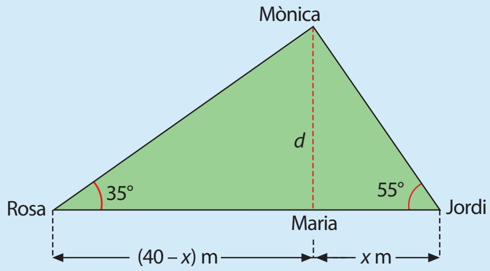


37. Un avió que és a punt d'aterrar, descendeix 2 160 m en recórrer una distància de 18,41 km. Quin és l'angle α amb què descendeix aquest avió?



38. Calcula l'àrea d'un rombe de 12 cm de costat sabent que un dels seus angles mesura 43°.

39. Quina és la distància *d* que hi ha entre la Mònica i la Maria?



40. Una persona, en posició vertical, projecta una ombra de 175 cm quan els raigs de sol formen amb l'horitzontal un angle de 42°. Quina és l'altura d'aquesta persona?

41. Dibuixa una circumferència de radi 2 cm, uns eixos de coordenades amb origen el centre de la circumferència i les bisectrius del primer i segon quadrants.

Quant mesuren els dos angles que a partir de l'origen d'angles, el semieix *OX* positiu, determinen les bisectrius?

Troba les raons trigonomètriques de cadascun d'aquests dos angles, sense utilitzar la calculadora.

42. Si $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ i $0° < \alpha < 90°$, calcula el sinus, el cosinus i la tangent de l'angle $\beta = 180 - \alpha$.

43. Determina quin angle del segon quadrant té un sinus igual a $\frac{2}{5}$.

44. Donat l'angle $\beta = 165°$, quin angle del primer quadrant ens servirà per calcular les raons trigonomètriques de β? Determina-les.

45. Si $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{7}}{4}$ i α és un angle del segon quadrant, quant val α?

46. Si $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $0° < \alpha < 90°$, calcula:

a) $\sin (180° - \alpha)$ *b*) $\cos \alpha$ *c*) $\text{tg}\ \alpha$

d) $\cos (180° - \alpha)$ *e*) α

47. Utilitza el teorema del sinus per resoldre un triangle en què $a = 2{,}5$ cm, $b = 4$ cm i l'angle $\hat{A} = 35{,}5°$. Pots fer-ho utilitzant el teorema del cosinus? Raona la teva resposta.

48. Resol els triangles següents:

a) $a = 71{,}58$ m $b = 57{,}77$ m $\hat{A} = 54°\ 16'$

b) $\hat{A} = 61°\ 25'$ $\hat{B} = 48°\ 35'$ $c = 180$ m

c) $a = 250$ m $b = 225$ m $c = 175$ m

49. La Mariona vol conèixer l'altura d'un gratacels. Veu l'extrem superior d'aquest sota un angle de 45° des d'un punt del terra. Si s'hi apropa 50 m, el veu sota un angle de 60°. Quina és l'altura de l'edifici?

50. En Jordi vol conèixer l'altura d'un avet. Veu l'extrem superior sota un angle de 36°. Si s'hi apropa 32 m, el veu sota un angle de 44°. Quina és l'altura de l'arbre?

Reforç

1. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 8 cm, i un dels seus angles aguts és el triple que l'altre. Calcula'n el perímetre i l'àrea.

2. Els dos braços d'un compàs estan oberts de manera que formen un angle de 50°. Si cadascun d'ells mesura 11 cm, determina el radi i la longitud de la circumferència que hi podem dibuixar.

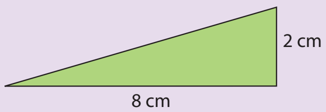
3. Dibuixa un angle el sinus del qual sigui el doble que el seu cosinus. Quant val la tangent d'aquest angle?

4. En una circumferència de 10 cm de radi, s'uneixen dos punts amb una corda que mesura 5 cm. Determina'n la mesura de l'angle central i calcula l'àrea del segment circular determinat per aquesta corda i l'arc de circumferència corresponent.

