MA6: Ampliació de Matemàtiques

Jaume Bartrolí, Humildad Escorihuela, Irene Gil, Manuel Rodríguez, Joan J. de Val, Josep Duran.

Índex

3. Equacions i funcions

3.1 Equacions i sistemes no lineals

3.1.1 Equació biquadrada

Una equació biquadrada és de la forma $ax^4+bx^2+c = 0$

on x és la incògnita i a, b i c són nombres reals amb

$$a \neq 0$$

Recordeu:

* Resum equacions de segon grau

Es resol fent el canvi de variable $x^2 = z$, amb aquest canvi ens queda una equació de segon grau:

equació biquadrada

canvi: $x^2=z$

$$az^2 + bz + c = 0$$

Les solucions de $ax^4 + bx^2 + c = 0$ són, si existeixen, les arrels quadrades de les solucions de $az^2 + bz + c = 0$

Una equació biquadrada pot tenir fins a quatre solucion reals.

Exemple 1

Trobeu les solucions de l'equació

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Resolució

Fem el canvi

$$x^2 = z, x^4 = z^2$$

Tenim l'equació

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

Solucions d'aquesta equació:

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

Ara desfent el canvi:

$$\begin{cases} z = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2 \\ z = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Solucions:

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 2$$

Exemple 2

Trobeu les solucions de l'equació $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

Resolució

Fem el canvi

$$x^2 = z, x^4 = z^2$$

Tenim l'equació

$$z^2 - 8z - 9 = 0$$

Solucions d'aquesta equació:

$$z = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{8+10}{2} = 9 \\ z = \frac{8-10}{2} = -1 \end{cases}$$

Ara desfent el canvi:

$$\begin{cases} z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \\ z = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \quad no \quad té \quad solució \quad real \end{cases}$$

Solucions:

$$x = \pm 3$$

3.1.2 Equació irracional

Una equació irracional és una equació en què la incògnita es troba sota el signe del radical

Ens limitarem a veure equacions senzilles amb una o dues arrels quadrades

Exemple 1

!

equació irracional

s'ha de comprobar a l'equació original si els valors trobats són solució

Exemple d'equació racional amb només una arrel

Trobeu les solucions de l'equació

$$\sqrt{x-1}+3=x$$

Resolució

El primer pas és deixar en un membre de l'equació només el terme amb arrel:

$$\sqrt{x-1}=x-3$$

Elevem al quadrat:

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-3)^2$$

$$x-1=x^2-6x+9$$

$$x^2-7x+10=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 10}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases}\frac{7+3}{2}=5\\ \frac{7-3}{2}=2\end{cases}$$

Atenció: En aquest procés s'han pogut introduir solucions que no ho són de l'equació original, per tant s'ha de comprovar si els valors trobats són solució.

En aquest exemple veiem que efectivament x=5 és solució però x=2 no és solució ja que no compleix l'equació

Solució: x=5

Exemple 2

Exemple d'equació racional amb dos arrels

Trobeu les solucions de l'equació

$$\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$$

Resolució

Elevant al quadrat aconseguirem eliminar una arrel:

$$\begin{array}{l} \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = \left(2+\sqrt{x-3}\right)^2 \\ 2x+1 = 4 + x - 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x-3} \\ -4\sqrt{x-3} = 4 + x - 3 - 2x - 1 \\ -4\sqrt{x-3} = -x \quad \Rightarrow \quad 4\sqrt{x-3} = x \end{array}$$

ara tornem a elevar al quadrat per eliminar l'altra arrel:

$$\begin{array}{l} \left(4\sqrt{x-3}\right)^2 = x^2 \\ 16\left(x-3\right) = x^2 \\ x^2 - 16x + 48 = 0 \end{array}$$

$$x = \tfrac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 48}}{2} = \tfrac{16 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} \tfrac{16+8}{2} = 12 \\ \tfrac{16-8}{2} = 4 \end{cases}$$

En aquest cas comprovem que els dos valors són solució de l'equació racional.

Solucions: x=12 i x=4

3.1.3 Sistemes d'equacions no lineals

Un sistema d'equacions no lineal és un sistema en què una de les equacions que el formen no és de primer grau.

Generalment aquest tipus de sistema el resoldrem pel mètode de substitució però dependrà del sistema en concret. Veurem alguns exemples.

Exemple 1

Resoleu el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{array}\right\}$$

Resolució

Una opció per resoldre aquest sistema és aïllar la y de la primera equació i substituir-la en la segona equació.

Aïllem y de la primera equació:

$$y = 3 - x^2$$

Substituïm en la segona equació:

$$x + 3(3 - x^2) = 5$$

Ens queda l'equació de segon grau:

$$-3x^2 + x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-3) \cdot 4}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{-6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1+7}{-6} = -1 \\ \frac{-1-7}{-6} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} x = -1 & \Rightarrow\ y = 3 - (-1)^2 = 2 \\ x = \frac{4}{3} & \Rightarrow\ y = 3 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{11}{9} \end{array}$$

El sistema té dues solucions:

$$x = -1, \quad y = 2 \quad i \quad x = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{11}{9}$$

Exemple 2

Resoleu el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} xy = 5 \\ x + 3y = 8 \end{array}\right\}$$

Resolució

Una opció per resoldre aquest sistema és aïllar la x de la segona equació i substituir-la en la primera equació.

Aïllem x de la segona equació:

$$x = 8 - 3y$$

Substituïm en la primera equació:

$$(8 - 3y)y = 5 \quad \Rightarrow \quad 8y - 3y^2 = 5$$

Ens queda la equació de segon grau:

$$3y^2 - 8y + 5 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3)} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} = \begin{cases} \frac{8+2}{6} = \frac{5}{3} \\ \frac{8-2}{6} = 1 \end{cases}$$

El sistema té dues solucions:

$$x = 3, \quad y = \frac{5}{3}, \quad i \quad x = 5, \quad y = 1$$

Exemple 3

Problema que resoldrem amb un sistema d'equacions no lineal.

L'àrea d'un triangle rectangle és 15 cm^2 i el seu perímetre és 16 cm. Calcula els costats del rectangle.

Per resoldre aquest problema hem de recordar:

Àrea d'un rectangle: és el producte de la base per l'altura. Perímetre del rectangle: és la suma de tots els costats.

Per tant el sistema que plantegem és:

$$\left.\begin{array}{r} xy = 15 \\ 2x + 2y = 16 \end{array}\right\}$$

Resolució

Una opció per resoldre aquest sistema és aïllar la x de la segona equació, que simplificada queda x + y = 8 i substituir-la en la primera equació.

Aïllem x de la segona equació:

$$x = 8 - y$$

Substituïm en la primera equació:

$$(8-y)y = 15 \quad \Rightarrow \quad 8y - y^2 = 15$$

Ens queda la equació de segon grau:

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \frac{8+2}{2} = 5 \\ \frac{8-2}{2} = 3 \end{cases}$$

I per tant, els valors per a x són 3 i 5

Els costats del triangle són de 3 cm i 5 cm.