5 # Resolució de triangles

En context (pàg. 125)

a) Resposta suggerida:

Un exemple de civilització podria ser l'egípcia, que podem trobar en la pàgina web següent:

http://links.edebe.com/nat

Es pot ampliar la resposta buscant més informació sobre altres civilitzacions.

b) Resposta oberta a manera de reflexió individual, que pot servir d'introducció a la resolució de triangles.

c) Resposta suggerida: Si dibuixem un triangle sagrat egipci els catets del qual mesurin 3 cm i 4 cm, i la seva hipotenusa, 5 cm, la seva recta d'Euler parteix del vèrtex amb l'angle recte fins al mig exacte de la hipotenusa. El vèrtex de l'angle recte és l'ortocentre i a la meitat de la hipotenusa hi ha el circumcentre, que permet traçar la circumferència que circumscriu el triangle. Aquesta recta divideix el triangle en dos triangles isòsceles, els angles dels quals no són idèntics.

Fixa-t'hi (pàg. 126)

— Possible seqüència:

$$\widehat{B} = 90° - \widehat{C}$$

$$\cos\widehat{C} = \frac{b}{a} \rightarrow b = a \cdot \cos\widehat{C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Recorda (pàg. 127)

— Angle agut → $\widehat{C}$ i hipotenusa → a:

$$\widehat{B} = 90° - \widehat{C}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a} \rightarrow c = a \cdot \cos\widehat{B}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

— Angle agut → $\widehat{C}$ i catet oposat → c:

$$\widehat{B} = 90° - \widehat{C}$$

$$\sin\widehat{C} = \frac{c}{a} \rightarrow a = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

— Angle agut → $\widehat{C}$ i catet contigu → b:

$$\widehat{B} = 90° - \widehat{C}$$

$$\cos\widehat{C} = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{\cos\widehat{C}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

— Els dos catets → b i c:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow B = \text{arc tg}\left(\frac{b}{c}\right) \rightarrow \widehat{C} = 90 - \widehat{B}$$

— Un catet → b i la hipotenusa → a:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a} \rightarrow B = \text{arc cos}\left(\frac{c}{a}\right) \rightarrow \widehat{C} = 90 - \widehat{B}$$

<u>Nota:</u> Hi ha més possibilitats de seqüències per a resoldre cada apartat.

Fixa-t'hi (pàg. 127)

De l'exemple 2 sabem que a = 15,62 cm, b = 10 cm i c = 12 cm. Utilitzem el cosinus, per exemple, per a trobar els angles del triangle:

$$\cos\widehat{C} = \frac{b}{a} = \frac{10}{15{,}62} = 0{,}64 \Rightarrow \widehat{C} = \text{arc cos}(0{,}64) = 50°\,13'$$

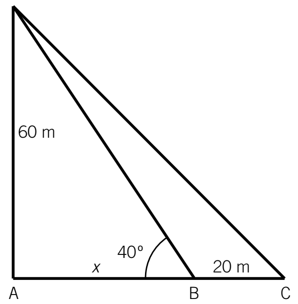
$$\widehat{B} = 90° - \widehat{C} = 90° - 50°\,13' = 39°\,47'$$

— No hem obtingut exactament el mateix resultat que utilitzant la tangent. Això es deu a l'aproximació que es faci del resultat de les raons trigonomètriques.

— Per a assegurar un resultat més exacte, hauríem d'aproximar el resultat amb el màxim nombre de decimals possible.

Problemes resolts (pàgs. 133 i 134)

1. El dibuix següent ens ajudarà a entendre la situació del problema:



a) Per a calcular l'angle de la visual des del nou punt, necessitem el valor de la distància que originalment hi havia entre la persona i l'estàtua.

$$\text{tg}\,40° = \frac{60}{x} = 0{,}839 \Rightarrow x = \frac{60}{0{,}839} = 71{,}5\,\text{m}$$

$$\text{tg}\,\widehat{C} = \frac{60}{x + 20} = \frac{60}{71{,}5 + 20} = \frac{60}{91{,}5}$$

$$\widehat{C} = \text{arc tg}\left(\frac{60}{91{,}5}\right) = 33°\,15'\,16''$$

Per tant, l'angle visual és de 33° 15' 16".

b) Com hem calculat en l'apartat anterior, la distància que originalment hi havia entre la persona i l'estàtua és de 71,5 m.

2. Sabem que el cartabó té forma de triangle rectangle i que els seus angles mesuren 30° i 60°. Aleshores:

a) Catet (y): $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot \operatorname{tg} 60° = x\sqrt{3}$

Hipotenusa (z): $\cos 60° = \dfrac{x}{z} \Rightarrow z = \dfrac{x}{\cos 60°} = \dfrac{x}{1/2} = 2x$

b) Catet (x): $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{x}{y} \Rightarrow x = y \cdot \operatorname{tg} 30° = \dfrac{y\sqrt{3}}{3}$

Hipotenusa (z): $\cos 30° = \dfrac{y}{z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{\cos 30°} = \frac{y}{\sqrt{3}/2} = \frac{2y\sqrt{3}}{3}$$

3. Resolem el triangle *ACD* per trobar el costat *AC:*

$$\widehat{A} = 180° - \widehat{C} - \widehat{D} \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 69° - 39° = 72°$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \widehat{D}} = \frac{\overline{CD}}{\sin \widehat{A}} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\sin 39°} = \frac{180}{\sin 72°} \Rightarrow \overline{AC} = 119{,}11\,\text{m}$$

Fem el mateix amb el triangle *BCD* per trobar el costat *BD*:

$$\widehat{B} = 180° - \widehat{C} - \widehat{D} \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 40° - 71° = 69°$$

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \widehat{C}} = \frac{\overline{CD}}{\sin \widehat{B}} \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\sin 40°} = \frac{180}{\sin 69°} \Rightarrow \overline{BD} = 123{,}93\,\text{m}$$

Seguim amb el triangle *ACE* i calculem el costat *AE,* en què *E* és el punt d'intersecció entre els costats *BC* i *AD:*

$$\widehat{E} = 180° - \widehat{A} - \widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 72° - 29° = 79°$$

$$\frac{\overline{AE}}{\sin \widehat{C}} = \frac{\overline{AC}}{\sin \widehat{E}} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\sin 29°} = \frac{119{,}11}{\sin 79°} \Rightarrow \overline{AE} = 58{,}83\text{ m}$$

Resolem el triangle *BDE* per calcular el costat *BE*:

$$\widehat{E} = 180° - \widehat{B} - \widehat{D} \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 69° - 32° = 79°$$

$$\frac{\overline{BE}}{\sin \widehat{D}} = \frac{\overline{BD}}{\sin \widehat{E}} \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\sin 32°} = \frac{123{,}93}{\sin 79°} \Rightarrow \overline{BE} = 66{,}9\,\text{m}$$

Finalment, per trobar la distància entre *A* i *B,* apliquem el teorema del cosinus en el triangle *ABE:*

$$\widehat{E}' = 180° - 79°$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{BE} \cdot \cos \widehat{E} \Rightarrow \overline{AB}^2 = 58{,}83^2 +$$
$$+ 66{,}9^2 - 2 \cdot 58{,}83 \cdot 66{,}9 \cdot \cos 101° \Rightarrow \overline{AB} = 97{,}15\,\text{m}$$

4. Per saber la distància recorreguda en mitja hora, calculem la distància entre el far *A* i el punt *C,* i hi restem la distància entre el far *A* i el punt *C'*. Distància, *x,* entre el far *A* i *C:*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 62° = \dfrac{x}{h} \\ \operatorname{tg} 56° = \dfrac{15 - x}{h} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h = \dfrac{x}{\operatorname{tg} 62°} \\ h = \dfrac{15 - x}{\operatorname{tg} 56°} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{tg} 62°} = \frac{15 - x}{\operatorname{tg} 56°}$$

$$\Rightarrow x = 8{,}388\text{ km}$$

Distància, *y,* entre el far *A* i *C':*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 48° = \dfrac{y}{h} \\ \operatorname{tg} 80° = \dfrac{15 - y}{h} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h = \dfrac{y}{\operatorname{tg} 48°} \\ h = \dfrac{15 - y}{\operatorname{tg} 80°} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{\operatorname{tg} 48°} = \frac{15 - y}{\operatorname{tg} 80°}$$

$$y = 2{,}456\,\text{km}$$

Restem aquestes dues distàncies i tenim la distància recorreguda pel vaixell en mitja hora:

$$\overline{CC'} = x - y = 8{,}388 - 2{,}456 = 5{,}932\,\text{km}$$

Calculem ara la velocitat a la qual navega el vaixell:

$$v = \frac{e}{t} \Rightarrow v = \frac{5{,}932\,\text{km}}{0{,}5\,\text{h}} = 11{,}864\,\text{km/h}$$

