

ALGUNS PROBLEMES SOBRE TRIGONOMETRIA



El terme **Trigonometria** està format per dos paraules gregues *trigonon* que significa triangle i *metron* que significa mesurar.

La Trigonometria estudia les relacions que hi ha entre els angles i els costats d'un triangle.

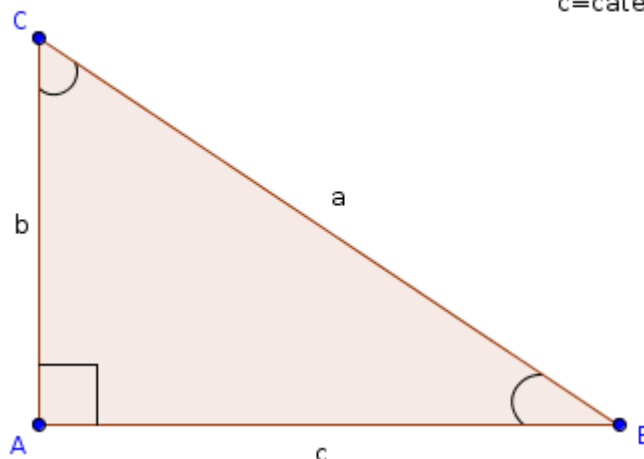
El càlcul d'altures i distàncies inaccessibles és una de les primeres aplicacions d'aquesta branca de les Matemàtiques.

El primer antecedent de la Trigonometria es troba al papir de Rhind, papir egipci (1650 aC) on apareix un problema sobre les mesures d'una piràmide.

En la cultura grega Aristarc de Samos (s. III a.C.) va estudiar la distància al Sol i a la Lluna utilitzant els triangles. Aristarc va argumentar que el Sol, la Lluna, i la Terra formen un triangle rectangle en el moment del quart creixent o minvant. Estimava que l'angle (oposat al catet major) era de 87° .

Resum teòric bàsic:

a=hipotenusa
b=catet
c=catet



- **Teorema de Pitàgoras:** $a^2=b^2+c^2$
- **Raons Trigonomètriques:**

$$\sin B = \frac{\text{catet.oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos B = \frac{\text{catet.contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

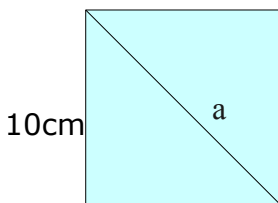
$$\text{tg B} = \frac{\text{catet.oposat}}{\text{catet.contigu}} = \frac{b}{c}$$

- **Llei fonamental de la Trigonometria :**

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Seguidament presentem alguns problemes tipus que es resolen amb l'ús de la Trigonometria.

1 Troba el valor de la diagonal d'un quadrat de costat 10 cm



Teorema de Pitàgoras:

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=10^2+10^2$$

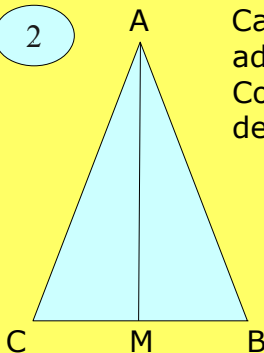
$$a^2=200$$

$$a = \sqrt{200} = \pm 10 \cdot \sqrt{2} = \pm 14.14$$

En el context del problema només té sentit la solució positiva.

Resposta: Diagonal = 14.41 cm

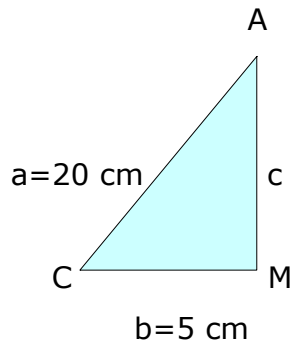
2



Calcula les raons trigonomètriques de l'angle C del triangle isòsceles adjunt. Les dades són :
 Costat BC=10 cm. Costats AB=AC=20 cm. Calcula també l'alçada del triangle i l'angle C

Dibuixar l'alçada del triangle permet obtenir triangles rectangles als que és possible aplicar el Teorema de Pitàgorès i les definicions de raons trigonomètriques.