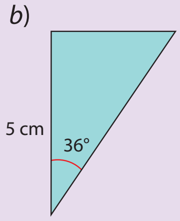
5. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 12 cm, i un dels seus angles aguts, 48°. Calcula l'àrea d'aquest triangle.

6. Resol els triangles rectangles següents:

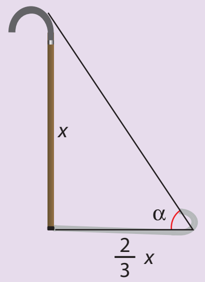
a)



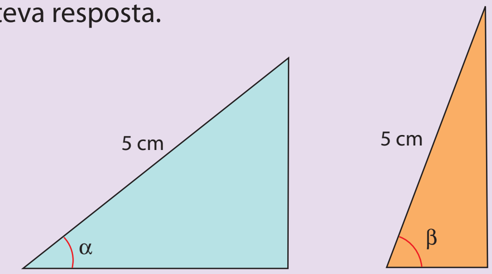
b)



7. En un cert instant, un bastó projecta una ombra que és igual a les dues terceres parts de la seva altura. Troba quina és en aquest moment la inclinació dels raigs del sol respecte de l'horitzontal.

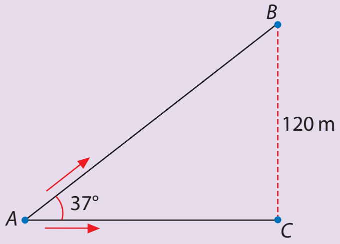


8. Observa els angles α i β dels triangles de la figura. Com pots comprovar, es compleix que $\beta > \alpha$. És cert que $\sin \beta > \sin \alpha$? I que $\cos \beta > \cos \alpha$? Raona la teva resposta.



9. La diagonal d'un rectangle mesura 6 cm i forma amb un dels costats un angle de 25°. Calcula'n el perímetre i l'àrea.

10. Dos amics surten del punt A. L'un es dirigeix al punt B i l'altre al punt C, seguint trajectòries rectilínies que formen entre elles un angle de 37°. Si els punts B i C es troben separats una distància de 120 m i la direcció BC és perpendicular a la direcció AC, quants metres recorre més un dels amics que l'altre?



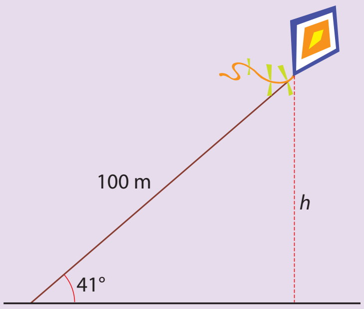
11. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 8 cm i un dels seus angles aguts, 30°. Determina el volum del con que es genera en fer girar 360° aquest triangle rectangle al voltant del catet contigu a l'angle de 30°.

12. Troba els angles d'un rombe les diagonals del qual mesuren 12 cm i 8 cm.

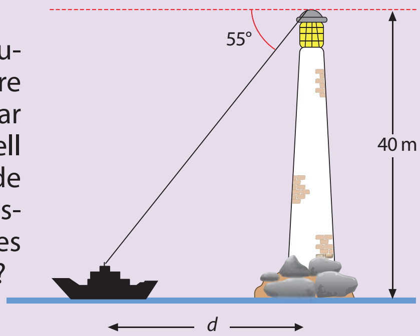
13. El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 6 cm, i l'angle oposat, 76°. Determina'n el perímetre i l'àrea.

14. Des d'un cert punt del terra, es veu el punt més alt d'una torre sota un angle de 36°. Si ens apropem 72 m en direcció al peu de la torre, l'angle és de 64°. Quina altura té la torre?

15. Un estel està unit al terra mitjançant un fil de 100 m que forma un angle de 41° amb l'horitzontal. Suposant que el fil estigui ben tensat, a quina altura vola l'estel?



16. Des d'un far situat a 40 m sobre el nivell del mar es veu un vaixell sota un angle de 55°. A quina distància del far es troba el vaixell?



17. Si tg $\alpha = \sqrt{2}$, calcula sin α i cos α. Utilitza la calculadora per determinar la mesura de l'angle α i comprovar els resultats que has obtingut.