Exercicis i problemes (pàgs. 135 a 138)

1 RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES (Pàgs. 135 i 136)

5. Un triangle rectangle compleix:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \widehat{A} = 90°,\ \widehat{B} + \widehat{C} = 90°$$

a) $a^2 = b^2 + c^2 \to 10^2 = 8^2 + 6^2 \to 100 = 64 + 36 \to 100 = 100$

Així doncs, aquest triangle és rectangle.

b) $a^2 = b^2 + c^2 \to 15^2 = 10^2 + 10^2 \to 225 \neq 200$

Per tant, aquest triangle no és rectangle.

c) $a^2 = b^2 + c^2 \to 136^2 = 88^2 + 105^2 \to 18\,496 \neq 18\,769$

Aleshores, aquest triangle no és rectangle.

d) $\widehat{B} = \widehat{C} = 45° \to \widehat{B} + \widehat{C} = 45° + 45° = 90°$

Per tant, aquest triangle és rectangle.

e) $\widehat{B} = 33°,\ \widehat{C} = 66° \to \widehat{B} + \widehat{C} = 33° + 66° = 99° \neq 90°$

Aquest triangle no és rectangle.

6. En un triangle rectangle, el costat més gran és *a,* la seva hipotenusa. Complirà que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

En el nostre cas:

$$40^2 = 1\,600;\ 20^2 = 400;\ 30^2 = 900$$

Veiem que, en aquest triangle, $a^2 \neq b^2 + c^2$, per tant, no és rectangle.

7. Siguin $\widehat{B} = 40°$, $b = 20$ cm, c = catet i a = hipotenusa. Com que el triangle és rectangle, sabem que l'angle $\widehat{A} = 90°$.

$$\widehat{C} = 90° - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{C} = 90° - 40° = 50°$$

$$\operatorname{tg} 40° = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\operatorname{tg} 40°} = \frac{20}{0{,}839} = 23{,}84\,\text{cm}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{20^2 + 23{,}84^2} = 31{,}11\,\text{cm}$$

8. Siguin $\widehat{C} = 52°\,5'\,43''$, $b = 3{,}5$ cm, c = catet i a = hipotenusa. Com que el triangle és rectangle, sabem que l'angle $\widehat{A} = 90°$.

$$\widehat{B} = 90° - \widehat{C} \Rightarrow \widehat{B} = 90° - 52° 5' 43'' = 37° 54' 17''$$

$$\text{tg}\left(52° 5' 43''\right) = \frac{c}{b} \Rightarrow c = 3{,}5 \cdot \text{tg}\left(52° 5' 43''\right) = 4{,}5\,\text{cm}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{3{,}5^2 + 4{,}5^2} = 5{,}7\,\text{cm}$$

9. Siguin $b = 12$ cm, $c = 9$ cm i a = hipotenusa.

Com que el triangle és rectangle, sabem que l'angle $\widehat{A} = 90°$.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,\text{cm}$$

$$\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{b}{c} = \frac{12}{9} \Rightarrow \widehat{B} = \text{arc tg}\left(\frac{12}{9}\right) = 53° 8'$$

$$\widehat{C} = 90° - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{C} = 90° - 53° 8' = 36° 52'$$

10. D'una banda, s'ha de complir que:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \Rightarrow \widehat{C} = 180° - 40° - 40° = 100°$$

Hi apliquem el teorema del sinus, i podem calcular els valors dels costats iguals:

$$\frac{\sin 100°}{12\text{ cm}} = \frac{\sin 40°}{a} \rightarrow a = 7{,}83\text{ cm}$$

11. En un triangle rectangle, es compleix el següent:

$$a^2 = b^2 + c^2,\ h^2 = m \cdot n,\ b^2 = a \cdot n,\ c^2 = a \cdot m$$

a) $h^2 = m \cdot n \rightarrow 12^2 = 4 \cdot 36 \rightarrow 144 = 144$

Per tant, és un triangle rectangle.

b) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 27^2 - 9^2 = 648$

$c^2 = a \cdot m \rightarrow a^2 - b^2 = 27 \cdot 3 \rightarrow 648 \neq 81$

Així doncs, aquest triangle no és rectangle.

c) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 40^2 - 20^2 = 1\,200$

$b^2 = a \cdot n \rightarrow a^2 - c^2 = 40 \cdot 12 \rightarrow 1\,200 \neq 480$

Per tant, aquest triangle no és rectangle.

d) $h^2 = m \cdot n \rightarrow 16^2 = 14 \cdot 10 \rightarrow 256 \neq 140$

Per tant, no és un triangle rectangle.

12. Com que el triangle format és rectangle $\widehat{A} = 90°$. Siguin $c = 12$ m, $\widehat{B} = 90°$, b = altura antena i a = longitud cable.

$$\widehat{C} = 90° - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{C} = 90° - 48° = 42°$$

$$\text{tg}\,48° = \frac{b}{c} = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12 \cdot \text{tg}\,48° = 13{,}33\text{ m}$$

$$\cos 48° = \frac{c}{a} = \frac{12}{a} \Rightarrow a = \frac{12}{\cos 48°} = 17{,}93\text{ m}$$

13. Com que el triangle és rectangle, $\widehat{B} = 90°$.

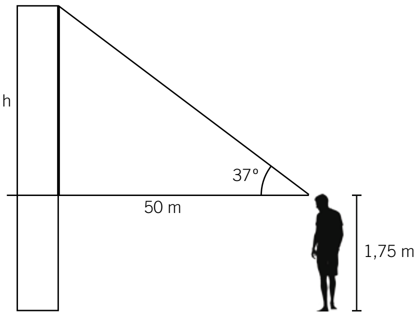
$$\widehat{C} = 90° - \widehat{A} \Rightarrow \widehat{C} = 90° - 20° = 70°$$

$$\sin 70° = \frac{h}{a} = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{10}{\sin 70°} = 10{,}64\,\text{cm}$$

$$\sin 20° = \frac{h}{c} = \frac{10}{c} \Rightarrow c = \frac{10}{\sin 20°} = 29{,}24\,\text{cm}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{10{,}64^2 + 29{,}24^2} = 31{,}12\,\text{cm}$$

14. Considerem el dibuix següent:



$$\text{tg}\,37° = \frac{h}{50} \Rightarrow h = 50 \cdot \text{tg}\,37° = 37{,}68$$

Per tant, l'altura de la xemeneia serà la suma del valor anterior més l'alçada de l'observador.

Així, l'altura de la xemeneia és 39,43 m.

15. Utilitzant l'aplicació de l'enllaç, resulta que els catets del triangle rectangle mesuren 2,6837 cm i 1,7428, i l'angle és de 33º.

16. Si fem servir l'aplicació que trobem en l'enllaç proposat en aquest exercici, resulta que el catet mesura 7,15 cm, i la hipotenusa, 9,33 cm i els angles són de 90º i 50º.

17. Sigui a la longitud de cada rampa i b la distància que hi ha des de la rampa fins a la riba del riu.

a) $\sin 16° = \dfrac{3}{a} \Rightarrow a = \dfrac{3}{\sin 16°} = 10{,}88$

Per tant, la longitud de cada rampa és de 10,88 m.

b) $\text{tg}\ 16° = \dfrac{3}{b} \Rightarrow b = \dfrac{3}{\text{tg}\ 16°} = 10{,}46$

Per això, la distància que hi ha des de la rampa fins a la riba del riu és de 10,46 m.

18. La longitud de l'escala seria la hipotenusa del triangle rectangle format quan es recolza contra la paret.

L'altura de 6 m és el costat oposat a l'angle (A) d'inclinació respecte del terra.

$$\sin \widehat{A} = \frac{6}{7{,}5} = 0{,}8 \Rightarrow \widehat{A} = \text{arc sin}\left(0{,}8\right) = 53° 8'$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{7{,}5^2 - 6^2} = 4{,}5$$

Aleshores, l'angle d'inclinació de l'escala respecte del terra és de 53º 8' i la distància que hi ha entre la base de l'escala i la paret és de 4,5 m.

19. La longitud de la cinta transportadora seria la hipotenusa del triangle rectangle format amb el desnivell de 40 m.

$$\sin \widehat{A} = \frac{40}{360} \Rightarrow \widehat{A} = \text{arc sin}\left(\frac{40}{360}\right) = 6° 22' 46''$$

Per tant, l'angle d'elevació que té la cinta és de 6º 22' 46".