El raonament següent es farà sobre el triangle rectangle ACM



D'aquest triangle es coneix:

hipotenusa $a=20$ cm

catet = $b = 5$ cm (meitat de CB)

catet = $c =$ dada que falta

Teorema de Pitàgoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$20^2 = 5^2 + c^2$$

$$400 = 25 + c^2$$

$$375 = c^2$$

$$c = \sqrt{375} = 5 \cdot \sqrt{15} = 19.36 \text{ cm és l'alçada del triangle.}$$

Raons trigonomètriques de l'angle C

$$\sin C = \frac{\text{catet.oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{19.36}{20} = 0.968$$

$$\cos C = \frac{\text{catet.contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{5}{20} = 0.25$$

$$\text{tg } C = \frac{\text{catet.oposat}}{\text{catet.contigu}} = \frac{c}{b} = \frac{19.36}{5} = 3.87$$

Graus de l'angle C

Ho podem fer amb qualsevol de les tres raons trigonomètriques calculades anteriorment, i amb les tecles de la calculadora:

$$\sin^{-1}, \cos^{-1} \text{ i } \tan^{-1}$$

S'activen en prémer la tecla auxiliar de la calculadora **INV** o **SHIFT**, prèviament a la de la funció (dependrà del model de calculadora).

Bàsicament hi ha dos procediments segons el tipus de calculadora:

Procediment A

S'escriu en la calculadora:

0.968 **Inv/shift** **sin⁻¹** **=** i s'obté **75.4°**

Procediment B

S'escriu en la calculadora:

Inv/shift **sin⁻¹** **0.968** **=** i s'obté **75.4°**

3

Si $\sin \alpha = 0.35$ calcula la resta de les raons trigonomètriques de l'angle α

Llei fonamental de la Trigonometria :

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

$$(0.35)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

$$0.1225 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

$$(\cos \alpha)^2 = 1 - 0.1225$$

$$(\cos \alpha)^2 = 0.8775$$

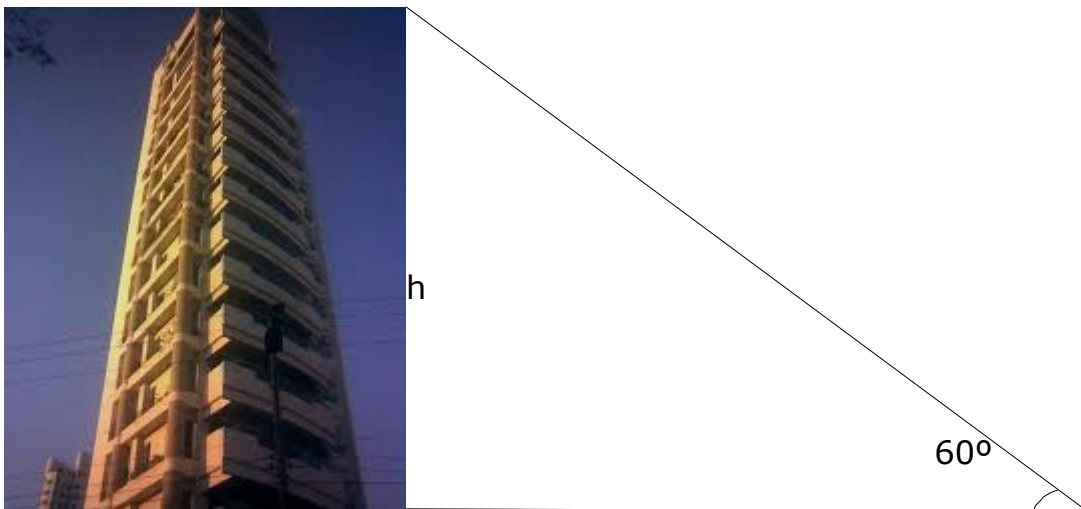
$$\cos \alpha = \pm \sqrt{0.8775}$$

$$\cos \alpha = \pm 0.9367$$

El signe del $\cos \alpha$ depèn del quadrant al que pertany l'angle.