18. Dibuixa un angle de 160°. Quin és el signe de les tres raons trigonomètriques d'aquest angle?

19. Donat l'angle $\beta = 123°$, quin angle del primer quadrant ens servirà per calcular les raons trigonomètriques de β? Determina-les.

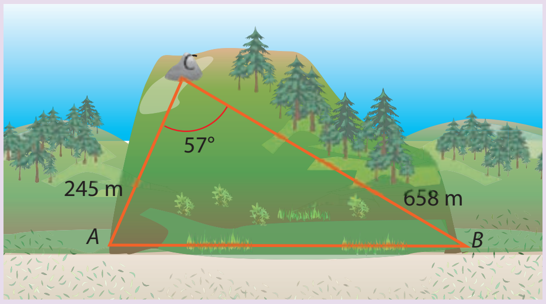
20. Utilitza una circumferència de radi 1 dm en un full de paper mil·limetrat i uns eixos de coordenades amb origen el centre de la circumferència per dibuixar un angle del segon quadrant, el cosinus del qual sigui igual a $\frac{-7}{10}$. Calcula'n el sinus i la tangent.

21. Resol un triangle sabent que els seus costats mesuren $a = 18$ dm, $b = 22$ dm i $c = 28$ dm, respectivament.

22. Resol un triangle sabent que $a = 48$ cm, $b = 30$ cm i $\hat{A} = 125°$.

23. Construeix un triangle en què $\hat{B} = 56°$, $\hat{C} = 80°$ i $b = 6$ cm. Resol el triangle trobant les mesures dels elements desconeguts.

24. Per construir un túnel de A fins a B es localitza una roca C visible des d'ambdós punts. Es mesuren les distàncies $AC = 245$ m i $BC = 658$ m. Si se sap que l'angle ACB té una amplitud de 57°, quina serà la longitud del túnel que es construirà?

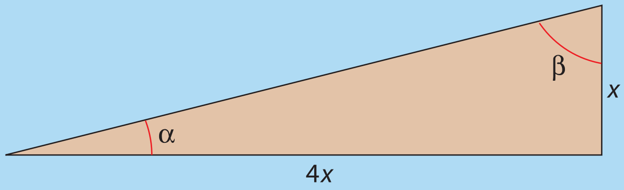


25. Resol el problema de l'activitat resolta 17 utilitzant el teorema del sinus.

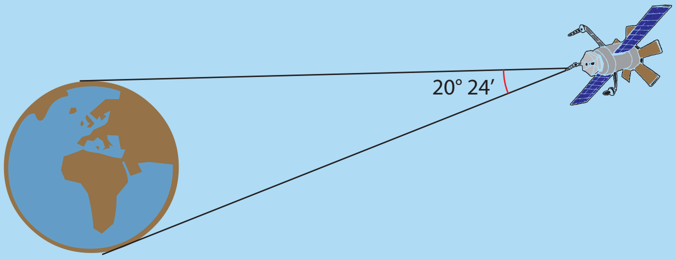
26. Dos avions surten d'un mateix punt, en direccions diferents, i formen un angle de 25°. Suposem que han volat en línia recta; si l'un ha fet un trajecte de 400 km i l'altre de 640 km, quina és la distància que els separa?

Ampliació

1. Calcula les raons trigonomètriques dels angles α i β del triangle rectangle de la figura.



2. Des d'una nau espacial es veu la Terra sota un angle de 20° 24′. Si el radi de la Terra mesura 6 370 km, a quina distància de la superfície de la Terra es troba la nau?