20. Els triangles equilàters tenen tots els costats iguals; per tant, el triangle rectangle tindrà com a hipotenusa a = 16 cm, i un catet és c = 8 cm. Com que un dels angles és rectangle, $\widehat{A} = 90°$. Aleshores:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{16^2 - 8^2} = 13{,}86\,\text{cm}$$
$$\cos\widehat{B} = \frac{8}{16} = 0{,}5 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arc}\cos(0{,}5) = 60°$$
$$\widehat{C} = 90° - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{C} = 90° - 60° = 30°$$

21. Hi apliquem la fórmula de l'àrea d'un triangle, i tenim:

$$\left.\begin{array}{l} 96 = \dfrac{b\cdot c}{2} \Rightarrow b\cdot c = 192 \\ 20^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 400 = b^2 + c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 16\,\text{m},\ c = 12\,\text{m}$$
$$\cos\widehat{B} = \frac{12}{20} = 0{,}6 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arc}\cos(0{,}6) = 53°\,7'\,48''$$
$$\widehat{C} = 90° - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{C} = 90° - 53°\,7'\,48'' = 36°\,52'\,12''$$

22. L'altura del trapezi forma un triangle rectangle amb un dels costats que no són paral·lels, que mesura 6 cm i és la hipotenusa d'aquest triangle. La base d'aquest triangle format és la meitat de la diferència entre la base gran i la base petita del trapezi, és a dir, (20 – 12)/2 = 4 m. Així doncs:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{6^2 - 4^2} = 4{,}47\,\text{m}$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{6} \Rightarrow \alpha = \text{arc}\cos\left(\frac{4}{6}\right) = 48°\,11'$$

Per tant, l'altura del trapezi és 4,47 m i l'angle respecte de la base mesura 48º 11'.

23. Calculem en primer lloc la diagonal, *a,* de la base de l'ortoedre:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Sigui α l'angle que forma la diagonal de la base amb la diagonal de l'ortoedre. Aquestes dues diagonals formen un triangle rectangle amb l'altura de l'ortoedre que mesura 5 m. Aleshores:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(1) = 45°$$

Per tant, l'angle que formen les diagonals és de 45º.

24. Sigui x la distància que hi ha des de l'extrem inferior de l'escala fins a la paret, aleshores la longitud de l'escala és $5x$. Calculem l'altura de la paret aplicant el teorema de Pitàgores:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{(5x)^2 - x^2} = \sqrt{24x^2} = 2x\sqrt{6}$$

Calculem els angles del triangle rectangle format sabent que un d'ells mesura 90º.

$$\cos\alpha = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = \text{arc}\cos\left(\frac{1}{5}\right) = 78°\,28'\,47''$$
$$\sin\beta = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \beta = \text{arc}\sin\left(\frac{1}{5}\right) = 11°\,32'\,13''$$

25. Calculem els costats del triangle:

$$b^2 = a\cdot n \Rightarrow b^2 = \overline{CB}\cdot 9 \Rightarrow \overline{CB} = \frac{15^2}{9} = 25\,\text{cm}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{\overline{CB}^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\,\text{cm}$$

Calculem ara els angles sabent que, com que un angle és rectangle, $\widehat{A} = 90°$.

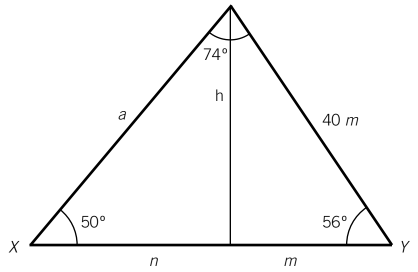
$$\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{15}{20} = 0{,}75 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arc tg}(0{,}75) = 36°\,52'$$
$$\text{tg}\,\widehat{C} = \frac{20}{15} \Rightarrow \widehat{C} = \text{arc tg}\left(\frac{20}{15}\right) = 53°\,8'$$

26. La diagonal forma un triangle rectangle amb la base i l'altura. Aleshores:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{12}{20} = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(0{,}6) = 30°\,58'$$
$$\text{tg}\,\beta = \frac{20}{12} \Rightarrow \beta = \text{arc tg}\left(\frac{20}{12}\right) = 59°\,2'$$

27. Els angles d'un triangle compleixen que els tres han de sumar 180º, així doncs, l'angle que ens falta és de 180º – 50º – 56º = 74º.

D'altra banda, tracem l'altura del triangle per formar dos triangles rectangles.



$$\cos 56° = \frac{m}{40} \Rightarrow m = 40\cdot\cos 56° = 22{,}37\,\text{cm}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow h = \sqrt{40^2 - 22{,}37^2} = 33{,}16\,\text{cm}$$
$$\text{tg}\,50° = \frac{h}{n} = \frac{33{,}16}{n} \Rightarrow n = \frac{33{,}16}{\text{tg}\,50°} = 27{,}82\,\text{cm}$$
$$\sin 50° = \frac{h}{a} = \frac{33{,}16}{a} \Rightarrow a = \frac{33{,}16}{\sin 50°} = 43{,}29\,\text{cm}$$
$$\Rightarrow m + n = 22{,}37 + 27{,}82 = 50{,}19\,\text{cm}$$

Així, les longituds dels costats del triangle obliquangle són 50,19 cm i 43,29 cm.

28. Els angles d'un triangle compleixen que els tres han de sumar 180º, per tant, l'angle que ens falta és de 180º – 35º – 85º = 60º.

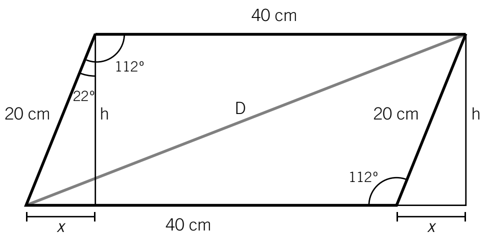
D'altra banda, tracem l'altura del triangle per formar dos triangles rectangles.

Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}\,35° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg}\,85° = \dfrac{h}{30 - x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h = 0{,}7x \\ h = 11{,}43(30 - x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$0{,}7x = 11{,}43(30 - x) \Rightarrow x = 28{,}3\,\text{cm} \Rightarrow h = 19{,}8\,\text{cm}$$
$$\sin 85° = \frac{h}{a} = \frac{19{,}8}{a} \Rightarrow a = \frac{19{,}8}{\sin 85°} = 19{,}9\,\text{cm}$$
$$\sin 35° = \frac{h}{c} = \frac{19{,}8}{c} \Rightarrow c = \frac{19{,}8}{\sin 35°} = 34{,}5\,\text{cm}$$

Així, les longituds dels costats del triangle obliquangle són 19,9 cm i 34,5 cm.

29. Considerem el dibuix següent per orientar-nos sobre la resolució de l'exercici.



Calculem l'altura, *h,* del romboide:

$$\cos 22° = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 20 \cdot \cos 22° = 18{,}54\ \text{cm}$$

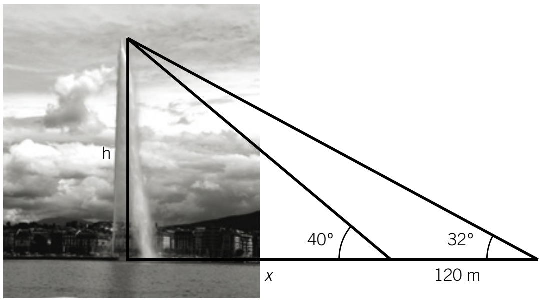
Ara, hem de trobar el valor de la diagonal gran, *D:*

$$\text{tg}\, 22° = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 20 \cdot \text{tg}\, 22° = 8{,}08\ \text{cm}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow D^2 = h^2 + (40 + x)^2 \Rightarrow D^2 = 18{,}54^2 + 48{,}08^2$$

$$D = 51{,}53\ \text{cm}$$

30. Considerem el dibuix següent per resoldre l'exercici:

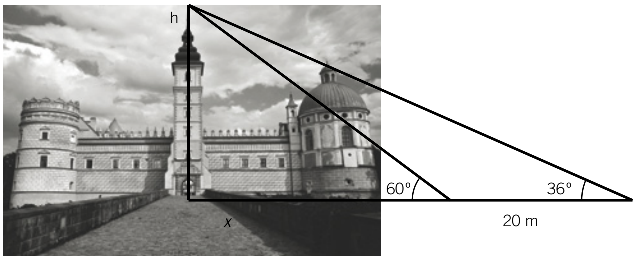


$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\, 40° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg}\, 32° &= \frac{h}{120 + x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} h &= x \cdot \text{tg}\, 40° \\ h &= \text{tg}\, 32° \cdot (120 + x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 350{,}017\ \text{m} \Rightarrow h = 293{,}699\ \text{m}$$

Per tant, l'altura del doll d'aigua és de 293,699 m.