4

Calcula l'altura d'un edifici si des de l'altre costat del carrer, a 30 m de la base, en veiem l'extrem superior amb un angle de 60°



Il·lustració 1: edifici

30 m

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{30}$$

$$h = 30 \cdot \tan 60^\circ$$

$$h = 30 \cdot \sqrt{3} = 51.96 \text{ m}$$

5

Amb les dades del dibuix següent, calcula l'alçada de l'escala.

Sigui "h" l'alçada de l'escala.

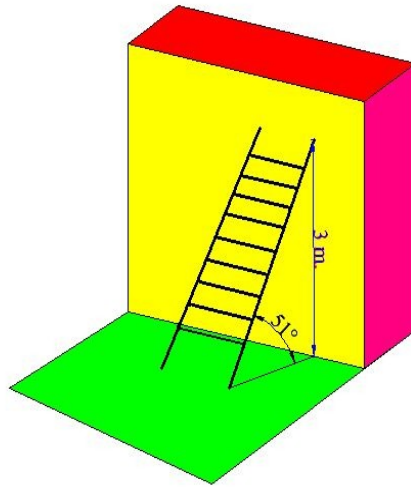
Il·lustració 2: escala de mà recolçada a una paret

$$\sin 51^\circ = \frac{3}{h}$$

$$h = \frac{3}{\sin 51^\circ}$$

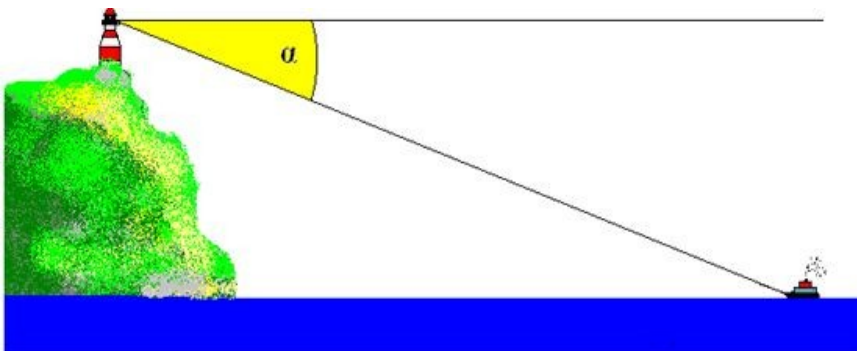
$$h = \frac{3}{0.7771}$$

$$h = 3.86 \text{ m}$$



6

Des de un far es visualitza un vaixell que necessita ajut i és imprescindible saber a quina distància de la costa es troba. Se sap que l'angle α és de 10° i el far està situat a 150 m sobre el nivell del mar.



Anomenem:

h= altura del far

d= distància del vaixell a la costa

La raó trigonomètrica que relaciona d, h i α és la tangent.

$$\tan \alpha = \frac{h}{d}$$

$$\tan 10^\circ = \frac{150}{d}$$

$$d = \frac{150}{\tan 10^\circ}$$

$$d = \frac{150}{0.1763}$$

$$d = 850.69 \text{ m}$$

El coneixement de la Trigonometria permet solucionar el càlcul de la distància entre punts inaccessibles:



- 7 Expressa en radians, als angles expressats en graus sexagesimals.
- a) 45°
 - b) 210°

Per canviar d'unitats de mesura s'ha de recordar l'equivalència següent:

$$2 \cdot \pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\text{a) } 45^\circ \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{90 \cdot \pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{\pi \text{ rad}}{4} = 0.7853 \text{ rad}$$

$$\text{b) } 210^\circ \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{420 \cdot \pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{7 \cdot \pi}{6} \text{ rad} = 3.665 \text{ rad}$$

Exercicis proposats:

1. Des d'un far col·locat a 40m sobre el nivell del mar l'angle de depressió d'un vaixell és de 55° . A quina distància del far es troba el vaixell?

2. En un tros de carretera la inclinació és de 6° . A quina alçada puja la carretera en 42m mesurats sobre la mateixa carretera?

3. Una escala de mà està repenjada a la paret d'un edifici, de manera que del peu de l'escala a l'edifici hi ha 12m. A quina altura del terra es troba l'extrem superior de l'escala i quina és la seva longitud si aquesta forma un angle de 70° amb el terra?