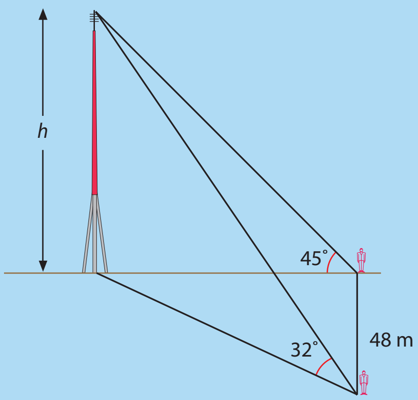
3. Determina en cada cas l'angle agut α que verifica:

a) $\sin \alpha = 1 - 2 \sin \alpha$

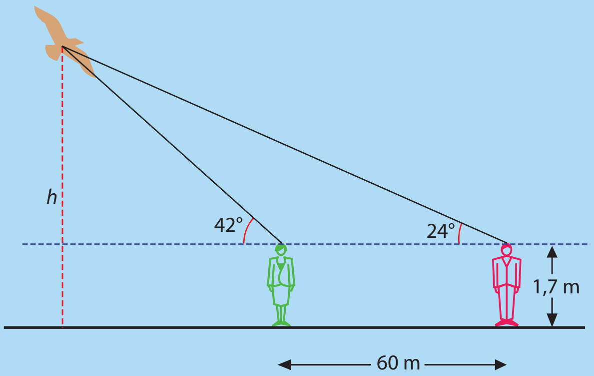
b) $2 - \cos \alpha = 3 \cos \alpha$

c) $\dfrac{1}{\text{tg}\, \alpha} = \dfrac{4}{3}$

4. Un home es troba situat a l'est de l'antena d'una emissora de ràdio i veu la seva part superior sota un angle de 45°. Si camina 48 m cap al sud, l'angle és de 32°. Determina l'altura de l'antena.



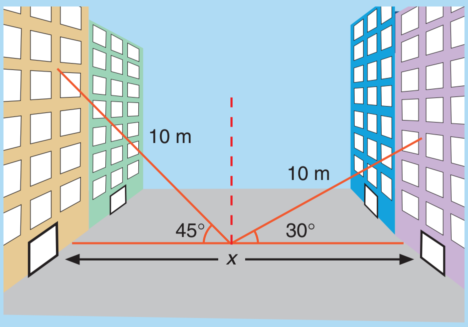
5. A quina altura respecte del terra vola l'ocell de la figura?



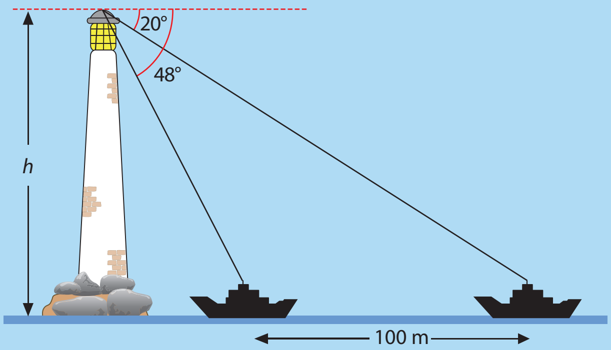
6. El radi de la Terra mesura aproximadament 6 370 km. Quina és la longitud aproximada del paral·lel terrestre situat a 40° de latitud nord?

7. Des d'un punt del terra situat a una certa distància del peu d'un arbre, es veu la part més alta de l'arbre amb un angle de 42°. Sota quin angle es veurà si ens col·loquem a una distància que és el triple que l'anterior?

8. Una escala de bombers de 10 m de longitud s'ha fixat en un punt d'un carrer. Si es recolza sobre una de les façanes, forma amb el terra un angle de 45°, i si es recolza sobre l'altra façana, l'angle és de 30°. Quina és l'amplària del carrer?



9. L'angle sota el qual es veu un vaixell des de la torre d'un far mesura 20°. Si el vaixell avança 100 m en direcció al far, el nou angle és de 48°. Determina l'altura de la torre d'aquest far.