31. Considerem el dibuix següent per resoldre l'exercici:

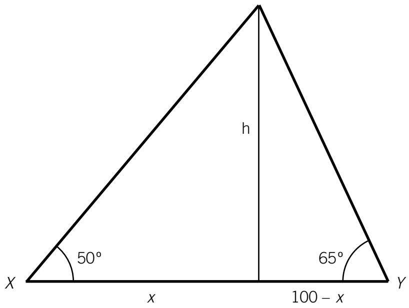


$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\, 60° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg}\, 36° &= \frac{h}{20 + x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} h &= x \cdot \text{tg}\, 60° \\ h &= \text{tg}\, 36° \cdot (20 + x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x = 14{,}45\ \text{m} \Rightarrow h = 25{,}03\ \text{m}$$

Per tant, la torre té una altura de 25,03 m.

32. Considerem la figura següent:



a) Calculem la distància de cada persona a la torre:

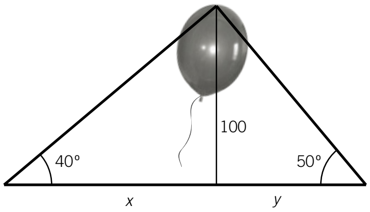
$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\, 50° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg}\, 65° &= \frac{h}{100 - x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} h &= x \cdot \text{tg}\, 50° \\ h &= \text{tg}\, 65° (100 - x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 64{,}28$$

Aleshores, la persona situada en el punt *X* està a una distància de la torre de 64,28 m, i la persona situada en el punt *Y* està a una distància de la torre de 100 – 64,28 m = = 35,72 m.

b) Per a calcular l'altura de la torre, només hem de substituir el valor de *x* en l'equació anterior $h = x \cdot \text{tg}\, 50°$.

$$h = x \cdot \text{tg}\, 50° = 64{,}28 \cdot \text{tg}\, 50° = 76{,}6\ \text{m}$$

33. Considerem aquesta figura per resoldre l'exercici:



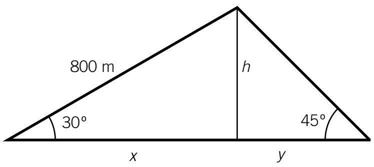
$$\text{tg}\, 40° = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{100}{\text{tg}\, 40°} = 119{,}18\ \text{m}$$

$$\text{tg}\, 50° = \frac{100}{y} \Rightarrow y = \frac{100}{\text{tg}\, 50°} = 83{,}9\ \text{m}$$

$$x + y = 119{,}18\ \text{m} + 83{,}9\ \text{m} = 203{,}08\ \text{m}$$

La distància que hi ha entre les dues persones és de 203,08 m.

34. Tenint en compte el dibuix següent, resolem l'exercici.



$$\sin 30° = \frac{h}{800} \Rightarrow h = 800 \cdot \sin 30° = 400\ \text{m}$$

$$\text{tg}\, 30° = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\text{tg}\, 30°} = \frac{400}{\text{tg}\, 30°} = 692{,}82\ \text{m}$$

$$\text{tg}\, 45° = \frac{h}{y} \Rightarrow y = \frac{h}{\text{tg}\, 45°} = \frac{400}{\text{tg}\, 45°} = 400\ \text{m}$$

$$x + y = 692{,}82\ \text{m} + 400\ \text{m} = 1092{,}82\ \text{m}$$

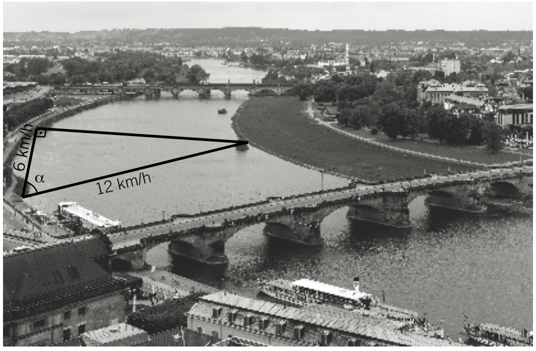
Per tant, l'altura de la torre és de 400 m i la distància entre les dues persones és de 1 092,82 m.

35. Calculem l'angle del triangle rectangle format per la corda de 4 cm.

$$\cos\alpha = \frac{4}{10} \Rightarrow \alpha = \text{arc}\cos\left(\frac{4}{10}\right) = 66^\circ\, 25'$$

Per tant, l'angle $\widehat{AOB}$ serà el doble de l'angle calculat anteriorment. És a dir, és de 132° 50' = 2 · (66° 25')

36. Considerem el següent dibuix que representa la situació de l'exercici:



a) $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow x = \sqrt{12^2 + 6^2} = 13{,}42$

La velocitat real de la barca és de 13,42 km/h.

b) $\text{tg}\,\alpha = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}(2) = 63^\circ\, 26'$

L'angle que desviarà la trajectòria de la barca respecte del corrent del riu mesura 63° 26'.

2 TEOREMA DEL SINUS I DEL COSINUS (Pàgs. 137 i 138)

37. Hi apliquem el teorema del sinus: $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$

a) $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{3{,}02}{\sin 35^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ} \Rightarrow 5{,}26 \neq 4$

Per tant, aquests valors no corresponen a un mateix triangle.

b) $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{4}{\sin 36^\circ} = \frac{6}{\sin 72^\circ\, 23'} \Rightarrow 6{,}81 \neq 6{,}3$

Per tant, aquests valors no corresponen a un mateix triangle.

c) $\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{5}{\sin 48^\circ} = \frac{12}{\sin 89^\circ} \Rightarrow 6{,}73 \neq 12$

Per tant, aquests valors no corresponen a un mateix triangle.

d) $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{7}{\sin 37^\circ} = \frac{9}{\sin 50^\circ\, 42'} \Rightarrow 11{,}63 = 11{,}63$

Per tant, aquests valors corresponen a un mateix triangle.

38. Apliquem el teorema del sinus per resoldre el triangle:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{8{,}5}{\sin 65^\circ} = \frac{b}{\sin 88^\circ} \Rightarrow b = 9{,}37\,\text{cm}$$
$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 65^\circ - 88^\circ = 27^\circ$$
$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{9{,}37}{\sin 88^\circ} = \frac{c}{\sin 27^\circ} \Rightarrow c = 4{,}26\,\text{cm}$$

39. En primer lloc, trobem el tercer angle i després hi apliquem el teorema del sinus:

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 115^\circ = 20^\circ$$
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{30}{\sin 20^\circ} \Rightarrow a = 62{,}02\,\text{cm}$$
$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{b}{\sin 115^\circ} = \frac{30}{\sin 20^\circ} \Rightarrow b = 79{,}5\,\text{cm}$$

40. En primer lloc, trobem el tercer angle i després hi apliquem el teorema del sinus:

$$\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 40^\circ - 35^\circ = 105^\circ$$
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\sin 105^\circ} = \frac{3}{\sin 35^\circ} \Rightarrow a = 5{,}05\,\text{cm}$$
$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{3}{\sin 35^\circ} = \frac{c}{\sin 40^\circ} \Rightarrow c = 3{,}36\,\text{cm}$$

41. Calculem el tercer costat aplicant el teorema del cosinus i apliquem el teorema del sinus per trobar els altres angles.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 100^\circ} \Rightarrow a = 13{,}85\,\text{cm}$$
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \text{arc}\sin\left(\frac{8 \cdot \sin 100^\circ}{13{,}85}\right) = 34^\circ\, 41'$$
$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 100^\circ - 34^\circ\, 41' = 45^\circ\, 19'$$

42. Calculem el tercer costat aplicant el teorema del cosinus i apliquem el teorema del sinus per trobar els altres angles:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 72^\circ} \Rightarrow a = 19{,}4\,\text{cm}$$
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \text{arc}\sin\left(\frac{10 \cdot \sin 72^\circ}{19{,}4}\right) = 29^\circ\, 21'$$
$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 72^\circ - 29^\circ\, 21' = 78^\circ\, 39'$$

43. Calculem el tercer costat aplicant el teorema del cosinus i apliquem el teorema del sinus per trobar els altres angles:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 30^\circ} \Rightarrow a = 12{,}39\,\text{cm}$$
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \text{arc}\sin\left(\frac{10 \cdot \sin 30^\circ}{12{,}39}\right) = 23^\circ\, 48'$$
$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 23^\circ\, 48' = 126^\circ\, 12'$$

44. Calculem un angle aplicant el teorema del cosinus, i els altres, mitjançant el teorema del sinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \text{arc cos}\left(\frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7}\right)$$

$$\hat{A} = 44° 25'$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \text{arc sin}\left(\frac{6 \cdot \sin 44° 25'}{5}\right) = 57° 7'$$

$$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180° - 44° 25' - 57° 7' = 78° 28'$$

45. Hem d'aplicar el teorema del sinus i identificar si, amb aquestes dades, podem construir un sol triangle o dos triangles:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{16 \cdot \sin 33°}{12} = 0{,}7262$$

Així, els angles suplementaris que compleixen aquesta relació són: $\widehat{A_1} = 46{,}57°$, $\widehat{A_2} = 133{,}43°$. Com que $\widehat{A_2} + \hat{B} = 166{,}43° <$ $< 180°$, podem construir dos triangles diferents amb aquestes mesures.