10. Quin angle del segon quadrant verifica que:

$$\text{tg}\ \alpha = -1?$$

11. Calcula tg (180° – β) sabent que tg β = 2 i que 0° < β < 90°.

12. Suposem que $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ i que 0° < α < 90°. Calcula sin (180° – α).

13. Coneixem aquestes dades d'un triangle:

$$a = 12 \text{ cm},\ b = 24 \text{ cm i } \hat{A} = 22°\ 15'.$$

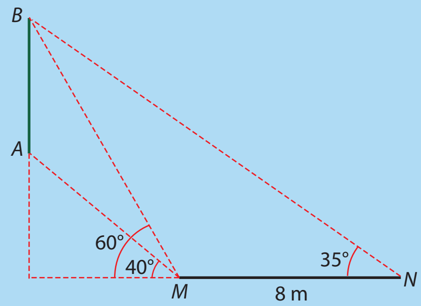
a) Resol el triangle sabent que és acutangle.

b) Com resoldries aquest triangle si ens diuen que ha de ser obtusangle?

14. Explica raonadament per què no hi pot haver cap triangle de costats *a* = 8 m, *b* = 14 m i *c* = 5 m.

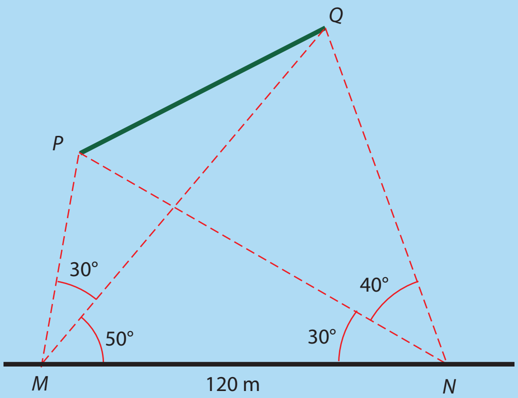
15. Les diagonals d'un paral·lelogram mesuren 40 cm i 24 cm respectivament i es tallen formant un angle de 118°. Quina és la longitud dels costats del paral·lelogram?

16. Troba la longitud *AB*.



17. Un helicòpter es manté de forma estacionària en l'aire. Dos observadors, separats per una distància de 300 m i situats en el mateix pla vertical que l'helicòpter, el veuen amb angles de 32° i 47°, respectivament. A quina altura es troba l'helicòpter? A quina distància es troba de cada observador?

18. Calcula la distància *PQ*.



Avaluació

Indica quines de les afirmacions següents són certes o falses:

1. Si els dos angles aguts d'un triangle mesuren 27° i 63°, el triangle no pot ser rectangle.
2. Si un dels dos catets d'un triangle rectangle és el triple que l'altre catet, la tangent d'un dels seus angles aguts és 3, i la tangent de l'altre angle agut, $\frac{1}{3}$.
3. La tangent d'un angle agut és sempre un nombre comprès entre 0 i 1.
4. En un triangle rectangle es verifica $\text{tg}\ \alpha = \frac{4}{5}$. Podem assegurar que els dos catets d'aquest triangle mesuren 4 cm i 5 cm.
5. Si α i β són dos angles complementaris, es compleix que $\sin \beta = \cos \alpha$.
6. Sabent que $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ i $0° < \alpha < 90°$, llavors:
$$\cos \alpha = \frac{5}{13} \quad \text{i} \quad \text{tg}\ \alpha = \frac{12}{5}$$
7. $\sin 70° = \cos 20°$.
8. $\sin 45° = \cos 45°$.
9. $\text{tg}\ 40° = -\text{tg}\ 140°$.
10. $\sin 30° > \sin 150°$.
11. $\cos 70° = -\cos 110°$.
12. Segons el teorema del sinus:
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$
en què a, b i c són els costats del triangle i $\hat{A}$, $\hat{B}$ i $\hat{C}$ són els angles oposats als respectius costats.
13. $\sin 120° = -\sin 60°$.
14. $\text{tg}\ 65° = \frac{\sin 65°}{\cos 65°}$.
15. $\sin 50° = 2 \cdot \sin 25°$.
16. Si ens diuen que la tangent d'un angle agut α és $\text{tg}\ \alpha = \frac{3}{5}$, segur que $\sin \alpha = 3$ i $\cos \alpha = 5$.
17. Si α és un angle obtús, podem afirmar que $0° < \cos \alpha < 1$.
18. $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
19. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1$.
20. Segons el teorema del cosinus:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A},$$
en què a, b i c són els costats del triangle i $\hat{A}$ és l'angle que formen els costats b i c.