Triangle 1:

$$\hat{B} = 33°,\ \hat{A} = 46{,}57° \Rightarrow \hat{C} = 180° - (33° + 46{,}57°) = 100{,}43°$$

$$a = 16,\ b = 12 \Rightarrow c^2 = 16^2 + 12^2 -$$
$$- 2 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \cos 100{,}43° = 469{,}54 \Rightarrow c = 21{,}67\text{ cm}$$

Triangle 2:

$$\hat{B} = 33°,\ \hat{A} = 133{,}43° \Rightarrow \hat{C} = 180° - (33° + 133{,}43°) = 13{,}57°$$

$$a = 16,\ b = 12 \Rightarrow c^2 = 16^2 + 12^2 - 2 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \cos 13{,}57° =$$
$$= 26{,}71 \Rightarrow c = 5{,}17\text{ cm}$$

46. Hem d'aplicar el teorema del sinus i identificar si, amb aquestes dades, podem construir un sol triangle o dos triangles.

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{54 \cdot \sin 15°}{43} = 0{,}33$$

Per tant, els angles suplementaris que compleixen aquesta relació són $\widehat{B_1} = 18{,}97°$, $\widehat{B_2} = 161{,}03°$. Com que $\widehat{B_2} + \hat{C} =$ $= 176{,}03° < 180°$, podem construir dos triangles diferents que verifiquin aquestes condicions.

Triangle 1:

$$\hat{C} = 15°,\ \hat{B} = 18{,}97° \Rightarrow \hat{A} = 180° - (15° + 18{,}97°) = 146{,}03°$$

$$b = 54,\ c = 43 \Rightarrow a^2 = 54^2 + 43^2 - 2 \cdot 54 \cdot 43 \cdot \cos 146{,}03°$$
$$\Rightarrow a = 92{,}83\text{ cm}$$

Triangle 2:

$$\hat{C} = 15°,\ \hat{B} = 161{,}03° \Rightarrow \hat{A} = 180° - (15° + 161{,}03°) = 3{,}97°$$

$$b = 54,\ c = 43 \Rightarrow a^2 = 54^2 + 43^2 - 2 \cdot 54 \cdot 43 \cdot \cos 3{,}97°$$
$$\Rightarrow a = 11{,}5\text{ cm}$$

47. Hi apliquem el teorema del sinus i identifiquem si, amb aquestes dades, podem construir un sol triangle o dos triangles.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{22 \cdot \sin 60°}{20} = 0{,}95$$

Aleshores, els angles suplementaris que compleixen aquesta relació són: $\widehat{B_1} = 72{,}29°$, $\widehat{B_2} = 107{,}71°$. Com que $\widehat{B_2} + \hat{C} =$ $= 167{,}71° < 180°$, podem construir dos triangles diferents que verifiquin aquestes condicions.

Triangle 1:

$$\hat{A} = 60°,\ \hat{B} = 72{,}29° \Rightarrow \hat{C} = 180° - (60° + 72{,}29°) = 47{,}71°$$

$$a = 20,\ b = 22 \Rightarrow c^2 = 20^2 + 22^2 - 2 \cdot 20 \cdot 22 \cdot \cos 47{,}71°$$
$$\Rightarrow c = 17{,}08\text{ cm}$$

Triangle 2:

$$\hat{A} = 60°,\ \hat{B} = 107{,}71° \Rightarrow \hat{C} = 180° - (60° + 107{,}71°) = 12{,}29°$$

$$a = 20,\ b = 22 \Rightarrow c^2 = 20^2 + 22^2 - 2 \cdot 20 \cdot 22 \cdot \cos 12{,}29°$$
$$\Rightarrow c = 4{,}92\text{ cm}$$

48. Siguin *a* la longitud de cada costat del pentàgon i *d* la longitud de la diagonal del pentàgon. En el triangle format pels dos costats i la diagonal, l'angle comprès entre tots dos costats és de 108° i, com que els angles del triangle han de sumar 180°, la suma dels altres dos ha de ser de 72°, i, com que es tracta d'un triangle isòsceles, els dos angles són iguals; és a dir, cadascun és de 36°. Així que, si hi apliquem el teorema del sinus, tenim:

$$\frac{a}{\sin 36°} = \frac{d}{\sin 108°} \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{\sin 108°}{\sin 36°} \Rightarrow \frac{d}{a} = 1{,}618033...$$

Per tant, la relació entre el costat del pentàgon i la seva diagonal és el nombre auri.

49. Siguin $a = 2$, $b = 3/2$ i $c = 1$. Utilitzem el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \dfrac{2}{\sin \hat{A}} = \dfrac{3/2}{\sin \hat{B}} \\ \dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \dfrac{2}{\sin \hat{A}} = \dfrac{1}{\sin \hat{C}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \hat{A} = \dfrac{4}{3} \sin \hat{B} \\ \sin \hat{A} = 2 \sin \hat{C} \end{cases}$$

Per tant, la relació del sinus de l'angle gran respecte als sinus dels altres angles és de 4/3 amb l'angle $\hat{B}$ i de 2 amb l'angle $\hat{C}$.

50. Siguin *r* el radi de la circumferència i *a* el costat de l'hexàgon regular. Els angles centrals de l'hexàgon són de 60°.

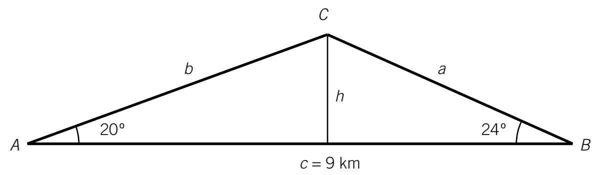
Hi apliquem el teorema del cosinus, i tenim:

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 60° \Rightarrow a^2 = 2r^2 - \cancel{2} \cdot r \cdot r \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow a^2 = 2r^2 - r^2 \Rightarrow a^2 = r^2 \Rightarrow a = r$$

Per tant, el radi de la circumferència és igual al costat de l'hexàgon.

51. Considerem el següent dibuix que descriu la situació de l'enunciat:



En primer lloc, calculem el tercer angle i, després, hi apliquem el teorema del sinus:

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 20^\circ - 24^\circ = 136^\circ$$

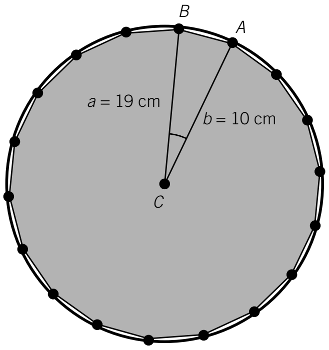
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{9}{\sin 136^\circ} \Rightarrow a = 4{,}43\,\text{km} = \overline{BC}$$

$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{b}{\sin 24^\circ} = \frac{9}{\sin 136^\circ} \Rightarrow b = 5{,}27\,\text{km} = \overline{AC}$$

Calculem l'altura a la qual vola l'avió:

$$\sin 24^\circ = \frac{h}{a} = \frac{h}{4{,}43} \Rightarrow h = 4{,}43 \cdot \sin 24^\circ = 1{,}802\ \text{km}$$

52. Tenint en compte el dibuix següent:



Calculem l'angle central del nostre polígon regular de 18 costats, que en aquest cas és l'angle $\hat{C}$:

$$\hat{C} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$$

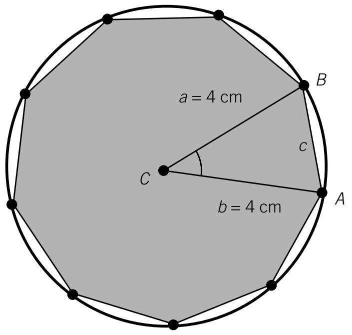
Ara, utilitzem el teorema del cosinus per a calcular el costat c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C} \Rightarrow c^2 = 10^2 + 10^2 -$$
$$- 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 20^\circ \Rightarrow c^2 = 12{,}06 \Rightarrow c = 3{,}47\,\text{cm}$$

53. Calculem la distància de B fins a C aplicant el teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{18^2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ} \Rightarrow a = 16{,}7\,\text{km}$$

54. Considerant el dibuix següent:



Calculem l'angle central del nostre polígon regular de 9 costats, que en aquest cas és l'angle $\hat{C}$:

$$\hat{C} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

Ara, utilitzem el teorema del cosinus per a calcular el costat c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C} \Rightarrow c^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 40^\circ$$
$$c^2 = 7{,}49 \Rightarrow c = 2{,}736\,\text{cm}$$

55. Com que ens pregunten sobre la distància al cap de dues hores, multipliquem per dos cadascuna de les velocitats dels vaixells. Aleshores, $a = 34$ milles nàutiques i $b = 52$ milles nàutiques. Calculem la distància entre tots dos vaixells aplicant el teorema del cosinus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$$
$$c^2 = 34^2 + 52^2 - 2 \cdot 34 \cdot 52 \cdot \cos 110^\circ \Rightarrow$$
$$c^2 = 5\,069{,}38 \Rightarrow c = 71{,}2\ \text{milles nàutiques}$$

56. Trobem el costat del triangle que ens falta per mitjà del teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow a^2 = 45^2 + 56^2 -$$
$$- 2 \cdot 45 \cdot 56 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow a = 51{,}391\,\text{m}$$

Amb la fórmula d'Heró, calculem l'àrea del triangle:

$$s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s = \frac{51{,}391 + 45 + 56}{2} = 76{,}1955$$
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$
$$= \sqrt{76{,}2(76{,}1955 - 51{,}391)(76{,}1955 - 45)(76{,}1955 - 56)} =$$
$$= 1091{,}19\,\text{m}^2$$

57. Trobem la distància que hi ha entre els punts B i C utilitzant el teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow a^2 = 400^2 + 350^2 -$$
$$- 2 \cdot 400 \cdot 350 \cdot \cos 40^\circ \Rightarrow a = 260{,}78\,\text{m}$$

58. Un rombe té tots els costats iguals; per tant, si dividim el perímetre del rombe entre quatre, tindrem el que mesura un costat. És a dir, el costat del rombe mesura 200 m. Amb la diagonal es formen dos triangles iguals dels quals coneixem els tres costats. Calculem els angles d'un d'aquests triangles:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow \hat{A} =$$
$$= \arccos\left(\frac{200^2 + 90^2 - 200^2}{2 \cdot 200 \cdot 90}\right) \Rightarrow \hat{A} = 77^\circ$$
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \arcsin\left(\frac{200 \cdot \sin 77^\circ}{200}\right) = 77^\circ$$
$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 77^\circ - 77^\circ = 26^\circ$$

Així doncs, el rombe tindrà dos angles de 26 ° i dos angles de 2 · 77° = 154°.

59. A partir del teorema del cosinus, trobem el valor de l'angle central del polígon:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \hat{A} = \arccos\left(\frac{r^2 + r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot r \cdot r}\right)$$
$$\Rightarrow \hat{A} = \arccos\left(\frac{5}{8}\right) = 51^\circ 19' 4''$$

60. Calculem la distància entre les ciutats A i C aplicant el teorema del cosinus:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \widehat{B} \Rightarrow b^2 = 100^2 + 150^2 -$$
$$- 2 \cdot 100 \cdot 150 \cdot \cos 120° \Rightarrow b = 217{,}94 \text{ km}$$

61. A partir de l'aplicació de l'enllaç que s'indica en l'enunciat, resulta que $a = 3{,}47$ cm, $\widehat{B} = 17° 50'$, $\widehat{C} = 32° 10'$.

62. Hem d'aplicar el teorema del sinus i identificar si, amb aquestes dades, podem construir un sol triangle, dos triangles o cap:

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} \Rightarrow \sin \widehat{B} = \frac{8{,}5 \cdot \sin 92°}{7} = 1{,}213$$

El sinus de qualsevol angle ha d'estar comprès entre els valors -1 i 1. En aquest cas, $\sin \widehat{B} = 1{,}213 > 1$; per tant, no hi ha cap triangle amb aquestes mesures.

63. Utilitzem el teorema del sinus i identifiquem si, amb aquestes dades, podem construir un sol triangle o dos triangles:

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow \sin \widehat{C} = \frac{7 \cdot \sin 67°}{6{,}5} = 0{,}991$$

Per tant, els angles suplementaris que compleixen aquesta relació són: $\widehat{C_1} = 82° 26' 32''$, $\widehat{C_2} = 97° 33' 28''$

$\widehat{C_1} + \widehat{B} = 149° 26' 32'' < 180°$ *y* $\widehat{C_2} + \widehat{B} = 164° 33' 28'' < 180° \Rightarrow$ Podem construir dos triangles diferents amb aquestes mesures.

64. Amb els dos costats de l'heptàgon i la seva diagonal més curta es forma un triangle en què l'angle α comprès entre els dos costats és:

$$\alpha = \frac{180° \cdot (n-2)}{n} = \frac{180° \cdot (7-2)}{7} = 128{,}57°$$

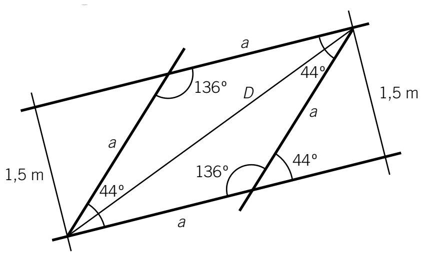
Els altres angles del triangle són iguals, ja que el triangle és isòsceles. És a dir, els angles β són:

$$\beta = \frac{180° - 128{,}57°}{2} = 25{,}72°$$

Hi apliquem el teorema del sinus, i trobem la relació entre el costat c de l'heptàgon i la seva diagonal més curta, d:

$$\frac{d}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{\sin 128{,}57°}{\sin 25{,}72°} \Rightarrow \frac{d}{c} = 1{,}8 \Rightarrow d \sim 1{,}8\, c$$

65. Considerem el dibuix següent per entendre la situació del problema:



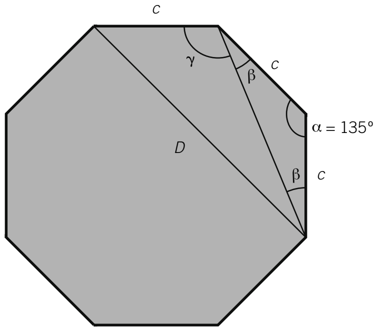
En primer lloc, calculem la longitud del costat del rombe:

$$\sin 44° = \frac{1{,}5}{a} \Rightarrow a = \frac{1{,}5}{\sin 44°} = 2{,}16 \text{ m}$$

Per a calcular la diagonal gran D del rombe, utilitzem el teorema del cosinus:

$$D^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 136° \Rightarrow D^2 = 2{,}16^2 + 2{,}16^2 -$$
$$- 2 \cdot 2{,}16 \cdot 2{,}16 \cdot \cos 136° \Rightarrow D = 4\, m$$

66. Tenint en compte la figura següent:



Els angles formats per dos costats de l'octàgon són:

$$\alpha = \frac{180° \cdot (n-2)}{n} = \frac{180° \cdot (8-2)}{8} = 135°$$

Per tant, els angles β són $\beta = \dfrac{180° - 135°}{2} = 22{,}5°$

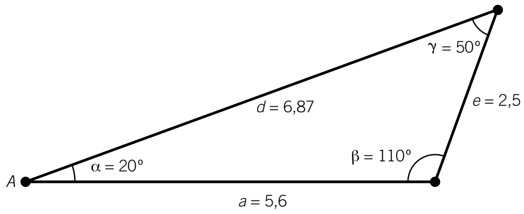
Amb aquesta informació, calculem la longitud del costat d:

$$d^2 = c^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c \cdot \cos 135° \Rightarrow d = 1{,}848\, c$$

Ara, mitjançant el teorema del cosinus, podem trobar la relació entre D i c sabent que $\gamma = 135° - 22{,}5° = 112{,}5°$

$$D^2 = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos 112{,}5° \Rightarrow D = 2{,}414\,21...\, c$$

67. Per a resoldre aquest exercici, utilitzem el programa GeoGebra, d'on resulta la figura següent amb els resultats:



68. Hem de calcular la distància que hi ha entre els dos vaixells a les 16 h.

El primer vaixell surt a les 9 h, de manera que haurà viatjat 7 hores.

El segon vaixell surt a les 11 h, per la qual cosa hauran transcorregut 5 hores de viatge.

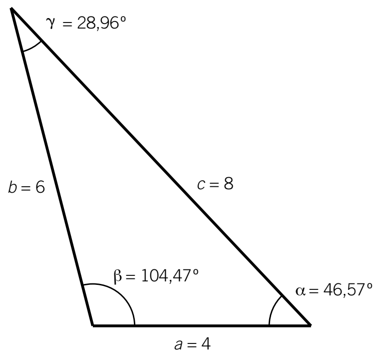
Per tant, $a = 112$ milles nàutiques i $a = 140$ milles nàutiques.

Calculem la distància entre tots dos vaixells aplicant el teorema del cosinus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \widehat{C} \Rightarrow c^2 = 112^2 + 140^2 -$$
$$- 2 \cdot 112 \cdot 140 \cdot \cos 130° \Rightarrow c = 208{,}96 \text{ milles nàutiques}$$

Com que un nus equival a 1852 m, tenim que la distància entre tots dos vaixells és de 368,98 km. Com que aquest valor és més gran que 200 km, els dos vaixells no podran contactar entre ells per ràdio a les 16 h.

69. Per a resoldre aquest exercici, utilitzem el programa GeoGebra, d'on resulta la figura següent amb els resultats:



70. Utilitzant el programa Cabri, s'observa que els angles del triangle són 77° 39' 36", 56° 4' 3" i 46° 16' 21".

SÍNTESI Pàg. 138

71. Com que el triangle és rectangle: $\widehat{A} = 90°$.

$$\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{h}{\overline{DB}} = \frac{2}{4,2} \Rightarrow \widehat{B} = \text{arc tg}\left(\frac{2}{4,2}\right) = 25°\,28'$$

$$\widehat{C} = 90° - 25°\,28' = 64°\,32'$$

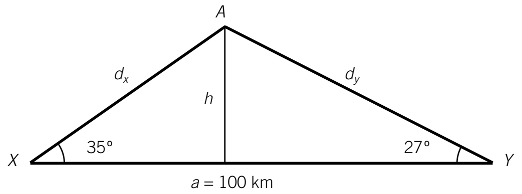
$$\cos(25°\,28') = \frac{4,2}{b} \Rightarrow b = \frac{4,2}{\cos(25°\,28')} = 4,65\,\text{cm}$$

$$\sin(64°\,32') = \frac{2}{c} \Rightarrow c = \frac{2}{\sin(64°\,32')} = 2,21\,\text{cm}$$

$$\text{tg}(64°\,32') = \frac{2}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{2}{\text{tg}(64°\,32')} = 0,95\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow a = \overline{CD} + \overline{DB} = 0,95\,\text{cm} + 4,2\,\text{cm} = 5,15\,\text{cm}$$

72. Considerem la següent figura que descriu la situació de l'enunciat:



En primer lloc, calculem el tercer angle i, després, hi apliquem el teorema del sinus:

$$\widehat{A} = 180° - \widehat{X} - \widehat{Y} \Rightarrow \widehat{C} = 180° - 35° - 27° = 118°$$

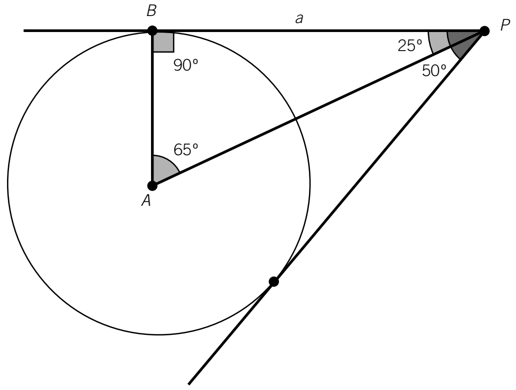
$$\frac{d_x}{\sin\widehat{Y}} = \frac{a}{\sin\widehat{A}} \Rightarrow \frac{d_x}{\sin 27°} = \frac{100}{\sin 118°} \Rightarrow d_x = 51,42\,\text{km}$$

$$\frac{d_y}{\sin\widehat{X}} = \frac{a}{\sin\widehat{A}} \Rightarrow \frac{d_y}{\sin 35°} = \frac{100}{\sin 118°} \Rightarrow d_y = 64,96\,\text{km}$$

Calculem l'altura a la qual vola l'avió:

$$\sin 35° = \frac{h}{d_x} = \frac{\text{h}}{51,42} \Rightarrow h = 51,42 \cdot \sin 35° = 29,49\,\text{km}$$

73. Considerem la figura següent:



A partir d'aquest dibuix, observem que el triangle format és rectangle i té com a angles:

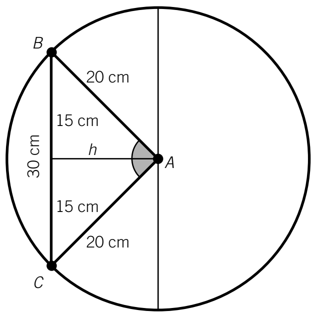
$$\widehat{B} = 90°,\ \widehat{P} = \frac{50°}{2} = 25°,\ \widehat{A} = 180° - \widehat{B} - \widehat{P} = 180° - 90° - 25° = 65°$$

Calculem el costat a del triangle:

$$\text{tg}\,25° = \frac{20}{a} \Rightarrow a = \frac{20}{\text{tg}\,25°} = 42,9\,\text{cm}$$

Per tant, la distància de P a cadascun dels punts de tangència és de 42,9 cm.

74. El dibuix següent ens pot ajudar a entendre més bé la situació del problema:



Calculem l'àrea del segment circular, l'àrea total i l'àrea de la meitat de la circumferència. Una vegada tinguem aquestes tres àrees, sumem la del sector circular i la de la meitat de la circumferència, restem aquest resultat a l'àrea total i tindrem l'àrea que busquem. L'àrea del segment circular és la resta entre l'àrea del sector circular ABC i l'àrea del triangle ABC.

$$\widehat{A} = \text{arc cos}\left(\frac{20^2 + 20^2 - 30^2}{2 \cdot 20 \cdot 20}\right) = 97,18°$$

$$A_{\text{sector}} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 97,18°}{360°} = 339,22\,\text{cm}^2$$

$$h = \sqrt{20^2 - 15^2} = 13,23\,\text{cm}$$

$$A_{\text{triangle}} = \frac{30 \cdot 13,23}{2} = 198,45\,\text{cm}^2$$

$$A_{\text{segment}} = 339,22\,\text{cm}^2 - 198,45\,\text{cm}^2 = 140,77\,\text{cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 20^2 = 1256,63\,\text{cm}^2$$

$$A_{\text{meitat}} = \frac{1256,64}{2} = 628,32\,\text{cm}^2$$

Una vegada tenim totes les àrees calculades, trobem l'àrea compresa entre la corda i el diàmetre:

$$A_T = 1256{,}63 - 628{,}32 - 140{,}77 = 487{,}54\ \text{cm}^2$$

Avaluació (pàg. 140)

1. a) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 40^2 \neq 20^2 + 30^2$

Com que no compleix la propietat de triangle rectangle, es tracta d'un triangle obliquangle.

b) $h^2 = n \cdot m \rightarrow 30^2 = 18 \cdot 50 \rightarrow 900 = 900$

Com que es compleix la igualtat, es tracta d'un triangle rectangle.

c) $c^2 = a \cdot m \rightarrow 40^2 = 50 \cdot 35 \rightarrow 1600 \neq 1750$

Com que aquesta igualtat no es compleix, resulta que és un triangle obliquangle.

d) S'ha de complir que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$; per tant, el tercer angle és de 90°, de manera que el triangle és rectangle.

e) Hi apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{6}{\sin \hat{B}} = \frac{10}{\sin 40°} \Rightarrow \hat{B} = 22°\,41'$$

$$\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = 180° - 22°\,41' - 40° = 117°\,19'$$

Per tant, el triangle és obliquangle.

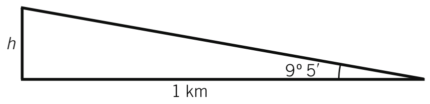
2. Es tracta d'un triangle rectangle; per tant, $\hat{A} = 90°$.

$$\hat{C} = 90° - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 90° - 33° = 57°$$

$$\sin 33° = \frac{b}{a} = \frac{b}{33} \Rightarrow b = 33 \cdot \sin 33° = 17{,}97\ \text{cm}$$

$$\cos 33° = \frac{c}{a} = \frac{c}{33} \Rightarrow c = 33 \cdot \cos 33° = 27{,}68\ \text{cm}$$

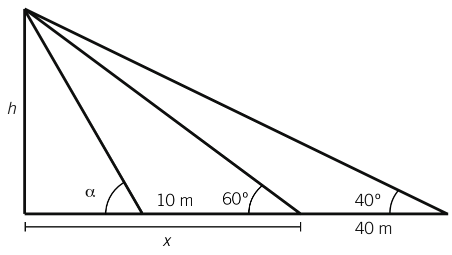
3. El dibuix que representa la situació descrita en l'enunciat.



$$\text{tg}\,(9°\,5') = \frac{h}{1} \Rightarrow h = \text{tg}\,(9°\,5') = 0{,}159\,88\ \text{km}$$

$$0{,}159\,88\ \cancel{\text{km}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = 159{,}88\ \text{m}$$

4. Seguim el dibuix següent per resoldre l'exercici:



$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\,40° &= \frac{h}{x+40} \\ \text{tg}\,60° &= \frac{h}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} h &= 0{,}839 \cdot (x+40) \\ h &= x \cdot 1{,}732 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}839\,(x+40) = x \cdot 1{,}732 \Rightarrow x = 37{,}58\ \text{m} \Rightarrow h = 65{,}1\ \text{m}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{h}{x-10} = \frac{65{,}1}{27{,}68} = 2{,}352 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}\,(2{,}352) = 67°$$

5. Calculem la part enramada de l'arbre, h_1:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\,32° &= \frac{h_1}{x+4} \\ \text{tg}\,40° &= \frac{h_1}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} h_1 &= \text{tg}\,32° \cdot (x+4) \\ h_1 &= x \cdot \text{tg}\,40° \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,32° \cdot (x+4) = x \cdot \text{tg}\,40° \Rightarrow x = 11{,}667\ \text{m} \Rightarrow h_1 = 9{,}79\ \text{m}$$

Ara, calculem la part del tronc, h_2:

$$\text{tg}\,15° = \frac{h_2}{x} = \frac{h_2}{11{,}667} \Rightarrow h_2 = 11{,}667 \cdot \text{tg}\,15° = 3{,}126\ \text{m}$$

L'altura de l'arbre és la suma de les dues altures calculades anteriorment; és a dir, 9,79 m + 3,126 m = 12,916 m.

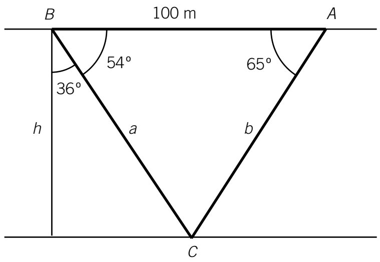
6. En primer lloc, trobem el tercer angle i, després, hi apliquem el teorema del sinus.

$$\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = 180° - 35° - 100° = 45°$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{14}{\sin 45°} = \frac{b}{\sin 35°} \Rightarrow b = 11{,}36\ \text{cm}$$

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{11{,}36}{\sin 35°} = \frac{c}{\sin 100°} \Rightarrow a = 19{,}5\ \text{cm}$$

7. La figura següent ens ajuda a entendre la disposició dels diferents punts i angles:



$$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180° - 54° - 65° = 61°$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\sin 65°} = \frac{100}{\sin 61°} \Rightarrow a = 103{,}62\ \text{m}$$

$$\cos 36° = \frac{h}{a} = \frac{h}{103{,}62} \Rightarrow h = 103{,}62 \cdot \cos 36° = 83{,}83\ \text{m}$$

Per tant, el riu té una amplària de 83,83 m.

8. Calculem el tercer costat aplicant el teorema del cosinus i, mitjançant el teorema del sinus, trobem els altres angles:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow a^2 = 20^2 + 40^2 - 2 \cdot 20 \cdot 40 \cdot \cos 68°$$

$$\Rightarrow a = 37{,}42\ \text{cm}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \hat{C} = \text{arc sin}\left(\frac{40 \cdot \sin 68°}{37{,}42}\right) = 82°\,21'\,17''$$

$$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = 180° - 68° - 82°\,21'\,17'' = 29°\,38'\,43''$$

9. a) Emprem els teoremes del cosinus i del sinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow$$
$$\hat{A} = \text{arc cos}\left(\frac{15^2 + 20^2 - 10^2}{2 \cdot 15 \cdot 20}\right) \Rightarrow \hat{A} = 28° \, 57' \, 18''$$
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \text{arc sin}\left(\frac{15 \cdot \sin 28° \, 57' \, 18''}{10}\right) =$$
$$= 46° \, 34' \, 3''$$
$$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180° - 28° \, 57' \, 18'' - 46° \, 34' \, 3'' =$$
$$= 104° \, 28' \, 39''$$

b) Trobem l'altura del triangle per poder-ne calcular l'àrea:

$$\sin \hat{B} = \frac{h}{a} \Rightarrow \sin 46° \, 34' \, 3'' = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 7{,}262 \text{ cm}$$
$$\Rightarrow A = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 7{,}262}{2} = 72{,}62 \text{ cm}^2$$

10. a) Calculem la longitud de la diagonal petita:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow c^2 = 20^2 + 30^2 -$$
$$- 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 40° \Rightarrow c = 19{,}51 \text{ cm}$$

Així doncs, el valor de la diagonal petita del romboide és de 19,51 cm.

b) Calculem la longitud de la diagonal gran:

$$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = 180° - 20° - 20° = 140°$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \Rightarrow b^2 = 20^2 + 30^2 -$$
$$- 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 140° \Rightarrow b = 47{,}11 \text{ cm}$$

Per tant, el valor de la diagonal gran és de 47,11 cm.

11. a) Utilitzem el teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot 0 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

b) $\text{tg}\,\hat{B} \cdot \text{tg}\,\hat{C} = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{b} = \dfrac{\cancel{b} \cdot \cancel{c}}{\cancel{c} \cdot \cancel{b}} = 1$

12. Calculem els angles del triangle:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \text{arc cos}\left(\frac{50^2 + 60^2 - 70^2}{2 \cdot 50 \cdot 60}\right)$$
$$\Rightarrow \hat{A} = 78° \, 27' \, 47''$$
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = \text{arc sin}\left(\frac{50 \cdot \sin 78° \, 27' \, 47''}{70}\right) =$$
$$= 44° \, 24' \, 55''$$
$$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 180° - 78° \, 27' \, 47'' - 44° \, 24' \, 55'' =$$
$$= 57° \, 7' \, 18''$$

a) La mediana c' divideix en dos el costat *a;* per tant, cada part és de $a' = 35$ cm. Apliquem el teorema del cosinus per trobar la longitud d'aquesta mediana:

$$c'^2 = a'^2 + b^2 - 2 \cdot a' \cdot b \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow c'^2 = 35^2 + 50^2 -$$
$$- 2 \cdot 35 \cdot 50 \cdot \cos 57° \, 7' \, 18'' \Rightarrow c' = 42{,}72 \text{ m}$$

Per tant, la longitud de la mediana traçada sobre el costat és de 42,72 cm.

b) Utilitzem el teorema del sinus:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}'} = \frac{c'}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \hat{B}' = \text{arc sin}\left(\frac{50 \sin 57° \, 7' \, 18''}{42{,}72}\right) =$$
$$= 79° \, 24' \, 7''$$

Per tant, els angles que determinen la mediana i el costat *a* quan es tallen són l'angle que hem calculat i el seu angle suplementari. És a dir, són els angles:

$$79° \, 24' \, 7'', \; 180° - 79° \, 24' \, 7'' = 100° \, 35' \, 53''$$

Zona+ (pàg. 141)

— **La veritat sobre el Triangle de les Bermudes:**

- El Triangle de les Bermudes està situat a l'oceà Atlàntic, entre les illes Bermudes, Puerto Rico i la ciutat nord-americana de Miami, a l'Estat de Florida.

  Si unim aquests tres punts amb una línia imaginària, es forma un triangle equilàter d'uns 1 600 a 1 800 km de costat.

- Per a calcular la superfície del triangle, necessitem saber-ne l'altura. Com que és un triangle equilàter, l'altura divideix el triangle en dos triangles rectangles iguals.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow h = \sqrt{1600^2 + 800^2} = 1788{,}854 \text{ km}$$
$$A = \frac{b \cdot h}{2} \approx \frac{1600 \cdot 1788{,}854}{2} = 1\,431\,083 \text{ km}^2$$

- Alguns exemples suggerits d'altres zones geogràfiques de forma triangular són el triangle que ocupa tota la mar d'Alborán, tocant amb una de les puntes les illes Canàries; el triangle de l'Afganistan, que arriba fins al golf Pèrsic; la mar del Japó, també coneguda com el *triangle del Diable o triangle del Drac.*

— **Els sistemes de posicionament:**

- Resposta suggerida: Es pot consultar la pàgina web següent per a buscar tota la informació necessària sobre els sistemes de posicionament global:

  http://links.edebe.com/xeuv

— **Els triangles a les piràmides egípcies:**

- Un *seked* equival a 51° 50' 34".